Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Ссылка на статью:
// Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 12. С. 300–310.
DOI: 10.7463/1216.0852775
Представлена в редакцию: 02.11.2016

УДК 534.141

Осесимметричные колебания двухслойной жидкости, разделенной мембраной, в закрытом сосуде

Гончаров Д. А.[1,*], Пожалостин А. А.[1]

[*]goncharov@bmstu.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Теоретически исследованы собственные частоты и формы колебаний мембраны в двухслойной жидкости, заполняющей закрытый цилиндрический сосуд. В рамках линейной теории малых потенциальных движений жидкости, линейной теории малых колебаний, выполнены расчеты в осесимметричной постановке. Методом собственных функций для оператора Лапласа в цилиндрической области получены аналитические решения для собственных форм колебаний мембраны. Полученные соотношения дают удовлетворительное описание для частот низших тонов собственных колебаний мембраны в двухслойной жидкости только лишь для определенных соотношений между параметрами жидкости и мембраны.

Ключевые слова: мембрана; осесимметричные колебания; двухслойная жидкость; закрытый сосуд

Введение

Задача о собственных колебаниях мембраны в двухслойной жидкости, заполняющей ограниченный объем, возникает при исследовании динамики жидкости в баках космических летательных аппаратов, в частности, такими исследованиями занимались Н. Абрамсон, Г. Бауэр, Б.И. Рабинович, К.С. Колесников, И.А. Луковский, результаты которых обобщены, например, в монографии Р. Ибрахима [1]. Соответствующие предпосылки изложены, например, в работах [2, 3, 4], а также в публикации В.Б. Сапожникова, В.И. Крылова, Ю.М. Новикова и Д.А. Ягодникова [5].

Некоторые численные расчеты для мембраны в сферическом баке приведены в [6, 7], аналитические и приближенно-аналитические соотношения для мембран в цилиндрическом сосуде были получены в работе [8]. В [9] Алиевым был выведен нелинейный по комбинации частоты и относительной скорости дисперсионный определитель в задаче о распространении волн на границе слоев жидкостей конечной толщины.

С рассматриваемой задачей тесно связана задача о собственных колебаниях жидкости в сосуде со свободной поверхностью, рассмотренная еще Л.Н. Сретенским [10]. Вместе с тем, в последнее время опубликовано множество работ по проблеме сейшевых колебаний свободной поверхности жидкости, исследования в этой области проводят В.И. Букуреев, А.В. Чеботников, И.В. Стурова, например, [11, 12], а также В.А. Калиниченко, Л.И. Коровина, С.В. Нестеров и Аунг Наинг Со [13]. Кроме того, В.А. Калиниченко и Аунг Наинг Со проводят экспериментальные исследования по возбуждению продольных колебаний сосуда с жидкостью за счет стоячих поверхностных волн Фарадея [14].

Настоящая работа является логическим продолжением работ авторов [15] и [16]. Целью данной работы является распространение аналитических соотношений, полученных в [16], на задачу о собственных колебаниях мембраны в жидкости с иными граничными условиями для жидкости.

1. Математические модели

Будем рассматривать малые осесимметричные движения идеальной несжимаемой двухслойной жидкости, заполняющей неподвижный цилиндрический сосуд, разделенной упругой мембраной. Объём, заполненный жидкостью выше мембраны, обозначим как θ_1, объём, заполненный жидкостью ниже разделяющей мембраны — как θ_2 (рис. 1).

Обозначим плотности жидкости в объёмах θ_1 и θ_2 как ϱ_1 и ϱ_2 соответственно. Введем цилиндрическую систему координат $Or\eta z$ с ортами $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ и центром O, связанным с центром недеформированной срединной поверхности мембраны (рис. 2). Считая движение жидкости потенциальным, введем в областях θ_1 и θ_2 потенциалы скоростей жидкостей $\Phi_1(r, z, t)$ и $\Phi_2(r, z, t)$, где

$$\Phi_1(r, z, t) = \tilde{\Phi}_1(r, z)\sin(\omega t), \qquad \Phi_2(r, z, t) = \tilde{\Phi}_2(r, z)\sin(\omega t).$$

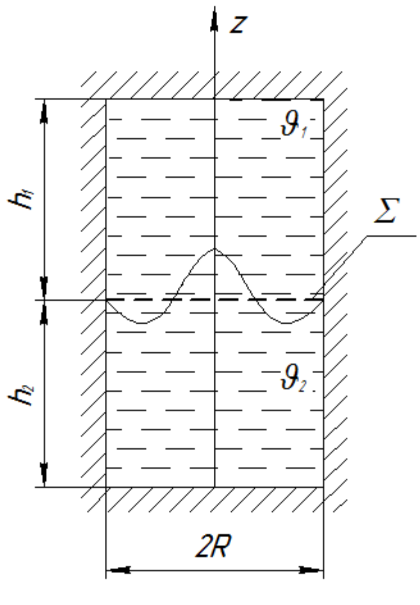

Рис. 1. Неподвижный сосуд с двухслойной жидкостью и разделяющей мембраной

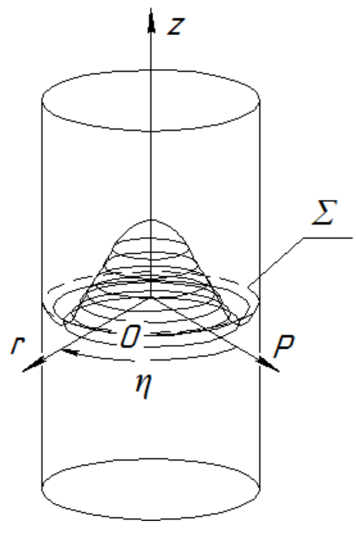

Рис. 2. Система координат

Для функций Φ_1 и Φ_2 выполняются уравнения Лапласа:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \ \text{в} \ \theta_1, \qquad \Delta\Phi_2 = 0 \ \text{в} \ \theta_2, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, который в цилиндрической системе координат имеет следующий вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

На смачиваемой поверхности сосуда будут выполнятся условия непротекания:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ \text{на} \ L_1, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ \text{на} \ L_2, \tag{2}$$

где L_i, $i = 1,\ 2,$ — смачиваемая поверхность объёма θ_i; n — нормаль к смачиваемой поверхности сосуда. В то же время на мембране будут выполняться кинематические условия:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \dot{w} \ \text{на} \ \Sigma, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = \dot{w} \ \text{на} \ \Sigma, \tag{3}$$

где Σ — невозмущенная поверхность мембраны; w — смещение мембраны от невозмущенной поверхности. Кроме того, на мембране будет выполнятся следующее динамическое условие:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\varrho\delta}{\tau}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau}\left[\varrho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\bigg|_{z=0} - \varrho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\bigg|_{z=0}\right]. \tag{4}$$

Здесь ϱ — плотность материала мембраны; δ — ее толщина; τ — натяжение мембраны, $[\tau]$ = Н/м. Правая часть в соотношении (4) представляет собой разность давлений, полученную из интеграла Коши — Лагранжа для случая безвихревого движения жидкости [17]:

$$\varrho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \varrho_1\frac{(\nabla\Phi_1)^2}{2} + \varrho_1 g z + p_1 = F_1(t), \quad \varrho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \varrho_2\frac{(\nabla\Phi_2)^2}{2} + \varrho_2 g z + p_2 = F_2(t),$$

где ∇ — оператор Гамильтона:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\eta}\hat{\mathbf{p}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}};$$

F_i, $i = 1,\ 2,$ — функции только лишь времени. Рассматривая задачу в линейной постановке и пренебрегая слагаемыми $\dfrac{(\nabla\Phi_i)^2}{2}$, $i = 1, 2$, а также гидростатической составляющей $\varrho_i g z$, $i = 1, 2$, получаем выражение для правой части уравнения (1). Ввиду малой толщины разделяющей перегородки и значительного натяжения, возникающего в применяемых материалах (в соответствии с [2] $\delta \sim 5\cdot10^{-3}$м, $\varrho \sim 700\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\tau \sim 1000\,\dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$), можем пренебречь инерционным членом $\dfrac{\varrho\delta}{\tau}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ в дифференциальном уравнении для прогиба мембраны (4). В этом случае оно примет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\tau}\left[\varrho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\bigg|_{z=0} - \varrho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\bigg|_{z=0}\right]. \tag{5}$$

Граничные условия для мембраны примем в виде:

$$w(r,t)\bigg|_{r=R} = 0, \quad |w(r,t)|\bigg|_{r=0} < \infty. \tag{6}$$

2. Решение краевой задачи

Уравнение (1) в областях θ_1 и θ_2 соответственно приобретает вид:

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}=0,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial^2\tilde\Phi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde\Phi_1}{\partial r}+\frac{\partial^2\tilde\Phi_1}{\partial z^2}\right)\sin(\omega t)=0,\qquad \left(\frac{\partial^2\tilde\Phi_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde\Phi_2}{\partial r}+\frac{\partial^2\tilde\Phi_2}{\partial z^2}\right)\sin(\omega t)=0. \tag{7}$$

Представим $\tilde\Phi_1(r,z)$ в виде произведения функций $\tilde\Phi_1(r,z)=R_1(r)\,Z_1(z)$ и, аналогично, $\tilde\Phi_2(r,z)=R_2(r)\,Z_2(z)$. Разделяя переменные, получаем функции $Z_1(z)$ и $Z_2(z)$ в следующем виде:

$$Z_1(z)=C_1\,\mathrm{ch}[k_1(z-h_1)],\qquad Z_2(z)=C_2\,\mathrm{ch}[k_2(z+h_2)],$$

где C_i, $i=1,\ 2$, — постоянные интегрирования; k_i — собственные значения данной краевой задачи. Для функций $R_i(r)$, $i=1,\ 2$, уравнение (7) примет вид

$$\frac{d^2R_i}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_i}{dr}+k_i^2R_i=0. \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка, его решение выражается через функции Бесселя и Неймана:

$$R_i(r)=\tilde A_iJ_0(k_ir)+\tilde B_iN_0(k_ir), \tag{9}$$

где $J_0(k_ir)$ — функция Бесселя первого рода, нулевого порядка; $N_0(k_ir)$ — функция Бесселя второго рода или функция Неймана, также нулевого порядка. Ввиду ограниченности функций $\Phi_i(z,r,t)$ при $r=0$ и, следовательно, функций $R_i(r)$, положим коэффициенты $\tilde B_i$ при функциях Неймана $N_i(k_ir)$ равными нулю, поскольку, как известно, функция Неймана имеет особенность при $r=0$. Не ограничивая общности, можно положить $\tilde A_i=1$.

Из условий непротекания на стенках сосуда имеем:

$$\left.\frac{dJ_0(k_ir)}{dr}\right|_{r=R}=0,$$

откуда

$$k_1^{(n)}=k_2^{(n)}=\frac{\xi_{0n}}{R},$$

где ξ_{0n} — корни уравнения $J_1(r)=0$ (ввиду рекуррентного соотношения $J_0'(r)=-J_1(r)$). Таким образом, выражения для потенциалов скоростей жидкостей приобретают вид

$$\begin{aligned}\Phi_1(z,r,t)&=\sin(\omega t)\left\{C_{11}^{(0)}+C_{12}^{(0)}\frac{z}{R}+\sum_{n=1}^{\infty}C_1\,\mathrm{ch}\left[\frac{\xi_{0n}}{R}(z-h_1)\right]J_0\left(\frac{\xi_{0n}}{R}r\right)\right\},\\ \Phi_2(z,r,t)&=\sin(\omega t)\left\{C_{21}^{(0)}+C_{22}^{(0)}\frac{z}{R}+\sum_{n=1}^{\infty}C_2\,\mathrm{ch}\left[\frac{\xi_{0n}}{R}(z+h_2)\right]J_0\left(\frac{\xi_{0n}}{R}r\right)\right\}.\end{aligned} \tag{10}$$

Выполним граничные условия на верхнем и нижнем днищах сосуда. В соответствии с (2) имеем: $\left.\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{z=h_1} = 0$ и $\left.\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_2} = 0$, откуда $C_{12}^{(0)} = 0$ и $C_{22}^{(0)} = 0$. В соответствии с [18] решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа могут отличаться лишь на постоянное слагаемое. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем рассматривать решения, где $C_{11}^{(0)} = C_{21}^{(0)} = 0$. Выполняя теперь кинематическое условие на мембране (3), получаем

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=0}, \tag{11}$$

причем

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = -\sum_{n=1}^{\infty} C_1\frac{\xi_{0n}}{R}\,\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\frac{h_1}{R}\right)J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{R}\right)\sin(\omega t), \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_2\frac{\xi_{0n}}{R}\,\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\frac{h_2}{R}\right)J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{R}\right)\sin(\omega t), \tag{13}$$

откуда

$$C_2 = -C_1\frac{\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\dfrac{h_1}{R}\right)}{\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\frac{h_2}{R}\right)}. \tag{14}$$

Введем коэффициенты B_n так, что

$$C_1 = -\frac{B_n}{\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\dfrac{h_1}{R}\right)}\frac{1}{J_0(\xi_{0n})}, \qquad C_2 = \frac{B_n}{\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\dfrac{h_2}{R}\right)}\frac{1}{J_0(\xi_{0n})}.$$

Выражения для потенциалов скоростей жидкостей, с учетом нормировки по значению $J_0\left(\xi_{0n}\right)$ в таком случае примут вид:

$$\Phi_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{J_0\left(\xi_{0n}\dfrac{r}{R}\right)}{J_0(\xi_{0n})}\frac{\mathrm{ch}\left[\xi_{0n}\dfrac{z-h_1}{R}\right]}{\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\dfrac{h_1}{R}\right)}\sin(\omega t), \tag{15}$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{J_0\left(\xi_{0n}\dfrac{r}{R}\right)}{J_0(\xi_{0n})}\frac{\mathrm{ch}\left[\xi_{0n}\dfrac{z+h_2}{R}\right]}{\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\dfrac{h_2}{R}\right)}\sin(\omega t). \tag{16}$$

Дифференциальное уравнение (5) запишем в следующем виде, удобном для решения:

$$\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\dot{w}}{\partial r} = \frac{1}{\tau}\left[\varrho_2\left.\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}\right|_{z=0} - \varrho_1\left.\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}\right|_{z=0}\right]. \tag{17}$$

Представляя $\dot{w}(r,t) = w_r(r)\,\dot{s}(t)$, получаем

$$w_r(r) = -\frac{\omega^2}{\tau}\left(\frac{R}{\xi_{0n}}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\varrho_2\,\mathrm{cth}\left(\xi_{0n}\frac{h_2}{R}\right) + \varrho_1\,\mathrm{cth}\left(\xi_{0n}\frac{h_1}{R}\right)\right]\frac{J_0\left(\xi_{0n}\dfrac{r}{R}\right)}{J_0(\xi_{0n})} + \tilde{C}_1\ln r + \tilde{C}_2. \tag{18}$$

Ввиду ограниченности функции $w_r(r)$ при $r = 0$, положим $\tilde{C}_1 = 0$. Из граничного условия (6) определим постоянную $\tilde{C}_2$:

$$C_2 = \frac{\omega^2}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{R}{\xi_{0n}}\right) \left[\varrho_2 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R}\right) + \varrho_1 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R}\right)\right].$$

Выполним теперь кинематическое условие (3) в части равенства скоростей прогиба мембраны $\dot{w}$ и скорости жидкости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\xi_{0n}}{R} \frac{J_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right)}{J_0(\xi_{0n})} = \frac{\omega^2}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{R}{\xi_{0n}}\right)^2 \left[\varrho_2 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R}\right) + \varrho_1 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R}\right)\right] \left[1 - \frac{J_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right)}{J_0(\xi_{0n})}\right].$$

Умножая правую и левую часть выражения на $rJ_0\left(\xi_{0n}\dfrac{r}{R}\right)$ и интегрируя в пределах от 0 до R, с учетом соотношений

$$\int_0^R rJ_0\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right) dr = 0, \qquad \int_0^R rJ_0^2\left(\xi_{0n} \frac{r}{R}\right) dr = \frac{1}{2}R^2\left[J_0^2(\xi_{0n}) + J_1^2(\xi_{0n})\right] = \frac{1}{2}R^2 J_0^2(\xi_{0n}),$$

получим

$$\omega_n^2 = \left(\frac{\xi_{0n}}{R}\right)^3 \frac{\tau}{\varrho_2 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_2}{R}\right) + \varrho_1 \operatorname{cth}\left(\xi_{0n} \frac{h_1}{R}\right)}. \tag{19}$$

Результаты

Соотношение (19) выражает зависимость квадрата частоты собственных колебаний безынерционной мембраны в двухслойной жидкости. Полученный результат хорошо согласуется с соотношением, представленным в работе Ю.Н. Кононова и Е.А. Титаренко [8] для схожей постановки задачи с иными граничными условиями для краевой задачи Неймана. Зависимость для частот первого и второго тона собственных колебаний при различных соотношениях определяющих параметров приведены на рис. 3 и 4 соответственно.

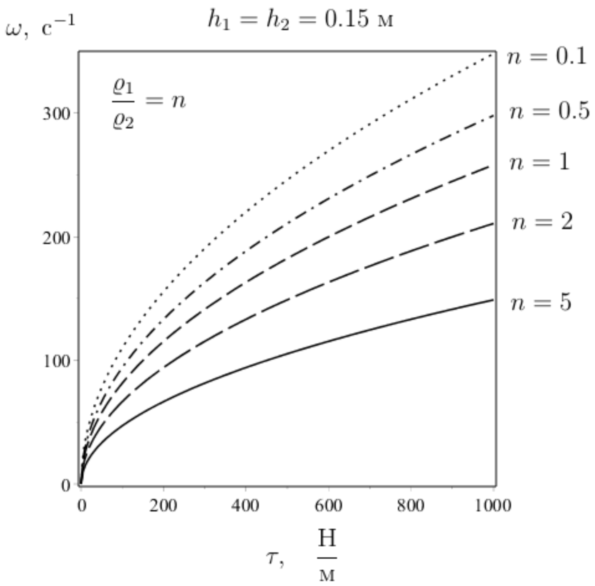

Рис. 3. Зависимость частоты первого тона от натяжения мембраны

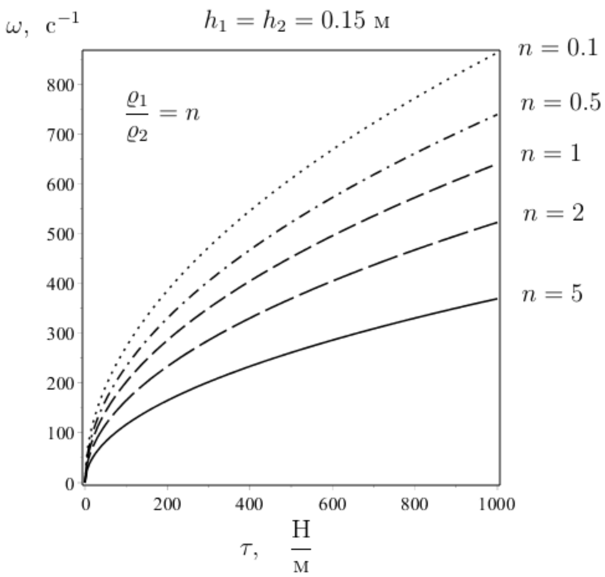

Рис. 4. Зависимость частоты второго тона от натяжения мембраны

Можно видеть, что для диапазона натяжений, характерных для используемых материалов [2], значения частот собственных колебаний мембраны будут значительно превосходить частоты собственных колебаний жидкости (обозначим их для определенности σ_n), заполняющей цилиндр радиуса R на высоту h, определяемых, например, из соотношения [17]:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{g\xi_{0n}}{R}\,\mathrm{th}\Big(\xi_{0n}\frac{h}{R}\Big)}.$$

Здесь g — ускорение свободного падения.

Список литературы

1. Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Camb.; N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.
2. Поляев В.М., Багров В.В., Курпатенков А.В. и др. Капиллярные системы отбора жидкости из баков космических летательных аппаратов. Энергомаш, 1997, 327 с.
3. Сапожников В.Б., Меньшиков В.А., Партола И.С., Корольков А.В. Развитие идей профессора В.М. Поляева по применению пористо-сетчатых материалов для внутрибаковых устройств, обеспечивающих многократный запуск жидкостных ракетных двигателей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2006. № 2. С. 78–88.
4. Иванов В.П., Партола И.С. Комбинированная система управления расходованием топлива кислородно-водородного разгонного блока // Вестник Самарского ун-та. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2011. № 3-1(27). Спец. вып.: Материалы Междунар. науч.-техн. конф. «Проблемы и перспективы развития двигателестроения» (Самара, 28-30 июня 2011 г.) С. 28–34.
5. Сапожников В.Б., Крылов В.И., Новиков Ю.М., Ягодников Д.А. Наземная отработка капиллярных фазоразделителей на основе комбинированных пористо-сетчатых материалов для топливных баков жидкостных ракетных двигателей верхних ступеней ракет-носителей, разгонных блоков и космических аппаратов // Инженерный журнал: наука и инновации. Электрон. журн. 2013. № 4(16). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-4-707
6. Sauces D.J., Gangadharan S.N., Sudermann J.E., Marsell B.. CFD Fuel Slosh Modeling of Fluid-Structure Interaction in Spacecraft Propellant Tanks with Diaphragms // 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (Orlando, Florida, USA, 12-15 April, 2010): Collection of technical papers. Wash.: AIAA, 2010.
7. Schlee K., Gangadharan S.N., Ristow J., Sudermann J., Walker C., Hubert C. Modeling and Parameter Estimation of Spacecraft Fuel Slosh // 29th Annual AAS Rocky Mountain Section Guidance and Control Conference (Breckenridge, Colorado, USA, 4-8 Febr., 2006): Proc. San Diego: AAS, 2006.

8. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. 2003. Т. 6, № 3. С. 44–52. Режим доступа: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/982 (дата обращения 01.12.2016).
9. Aliev I.N., Yurchenko S.O., Nazarova E.V. On the problem of instability of the boundary of two media of finite thickness // J. of Engineering Physics and Thermophysics. 2007. Vol. 80, no. 6. P. 1199–1205. DOI: 10.1007/s10891-007-0154-1
10. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 815 с.
11. Букреев В.И., Стурова И.В., Чеботников А.В. Сейшевые колебания в бассейне, заполненном двухслойной жидкостью // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 3. С. 110–118.
12. Стурова И.В. Внутренние сейши в водоеме, заполненном непрерывно стратифицированной жидкостью // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 6. С. 70–79.
13. Калиниченко В.А., Коровина Л.И., Нестеров С.В., Со А.Н. Особенности колебаний жидкости в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Инженерный журнал: наука и инновации. Электрон. журн. 2014. № 12(36). DOI: 10.18698/2308-6033-2014-12-1345
14. Калиниченко В.А., Со А.Н. Экспериментальное исследование связанных колебаний сосуда с жидкостью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные Науки. 2015. № 1(58). С. 14–25. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-14-25
15. Дьяченко М.И., Орлов В.В., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических емкостях // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. 175–192. DOI: 10.7463/1113.0623923
16. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновации. Электрон. журн. 2013. № 12(24). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1147
17. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. 6-е изд. Ч.I. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
18. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.

Science&Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2016, no. 12, pp. 300–310.
DOI: 10.7463/1216.0852775
Received: 02.11.2016

Axisymmetric oscillations of a bilayer fluid, separated by the membrane, in a closed vessel

Goncharov D. A.[1,*], Pozhalostin A. A.[1],
[*]goncharov@bmstu.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: the membrane, axisymmetric oscilations, bilayer liquid, closed vessel

The paper deals with the problem of small oscillations of bilayer liquid separated by a membrane in a closed vessel. This problem arises when studying the behavior of the liquid component of the fuel in the spacecraft tanks in their interaction with the elements of systems providing the start-up of the propulsion system.

The problem of small oscillations is considered in the linear formulation. We consider symmetrical motion of liquid. The membrane is assumed to be thin, elastic, and non-inertial. The liquid completely fills the cylindrical vessel. We consider motion of an ideal and viscous incompressible liquid. On the vessel walls the flow tangency condition is fulfilled. The liquid container volume satisfies the condition of continuity, which in the area under consideration takes a form of the Laplace equation. The differential equation of membrane motion is written with the right-hand side, which includes the hydrodynamic liquid-induced pressure. Restricted deflection of the membrane center and zero movements of the membrane contour stipulate boundary conditions for the equation of membrane motion.

Integrating the Laplace equation we obtain the expression for the liquid velocity potential in the areas above and below membrane. Writing the equation of the membrane motion for deflection rate, representing the function of membrane deflection rate in accordance with the Fourier method as a product of functions of coordinates and time, we can integrate the expressions for the function of membrane deflection. Fulfilling the boundary conditions for the function of membrane deflection together with the boundary conditions for the Laplace equation, we can obtain an analytical expression for the function of membrane deflection and a frequency equation for the given boundary value problem.

It can be seen that for a range of tensions typical for used materials, which are considered, for example, in V.M. Polyaev's monograph, the frequency values of natural oscillations of the membrane will be much higher than the frequency of natural oscillations of the liquid that fills the cylinder of a given radius and height determined from the known relationship.

References

1. Ibrahim R.A. *Liquid sloshing dynamics: theory and applications*. Camb., N.Y., Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.
2. Poliaev V.M., Bagrov V.V., Kurpatenkov A.V. *Kapilliarnye sistemy otbora zhidkosti iz bakov kosmicheskikh letatel'nykh apparatov* [Capillary system of selection of the liquid from the tank to the spacecraft]. Moscow, Energomash Publ., 1997. 327 p. (in Russian).
3. Sapozhnikov V.B., Menshikov V.A., Partola I.S., Korolkov A.V. Development of ideas of professor V.V. Polyaev on application of porous-meshed materials for internal tank devices providing repeated many times start-up of liquid propellant engines. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Mechanical Engineering], 2006, no. 2, pp. 78–88 (in Russian).
4. Ivanov V.P., Partola I.S. The combined fuel draining control system for liquid oxygen and liquid hydrogen upper stage. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Aerokosmicheskaia tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie* [Vestnik of Samara Univ. Aerospace and Mechanical Engineering], 2011, no. 3-1(27), spec. iss., pp. 28–34 (in Russian).
5. Sapozhnikov V.B., Krylov V.I., Novikov Yu.M., Yagodnikov D.A. Ground tests of capillary phase separators based on combined porous mesh material for fuel tanks of liquid propellant engine in propulsion installations of space crafts, top steps of carrier rockets and upper-stage rockets. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering J.: Science and Innovation], 2013, no. 4(16). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-4-707 (in Russian).
6. Sauces D.J., Gangadharan S.N., Sudermann J.E., Marsell B.. CFD fuel slosh modeling of fluid-structure interaction in spacecraft propellant tanks with diaphragms. *51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (Orlando, Florida, USA, 12-15 April, 2010): Collection of technical papers. Wash., AIAA, 2010.
7. Schlee K., Gangadharan S.N., Ristow J., Sudermann J., Walker C., Hubert C. Modeling and parameter estimation of spacecraft fuel slosh. *29th Annual AAS Rocky Mountain Section Guidance and Control Conference* (Breckenridge, Colorado, USA, Febr. 4-8, 2006): Proc. San Diego, AAS, 2006.
8. Kononov Yu.N., Tatarenko E.A. Free vibrations of two-layer fluid with an elastic membrane on the free and internal surfaces. *Akustichnij visnik* [Acoustic Bulletin], 2003, vol. 3, no. 6, pp. 44–52. Available at: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/982, accessed 01.12.2016.
9. Aliev I.N., Yurchenko S.O., Nazarova E.V. On the problem of instability of the boundary of two media of finite thickness. *J. of Engineering Physics and Thermophysics*, 2007, vol. 80, no. 6, pp. 1199–1205. DOI: 10.1007/s10891-007-0154-1
10. Sretenskij L.N. *Teoriia volnovykh dvizhenij zhidkosti* [The theory of wave motions of fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 815 p. (in Russian).

11. Bukreev V.I., Sturova I.V., Chebotnikov A.V. Seiche oscillations in a reservoir filled with a double-layer fluid. *Izvestiia RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2014, vol. 49, no. 3, pp. 395–402. DOI: 10.1134/S0015462814030119

12. Sturova I.V. Internal seiches in a basin filled with a continuously stratified fluid. *Izvestiia RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2014, vol. 49, no. 6, pp. 761–769. DOI: 10.1134/S0015462814060076

13. Kalinichenko V.A., Korovina L.I., Nesterov S.V., Aung Naing Soe. The features of fluid oscillations in a rectangular vessel with local bottom irregularities. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering J.: Science and Innovation], 2014, no. 12(36). DOI: 10.18698/2308-6033-2014-12-1345 (in Russian)

14. Kalinichenko V.A., Aung Naing Soe. An experimental study of coupled vibrations of the tank with liquid. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser.: Natural sciences], 2015, no. 1(58), pp. 14–25. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-14-25 (in Russian)

15. D'yachenko M.I., Orlov V.V., Temnov A.N. A problem of propellant oscillations in cylindrical and conical tanks. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2013, no. 11, pp. 175–192. DOI: 10.7463/1113.0623923 (in Russian)

16. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. Free axisymmetric oscillations of two-layered liquid with the elastic separator between layers in the presence of surface tension forces. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering J.: Science and Innovation], 2013, no. 12(24). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1147 (in Russian)

17. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaia gidromekhanika* [Theoretical hydromechanics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. Pt. 1. 584 p. (in Russian).

18. Mikhlin S.G. *Linejnye uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Linear partial differential equations]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1977. 431 p. (in Russian).