Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Электрон. журн. 2016. № 12. С. 207–215.

DOI: **10.7463/1216.0852553**

Представлена в редакцию: 11.11.2016
Исправлена: 25.11.2016

УДК 621.865

Анализ собственных частот в универсальных программах анализа динамических процессов

Трудоношин В. А.[1,*], Федорук В. Г.[1]

[*]trudonoshin@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Областью исследования в данной статье является математическое моделирование сложных динамических систем с сосредоточенными параметрами. Цель работы состоит в адаптации универсальных программ анализа для решения задачи отыскания собственных частот таких систем. Адаптация может быть выполнена для программ, в которых реализованы методы формирования математических моделей, содержащих в векторе неизвестных производные переменных состояния, путем приведения математической модели к нормальной форме Коши. Показаны пути такой адаптации для программ, реализующих для формирования математической модели обобщенный и расширенный узловой методы и ограничения, возникающие при этом.

Ключевые слова: математическая модель объекта с сосредоточенными параметрами, собственные частоты, обобщенный метод, расширенный узловой метод

Процедура анализа собственных частот колебаний динамических систем имеет существенное значение среди проектных процедур, позволяя выявить все возможные резонансы[1]. Основана она на вычислении собственных значений матрицы коэффициентов А математической модели объекта, представленной в нормальной форме Коши:

$$\frac{dV}{dt} = AV + B \qquad (1).$$

Но универсальные программные комплексы анализа динамических процессов объектов с сосредоточенными параметрами ориентируются на неявные методы численного интегрирования, для которых получение математической модели объекта в виде (1) не только не является обязательным, но и, как правило, не реализуется, и они оперируют математической моделью в форме

$$F\left(\frac{dV}{dt}, V, t\right) = 0.. \qquad \{2\}$$

Применяемыми на практике методами формирования математической модели объекта являются узловой модифицированный[2] - комплекс ПА9[3]; расширенный узловой для механических систем[2] – комплекс Pradis[4]; информация об используемом методе формирования в популярном комплексе Amesim[5] отсутствует, но вероятнее всего, что там реализован метод переменных состояния[2].

Если методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений «растворены» в компонентных уравнениях реактивных ветвей, то производная $\frac{dV}{dt}$ в явном виде исчезает из вектора неизвестных математической модели объекта. Это происходит в таких методах, как узловой, узловой модифицированный, табличный[6]. В этом случае говорить об анализе собственных частот не приходится, но возможна реализация частотного анализа, который дает практически ту же информацию, что и анализ собственных частот.

Для методов, у которых $\frac{dV}{dt}$ в математической модели остается в явном виде, можно попытаться получить модель в форме (1).

В начале рассмотрим обобщенный метод формирования математической модели[2]. Базис метода (вектор неизвестных) составляют производные переменных состояния, переменные типа потока для всех ветвей и переменные типа разности потенциалов для всех ветвей. В общем виде матрица Якоби линеаризованной математической модели представлена в таблице 1.

Таблица 1.

1	К12	К13	К14	К15		$\frac{dV}{dt}$
	1			M		$U_{х}$
		1	$-M^t$			$I_{х}$
К41	К42	К43	К44	К45		$I_{вд}$
К51	К52	К53	К54	К55		$U_{вд}$

M–матрица – матрица контуров и сечений[7],I – переменные типа потока, U - переменные типа разности потенциалов, индексы «х» и «вд» относятся к хордам и ветвям дерева, соответственно. Вторая и третья строки – топологические уравнения. Подматрицы К12-К15 заполняются с использованием формул численного интегрирования, подматрицы К41-К45, К51-К55 – с использованием компонентных уравнений.

Рассмотрим получение математической модели схемы, представленной на рис.1. Из-за того, что пример является электрическим, общность подхода не страдает, поскольку существуют аналогии между однородными физическими подсистемами[7].

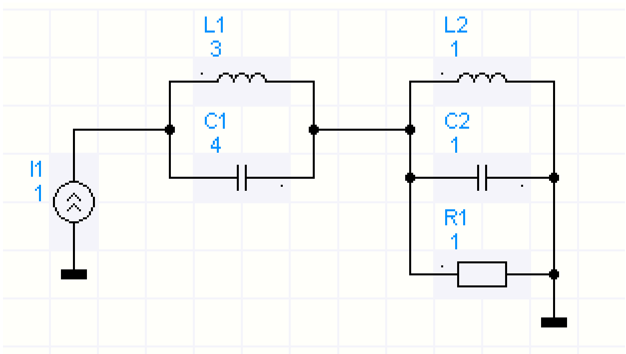

Рис.1 Модельная схема

Для получения модели построим граф и выберем фундаментальное дерево. Граф, дерево и М-матрица, представлены на рисунке 2 и таблице 1.

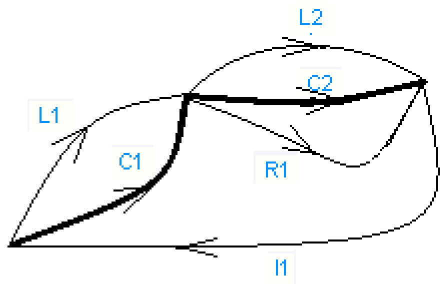

Рис.2 Граф с выбранным деревом

Таблица1. М-матрица

	C1	C2
L1	-1	
L2		-1
R1		-1
I1	1	1

Матрица Якоби на ньютоновской итерации, при использовании для интегрирования неявного метода Эйлера, представлена в таблице 2

Таблица 2. Матрица Якоби для схемы рис.1

1														$-\frac{1}{\Delta t}$			$\frac{dU_{c1}}{dt}$
	1														$-\frac{1}{\Delta t}$		$\frac{dU_{c2}}{dt}$
		1								$-\frac{1}{\Delta t}$							$\frac{dI_{L1}}{dt}$
			1								$-\frac{1}{\Delta t}$						$\frac{dI_{L2}}{dt}$
				1										-1			U_{L1}
					1										-1		U_{L2}
						1									-1		U_{R1}
							1							1	1		U_{I1}
								1		1			-1				I_{c1}
									1		1	1	-1				I_{c2}
		$L1$		-1													I_{L1}
			$L1$		-1												I_{L2}
						-1						$R1$					I_{R1}
													1				I_{I1}
$C1$								-1									U_{c1}
	$C2$								-1								U_{c2}

Перегруппируем уравнения и переменные таким образом, чтобы последним подвектором был подвектор переменных состояния (переменные состояния – величины, стоящие под знаком производной по времени), перед ним – подвектор производных переменных состояния, оставшиеся переменные будут вначале.

Таблица 3. Матрица Якоби после перестановки переменных.

1												-1					U_{L1}
	1												-1				U_{L2}
		1											-1				U_{R1}
			1									1	1				U_{I1}
				1			-1							1			I_{c1}
					1	1	-1								1		I_{c2}
		-1				$R1$											I_{R1}
							1										I_{I1}
								1				$-\frac{1}{\Delta t}$					$\frac{dU_{c1}}{dt}$
									1				$-\frac{1}{\Delta t}$				$\frac{dU_{c2}}{dt}$
										1				$-\frac{1}{\Delta t}$			$\frac{dI_{L1}}{dt}$
											1				$-\frac{1}{\Delta t}$		$\frac{dI_{L2}}{dt}$
				-1				$C1$									U_{c1}
					-1				$C2$								U_{c2}
-1										$L1$							I_{L1}
	-1										$L2$						I_{L2}

Выполняя прямой ход Гаусса до производных переменных состояния и, в последних четырех строках проведя деление на элементы, соответствующие производным переменных состояния, получим матрицу, представленную в таблице 4.

Таблица 4. Часть матрицы Якоби после прямого хода Гаусса.

1				$-\frac{1}{\Delta t}$					$\frac{dU_{c1}}{dt}$
	1				$-\frac{1}{\Delta t}$				$\frac{dU_{c2}}{dt}$
		1				$-\frac{1}{\Delta t}$			$\frac{dI_{L1}}{dt}$
			1				$-\frac{1}{\Delta t}$		$\frac{dI_{L2}}{dt}$
1						$\frac{1}{C1}$			U_{c1}
	1				$\frac{1}{R1 * C2}$		$\frac{1}{C2}$		U_{c2}
		1		$-\frac{1}{L1}$					I_{L1}
			1		$-\frac{1}{L2}$				I_{L2}

Последние четыре строки дают систему уравнений в нормальной форме Коши, для которой можно находить собственные значения.

В том случае, когда получение системы уравнений в нормальной форме Коши невозможно (при наличии неправильных размещений[7]), после проведения прямого хода Гаусса левая нижняя подматрица (в примере единичная) будет содержать более одного элемента в строке. Это будет говорить о необходимости устранения неправильных размещений.

Авторам неизвестна практическая реализация обобщенного метода формирования математической модели объекта, в отличие от расширенного узлового метода[8], который реализован в комплексе ПА8.

Базис расширенного узлового метода составляют производные переменных состояния, переменные состояния, узловые потенциалы и токи идеальных источников типа Е.

Матрица Якоби для примера, рассмотренного выше, при использовании для интегрирования неявного метода Эйлера, представлена в таблице 5.

Таблица 5. Матрица Якоби при использовании расширенного узлового метода

1				$-\frac{1}{\Delta t}$							$\frac{dU_{c1}}{dt}$
	1				$-\frac{1}{\Delta t}$						$\frac{dU_{c2}}{dt}$
		1				$-\frac{1}{\Delta t}$					$\frac{dI_{L1}}{dt}$
			1				$-\frac{1}{\Delta t}$				$\frac{dI_{L2}}{dt}$
				1				-1	1		U_{c1}
					1				-1		U_{c2}
		$L1$						-1	1		I_{L1}
			$L2$						-1		I_{L2}
$\mathrm{C1}$						1					φ_1
$-\mathrm{C1}$	$\mathrm{C2}$					-1	1		$\frac{1}{R1}$		φ_2

Методом исключения переменных нужно обнулить подматрицу, соответствующую узловым потенциалам для уравнений, соответствующих I_L и φ. В результате получим матрицу, представленную в таблице 6.

Таблица 6. Матрица Якоби после процедуры исключения

1				$-\frac{1}{\Delta t}$							$\frac{dU_{c1}}{dt}$
	1				$-\frac{1}{\Delta t}$						$\frac{dU_{c2}}{dt}$
		1				$-\frac{1}{\Delta t}$					$\frac{dI_{L1}}{dt}$
			1				$-\frac{1}{\Delta t}$				$\frac{dI_{L2}}{dt}$
				1				-1	1		U_{c1}
					1				-1		U_{c2}
		$L1$		-1							I_{L1}
			$L2$		-1						I_{L2}
$\mathrm{C1}$						1					φ_1
$-\mathrm{C1}$	$\mathrm{C2}$				$\frac{1}{R1}$	-1	1				φ_2

Для подматрицы, содержащей элементы C и L, также методом исключения, добиваемся, чтобы в каждой строке было по одному элементу, и делим строку на этот элемент. В результате получим матрицу, представленную в таблице 7.

1				$-\frac{1}{\Delta t}$							$\frac{dU_{c1}}{dt}$
	1				$-\frac{1}{\Delta t}$						$\frac{dU_{c2}}{dt}$
		1				$-\frac{1}{\Delta t}$					$\frac{dI_{L1}}{dt}$
			1				$-\frac{1}{\Delta t}$				$\frac{dI_{L2}}{dt}$
				1				-1	1		U_{c1}
					1				-1		U_{c2}
		1		$-\frac{1}{L1}$							I_{L1}
			1		$-\frac{1}{L2}$						I_{L2}
1						$\frac{1}{C1}$					φ_1
	1				$\frac{1}{R1 * C2}$		$\frac{1}{C2}$				φ_2

В результате 4 последние уравнения представляют собой систему уравнений в нормальной форме Коши, для которой можно находить собственные значения.

Заключение

Для универсальных программных комплексов анализа динамических процессов, в которых реализованы методы формирования математических моделей объектов, содержащие в своем базисе производные переменных состояния возможна реализация процедуры анализа собственных значений. Неправильные размещения, препятствующие получению математической модели в нормальной форме Коши, могут быть устранены на этапе подготовки схемы к анализу.

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. – 472с.
2. Моделирование систем с сосредоточенными параметрами (базовый курс) // База и генератор образовательных ресурсов. Режим доступа: http://bigor.bmstu.ru/?met/?doc=Mod/base.cou/?cou=Mod/base.cou (дата обращения 18.10.2016).
3. Применение комплекса ПА9 для проектирования объектов машиностроения // Центр дистанционного обучения МГТУ им. Н.Э. Баумана. Режим доступа: http://wwwcdl.bmstu.ru/Press/Press.html (дата обращения 18.10.2016).

4. PRADIS -программный комплекс для анализа динамики систем различной физической природы // Ладуга. Инженерные услуги: сайт компании. Режим доступа: http://www.laduga.ru/pradis/pradis.shtml (дата обращения 18.10.2016).
5. Решения LMS для моделирования и проведения испытаний // Siemens PLM Software. Режим доступа: http://www.plm.automation.siemens.com/ru_ru/products/lms/index.shtml (дата обращения 18.10.2016).
6. Петренко А.И., Власов А.И., Тимченко А.П. Табличные методы моделирования электронных схем на ЭЦВМ. Киев: Вища школа, 1977. 190 с.
7. Норенков И.П., Трудоношин В.А., Федорук В.Г. Метод формирования математических моделей для адаптируемых программных комплексов анализа радиоэлектронных схем // Радиотехника. 1986. № 9. С. 67-72.
8. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2009. 430 с.

Science&Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2016, no. 10, pp. 207–215.

DOI: **10.7463/1216.0852553**

Received: 11.11.2016
Revised: 25#.11.2016

Analysis of Natural Frequencies in the Universal Programs for Dynamic Processes Analysis

V.A. Trudonoshin[1,*], V.G. Fedoruk[1]

[*]trudonoshin@mail.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: a mathematical model of the object with concentrated parameters, natural frequencies, generalized method, advanced nodal method

Finding the natural frequencies of complex technical objects is an important design procedure. This type of analysis allows us to determine the resonant frequencies and, as a consequence, to avoid their adverse impact on dynamics the projected object or that of under study. This applies to both the objects with distributed parameters, and the objects with lumped parameters. As to the first type of the objects, in almost every package that implements the finite element method, this type of analysis is available. The situation is different for the objects with lumped parameters. Methods to have the mathematical models for these objects look to implicit methods of numerical integration of ordinary differential equations. And the component equations of the reactive branches are sampled by numerical integration formulas, and the derivatives of state variables disappear from the vector of the unknowns of a mathematical model. In this case, talk about the implementation of the procedure for finding natural frequencies by finding eigenvalues is simply unnecessary.

In cases where a mathematical model of the object is given in the normal Cauchy form, obtaining the natural frequencies is reduced to finding the eigenvalues of the coefficient matrix. There are methods to form the mathematical models in which the derivatives of the state variables make a sub-vector of the vector of unknowns. These are generalized, advanced nodal methods, and an advanced nodal one for mechanical systems. There can be a try for reduction of the mathematical models of objects, obtained by these methods, to the normal Cauchy form. The article discusses a similar procedure for the generalized and advanced nodal methods. As for the extended nodal method for mechanical systems there is specifics the article does not show. For the model obtained by generalized method the vector of unknown variables is permutated so that a sub-vector of the derivatives of the state variables was in the penultimate position, while a sub-vector of the state variables was in the last one.

After that, through a direct Gauss course to the derivatives of the state variables and dividing into coefficients corresponding to the derivatives of the state variables, we obtain the normal form of Cauchy, but only in case there are no wrong distributions in the original model.

For the advanced nodal method the unknowns are not permutated. The elimination approach is used to try to reset the sub-matrix of coefficients that corresponds to the sub-vector of node potentials for the equations. Here, the requirements for initial mathematical model are even more stringent than for the generalized method - each node of the circuit must be connected with the element C. This restriction is not fundamental, since taking the inertial elements in consideration is, usually, desirable.

References

1. Timoshenko S.P., Iang D.Kh., Uiver U. Kolebaniia v inzhenernom dele. *Mashinostroenie = Mechanical engineering*. Moscow, 1985. 472 p.
2. Modelirovanie sistem s sosredotochennymi parametrami (bazovyi kurs). The base and the generator of educational resources. Available at: http://bigor.bmstu.ru/?met/?doc=Mod/base.cou/?cou=Mod/base.cou, accessed 18.10.2016.
3. Primenenie kompleksa PA9 dlia proektirovaniia ob"ektov mashinostroeniia. *BMSTU Center for distance education*. Available at: http://wwwcdl.bmstu.ru/Press/Press.html, accessed 18.10.2016.
4. PRADIS — programmnyi kompleks dlia analiza dinamiki sistem razlichnoi fizicheskoi prirody. *Laduga Engineering services*. Available at: http://www.laduga.ru/pradis/pradis.shtml, accessed 18.10.2016.
5. Resheniia LMS dlia modelirovaniia i provedeniia ispytanii. *Siemens PLM Software*. Available at: http://www.plm.automation.siemens.com/ru_ru/products/lms/index.shtml, accessed 18.10.2016.
6. Petrenko A.I., Vlasov A.I., Timchenko A.P. Tablichnye metody modelirovaniia elektronnykh skhem na ETsVM. *Vishcha shkola*. Kiev, 1977. 190 p.
7. Norenkov I.P., Trudonoshin V.A., Fedoruk V.G. Metod formirovaniia matematicheskikh modelei dlia adaptiruemykh programmnykh kompleksov analiza radioelektronnykh skhem. *Radiotekhnika = Radiotechnics*. 1986. № 9. P. 67-72.
8. Norenkov I.P. Osnovy avtomatizirovannogo proektirovaniia. *Bauman Moscow State Technical University*. Moscow, 2009. 430 p.