

УДК 539.3

Оценки упругих свойств матрицы композита, упрочненной углеродными нанотрубками

Зарубин В. С.^{1,*}, Сергеева Е. С.¹, Шишкина С. И.¹

*fn2@bmstu.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

На основе двойственной вариационной формулировки задачи упругости в неоднородном твердом теле, содержащей два альтернативных функционала (минимизируемый функционал Лагранжа и максимизируемый функционал Кастильяно), достигающих на истинных распределениях перемещений и напряжений в таком теле совпадающих экстремумов, построены двусторонние оценки упругих свойств полимерной матрицы композита, упрочненной хаотически ориентированными высокомодульными однослойными углеродными нанотрубками. Нанотрубки представлены в виде круговых цилиндрических оболочек, свернутых из графеновой плоскости, что позволило установить связь между упругими характеристиками графена и однослойной нанотрубки. Полученные методом самосогласования значения упругих характеристик упрочненной матрицы композита лежат в области, ограниченной двусторонними оценками. Представленные соотношения позволяют прогнозировать упругие свойства упрочненной полимерной матрицы композита в зависимости от объемной концентрации однослойных углеродных нанотрубок.

Ключевые слова: метод самосогласования; двусторонние оценки; матрица композита; однослойные углеродные нанотрубки

Введение

Матрица композиционного материала (композита) наряду с выполнением основных функций обеспечения необходимой формы изготавливаемой конструкции и механического взаимодействия между армирующими элементами [1] воспринимает также определенную долю действующей на композит внешней нагрузки. Упрочнение матрицы наноструктурными элементами позволяет сохранить ее необходимые технологические свойства (невысокая вязкость для хорошего смачивания армирующих элементов в процессе пропитки, возможность изготовления полуфабрикатов (препрегов) с последующим изготовлением из них изделий, качественное соединение слоев композита в процессе формования, невысокие значения параметров окончательного формования (температуры, давления), высокая прочность сцепления матрицы с армирующими элементами) и повысить такие ее эксплуатационные

характеристики, как прочность, жесткость, способность к образованию монолитного материала, термостойкость [2]. Например, упрочнение полимерной матрицы хаотически ориентированными высокомодульными углеродными нанотрубками, занимающими 15 % объема, может увеличить ее упругие характеристики на 80 % [3].

Количественный анализ эффекта упрочнения матрицы композита наноструктурными элементами затруднен значительным разбросом теоретических и экспериментальных данных о механических свойствах таких элементов, в том числе об упругих характеристиках углеродных нанотрубок, особенно многослойных [4]. В данной работе представлены двусторонние оценки упругих свойств полимерной матрицы, упрочненной хаотически ориентированными однослойными углеродными нанотрубками (ОУНТ), упругие характеристики которых могут быть вычислены по известным свойствам графена [5]. Эти оценки построены на основе двойственной вариационной формулировки задачи упругости в неоднородном твердом теле [6, 7], включающей два альтернативных функционала (минимизируемый функционал Лагранжа и максимизируемый функционал Кастильяно), достигающих на истинных распределениях перемещений и напряжений в таком теле совпадающих экстремумов. В области, ограниченной этими оценками, расположены значения модулей упругости упрочненной матрицы, полученные с использованием математической модели взаимодействия отдельно расположенной трансверсально изотропной ОУНТ с окружающей изотропно линейно упругой средой.

Приведенные в данной работе соотношения дают возможность прогнозировать упругие свойства полимерной матрицы композита при ее упрочнении хаотически ориентированными высокомодульными ОУНТ.

1. Исходные соотношения

Пусть упрочненная матрица представляет собой неупрочненную линейно упругую изотропную сплошную среду с объемным модулем K° упругости и модулем сдвига G° , армированную хаотически ориентированными включениями в виде анизотропных ОУНТ N различных типоразмеров. Упругие характеристики ОУНТ типоразмера $\alpha = \overline{1, N}$ с объемной концентрацией $C_V^{(\alpha)}$ описывают взаимно обратные тензоры $\mathbf{C}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{S}^{(\alpha)}$ коэффициентов упругости и податливости соответственно. Примем, что одна из главных осей этих тензоров для каждого типоразмера ОУНТ совпадает с их продольной осью, которую обозначим $O\xi_3$. Ориентация двух остальных ортогональных главных осей $O\xi_1$ и $O\xi_2$ произвольна, т.е. упругие свойства каждого типоразмера ОУНТ соответствуют частному случаю анизотропии — трансверсальной изотропии относительно оси $O\xi_3$. При объемном содержании C_V° неупрочненной матрицы справедливо равенство

$$C_V^\circ + \sum_{\alpha=1}^N C_V^{(\alpha)} = 1. \quad (1)$$

Представительный элемент структуры упрочненной матрицы включает множество ОУНТ каждого типоразмера, оси $O\xi_3$ которых равномерно распределены по всем возможным направлениям. Это означает, что такая матрица не обладает текстурой и ее допустимо считать изотропной [8].

Оцениваемые упругие свойства упрочненной матрицы представим тензорами четвертого ранга коэффициентов упругости и податливости соответственно [9]

$$\mathbf{C} = 3K\mathbf{V} + 2G\mathbf{D}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{3K}\mathbf{V} + \frac{1}{2G}\mathbf{D}, \quad (2)$$

где K — объемный модуль упругости; G — модуль сдвига; \mathbf{V} и \mathbf{D} — тензоры четвертого ранга, являющиеся соответственно объемной и девиаторной составляющими единичного тензора четвертого ранга $\mathbf{I} = \mathbf{V} + \mathbf{D}$. Компоненты этих составляющих, определенные в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$, имеют вид [8]

$$V_{ijmn} = \frac{\delta_{ij}\delta_{mn}}{3}, \quad D_{ijmn} = \frac{\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}}{2} - V_{ijmn}, \quad i, j, m, n = 1, 2, 3,$$

где δ_{ij} — компоненты единичного тензора второго ранга (символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Из этих формул и равенства $\delta_{ii} = 3$ (с учетом правила суммирования слагаемых по повторяющимся в сомножителях латинским индексам, используемого и в дальнейшем) следует $V_{ijmn}V_{mnlk} = V_{ijkl}$, $D_{ijmn}D_{mnlk} = D_{ijkl}$ и $V_{ijmn}D_{mnlk} = 0$, $k, l = 1, 2, 3$, т. е.

$$\mathbf{V} \cdot \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}, \quad \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{V} \cdot \cdot \mathbf{D} = \mathbf{O}_4, \quad (3)$$

где \mathbf{O}_4 — тензор четвертого ранга с нулевыми компонентами, а каждая из точек между сомножителями в произведении тензоров означает свертывание по индексу, одинаковому у обоих сомножителей [6]. Заданные упругие свойства неупрочненной изотропной матрицы можно представить аналогично формулам (2) тензорами четвертого ранга

$$\mathbf{C}^\circ = 3K^\circ\mathbf{V} + 2G^\circ\mathbf{D}, \quad \mathbf{S}^\circ = \frac{1}{3K^\circ}\mathbf{V} + \frac{1}{2G^\circ}\mathbf{D}. \quad (4)$$

Тензор четвертого ранга имеет два линейных инварианта, значения которых не зависят от выбора системы координат, в которой определены компоненты этого тензора. Для тензоров \mathbf{V} и \mathbf{D} , согласно формулам (3), эти инварианты имеют вид $V_{iimm} = 3$, $V_{imim} = 1$, $D_{iimm} = 0$ и $D_{imim} = 5$. Тогда инварианты тензоров \mathbf{C} и \mathbf{S} с учетом формул (2) можно представить в виде [10]

$$\mathbf{C} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{V} = C_{iimm} = 9K, \quad \mathbf{C} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{D} = C_{imim} - \frac{C_{iimm}}{3} = 10G, \quad (5)$$

$$\mathbf{S} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{V} = S_{iimm} = \frac{1}{K}, \quad \mathbf{S} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{D} = S_{imim} - \frac{S_{iimm}}{3} = \frac{5}{2G}, \quad (6)$$

где C_{ijmn} и S_{ijmn} — компоненты тензоров \mathbf{C} и \mathbf{S} соответственно, определенные в системе координат $Ox_1x_2x_3$. После замены в формулах (5) и (6) K на K° и G на G° они будут справедливы и для инвариантов тензоров \mathbf{C}° и \mathbf{S}° .

Тензору $C^{(\alpha)}$, определяющему упругие свойства трансверсально изотропных ОУНТ, принадлежащих типоразмеру с номером $\alpha = \overline{1, N}$, можно поставить в соответствие симметрическую матрицу $C^{(\alpha)}$ шестого порядка с ненулевыми элементами [6] $C_{11} = C_{22}$, $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{23} = C_{31} = C_{32}$, C_{33} , $C_{44} = C_{55}$ и $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ (верхний индекс α у элементов матриц опущен). Заменяя равенство для C_{66} на $S_{66} = 2(S_{11} - S_{12})$, а в остальных случаях символ C на S , получим элементы матрицы $S^{(\alpha)}$, соответствующей тензору $S^{(\alpha)}$. Тогда инварианты тензоров $C^{(\alpha)}$ и $S^{(\alpha)}$ примут вид [11]

$$C_{iimm}^{(\alpha)} = 2C_{11}^{(\alpha)} + 2C_{12}^{(\alpha)} + 4C_{13}^{(\alpha)} + C_{33}^{(\alpha)}, \quad C_{imim}^{(\alpha)} = 3C_{11}^{(\alpha)} - C_{12}^{(\alpha)} + C_{33}^{(\alpha)} + 4C_{44}^{(\alpha)}, \quad (7)$$

$$S_{iimm}^{(\alpha)} = 2S_{11}^{(\alpha)} + 2S_{12}^{(\alpha)} + 4S_{13}^{(\alpha)} + S_{33}^{(\alpha)}, \quad S_{imim}^{(\alpha)} = 3S_{11}^{(\alpha)} - S_{12}^{(\alpha)} + S_{33}^{(\alpha)} + S_{44}^{(\alpha)}. \quad (8)$$

Осредненные по объему V представительного элемента структуры упрочненной матрицы локальные значения $\hat{s}(M)$ и $\hat{e}(M)$ тензоров второго ранга соответственно напряжений и деформации в окрестности точки $M \in V$ имеют вид

$$\langle \hat{s} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \hat{s}(M) dV(M) \quad \text{или} \quad \langle \hat{e} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \hat{e}(M) dV(M),$$

где угловые скобки обозначают операцию осреднения. Модули упругости K и G такой матрицы, связывающие эти осредненные тензоры и называемые эффективными, определяют тензоры C и S в формулах (2). Введем эти тензоры из условия равенства объемной плотности потенциальной энергии деформации в изотропной среде и в реальной упрочненной матрице [6]:

$$\frac{1}{2} \langle \hat{e} \rangle \cdot C \cdot \langle \hat{e} \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{s} \rangle \cdot S \cdot \langle \hat{s} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V \hat{e}^*(M) \cdot \hat{s}^*(M) dV(M), \quad (9)$$

где \hat{s}^* и \hat{e}^* — тензоры напряжений и деформации, характеризующие истинное напряженно-деформированное состояние в представительном объеме структуры упрочненной матрицы, удовлетворяющее условиям равновесия и совместности деформаций. Тензоры C и S , описывающие упругие свойства этой матрицы, подлежат оценке на основе того или иного подхода.

2. Вариационный подход

При отсутствии объемных сил и задании кинематических граничных условий на поверхности S , ограничивающей объем V , функционал Лагранжа, достигающий минимума на истинном распределении перемещений в замкнутой области $\bar{V} = V \cup S$, имеет вид [6]

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_V \hat{e}(M) \cdot C^*(M) \cdot \hat{e}(M) dV(M), \quad M \in V, \quad (10)$$

где C^* — тензор, соответствующий локальным значениям коэффициентов упругости неупрочненной матрицы и ОУНТ в объеме V . Этот функционал допустимо рассматривать на

непрерывных и кусочно дифференцируемых по пространственным координатам распределения перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Тогда при допустимом однородном деформированном состоянии, определяемом тензором $\hat{\mathbf{e}}_0 = \langle \hat{\mathbf{e}} \rangle$ с компонентами $\varepsilon_{ij} = \text{const}$, с учетом формул (9) и (10) и равенства $\hat{\mathbf{s}}^* = \mathbf{C}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}^*$, опустив обозначение точки $M \in V$, можно записать

$$\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \mathbf{C}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_0 dV \geq \frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{e}}^* \cdot \mathbf{C}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}^* dV = \frac{V}{2} \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{e}} \rangle = \frac{V}{2} \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{e}}_0.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{V} \int_V \mathbf{C}^*(M) dV(M) \geq \mathbf{C}, \quad M \in V,$$

которое после полной свертки с тензорами \mathbf{V} и \mathbf{D} с учетом формул (5) будет эквивалентно двум неравенствам, содержащим линейные инварианты тензоров \mathbf{C}^* и \mathbf{C} :

$$\frac{1}{V} \int_V C_{iimm}^*(M) dV(M) \geq 9K, \quad \frac{1}{V} \int_V \left(C_{imim}^*(M) - \frac{C_{iimm}^*(M)}{3} \right) dV(M) \geq 10G,$$

где $C_{ijmn}^*(M)$ — компоненты тензора \mathbf{C}^* , определенные в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Подынтегральные функции в этих неравенствах кусочно постоянны в пределах неупрочненной матрицы и отдельно взятых ОУНТ, что позволяет представить верхние оценки K_+ и G_+ соответствующих модулей упругости композита в виде

$$\tilde{K}_+ = C_V^o + \frac{1}{9K^o} \sum_{\alpha=1}^N C_V^{(\alpha)} C_{iimm}^{(\alpha)}, \quad \tilde{G}_+ = C_V^o + \frac{1}{10G^o} \sum_{\alpha=1}^N C_V^{(\alpha)} \left(C_{imim}^{(\alpha)} - \frac{C_{iimm}^{(\alpha)}}{3} \right), \quad (11)$$

где $\tilde{K}_+ = K_+/K^o$, $\tilde{G}_+ = G_+/G^o$, $C_{ijmn}^{(\alpha)}$ — компоненты тензора $\mathbf{C}^{(\alpha)}$.

При отсутствии объемных сил и задании силовых граничных условий на поверхности, ограничивающей объем V , функционал Кастилиано, максимизируемый на истинном распределении напряжений в замкнутой области \bar{V} , имеет вид [6]

$$J_2 = -\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{s}}(M) \cdot \mathbf{S}^*(M) \cdot \hat{\mathbf{s}}(M) dV(M), \quad M \in V, \quad (12)$$

где \mathbf{S}^* — тензор, соответствующий локальным значениям коэффициентов податливости неупрочненной матрицы и ОУНТ в объеме V . Этот функционал допустимо рассматривать на статически возможных распределениях напряжений. При допустимом однородном напряженном состоянии, определяемом тензором $\hat{\mathbf{s}}_0 = \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle$ с компонентами $\sigma_{ij} = \text{const}$, с учетом формул (9) и (12) и равенства $\hat{\mathbf{e}}^* = \mathbf{S}^* \cdot \hat{\mathbf{s}}^*$, опустив обозначение точки $M \in V$, получим соотношение

$$-\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{S}^* \cdot \hat{\mathbf{s}}_0 dV \leq -\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{s}}^* \cdot \mathbf{S}^* \cdot \hat{\mathbf{s}}^* dV = -\frac{V}{2} \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{e}} \rangle = -\frac{V}{2} \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{V} \int_V \mathbf{S}^*(M) dV(M) \geq \mathbf{S}, \quad M \in V,$$

которое после полной свертки с тензорами \mathbf{V} и \mathbf{D} с учетом формул (6) будет эквивалентно двум неравенствам, включающим линейные инварианты тензоров \mathbf{S}^* и \mathbf{S} :

$$\frac{1}{V} \int_V S_{iimm}^*(M) dV(M) \geq \frac{1}{K}, \quad \frac{1}{V} \int_V \left(S_{imim}^*(M) - \frac{S_{iimm}^*(M)}{3} \right) dV(M) \geq \frac{5}{2G},$$

где $S_{ijmn}^*(M)$ — компоненты тензора \mathbf{S}^* , определенные в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Подынтегральные функции в этих неравенствах кусочно постоянны в пределах отдельно взятых ОУНТ и в материале неупрочненной матрицы, что дает возможность представить нижние оценки K_- и G_- соответствующих модулей упругости композита в виде

$$\tilde{K}_- = \left(C_V^\circ + K^\circ \sum_{\alpha=1}^N C_V^{(\alpha)} S_{iimm}^{(\alpha)} \right)^{-1}, \quad \tilde{G}_- = \left(C_V^\circ + \frac{2G^\circ}{5} \sum_{\alpha=1}^N C_V^{(\alpha)} \left(S_{imim}^{(\alpha)} - \frac{S_{iimm}^{(\alpha)}}{3} \right) \right)^{-1}, \quad (13)$$

где $\tilde{K}_- = K_-/K^\circ$, $\tilde{G}_- = G_-/G^\circ$, $S_{ijmn}^{(\alpha)}$ — компоненты тензора $\mathbf{S}^{(\alpha)}$. При вычислении инвариантов тензоров в формулах (11) и (13) следует использовать соотношения (5)–(8).

Оценки (11) и (13) можно также получить с привлечением теории смесей [12], однако из этой теории не следует, что эти оценки будут двусторонними по отношению к истинным значениям. При существенном различии упругих характеристик материала неупрочненной матрицы и ОУНТ представленные двусторонние оценки могут привести к значительному разбросу значений, соответствующих верхней и нижней границам. Один из подходов, дающий возможность уточнить упругие свойства рассматриваемой упрочненной матрицы композита, основан на методе самосогласования [8, 9, 13].

3. Метод самосогласования

Оценка упругих свойств упрочненной матрицы как неоднородной линейно упругой среды методом самосогласования состоит в учете взаимодействия отдельно взятого элемента неоднородности (ОУНТ или частицы материала неупрочненной матрицы) с однородной изотропной окружающей средой, имеющей искомые модули упругости [14, 15]. Это позволяет найти отклонения в распределениях деформаций и напряжений в этих элементах относительно однородных распределений в окружающей среде. Последующее осреднение этих отклонений по представительному элементу структуры упрочненной матрицы приводит к расчетным зависимостям для искомым упругих свойств упрочненной матрицы.

В силу неопределенности формы частиц материала неупрочненной матрицы, связывающей ОУНТ при их хаотическом расположении, примем в качестве средней статистической эту форму шаровой. Взаимодействие линейно упругой изотропной шаровой частицы и окружающей среды описывает соотношение [9]

$$\hat{\mathbf{e}}^\circ = \hat{\mathbf{u}}^\circ \cdot \hat{\mathbf{e}}_0, \quad \hat{\mathbf{u}}^\circ = (\mathbf{C}^\circ - \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{I}, \quad (14)$$

где $\hat{\mathbf{e}}^\circ$ — тензор, характеризующий отклонения деформации в шаровой частице от однородного деформированного состояния окружающей среды, определяемого тензором $\hat{\mathbf{e}}_0$,

$$\mathbf{W} = 3 \frac{1-\nu}{1+\nu} \mathbf{V} + \frac{15}{2} \frac{1-\nu}{4-5\nu} \mathbf{D}, \quad (15)$$

а $\nu = \frac{1}{2} - \frac{3G}{6K+2G}$ — коэффициент Пуассона среды, окружающей шаровую частицу.

Для трансверсально изотропной ОУНТ типоразмера $\alpha = \overline{1, N}$, свойства которой описывает тензор $\mathbf{C}^{(\alpha)}$ коэффициентов упругости, по аналогии с формулами (14) запишем

$$\hat{\mathbf{e}}^{(\alpha)} = \hat{\mathbf{u}}^{(\alpha)} \cdot \hat{\mathbf{e}}_0, \quad \hat{\mathbf{u}}^{(\alpha)} = (\mathbf{C}^{(\alpha)} - \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}^{(\alpha)})^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}^{(\alpha)} - \mathbf{I}, \quad (16)$$

где $\hat{\mathbf{e}}^{(\alpha)}$ — тензор, определяющий отклонение деформации в этой ОУНТ от однородного деформированного состояния окружающей среды, $\mathbf{W}^{(\alpha)}$ — тензор четвертого ранга, компоненты которого зависят от искомым характеристик упрочненной матрицы и от формы ОУНТ, принадлежащей типоразмеру с номером $\alpha = \overline{1, N}$.

Если форму ОУНТ длиной l_α и диаметром d_α приближенно представить эллипсоидом вращения с отношением полуосей $b_\alpha = \frac{l_\alpha}{d_\alpha}$, то тензор $\mathbf{W}^{(\alpha)}$ будет обратным по отношению к тензору Эшелби [14] с компонентами, определенными в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Тензору $\mathbf{W}^{(\alpha)}$ соответствует несимметрическая матрица $W^{(\alpha)}$ шестого порядка с элементами (индекс α опущен)

$$\begin{aligned} W_{11} = W_{22} &= \frac{N_{11}N_{33} - N_{13}N_{31}}{\Delta_0}, & W_{12} = W_{21} &= \frac{N_{13}N_{31} - N_{12}N_{33}}{\Delta_0}, \\ W_{13} = W_{23} &= \frac{(N_{12} - N_{11})N_{13}}{\Delta_0}, & W_{31} = W_{32} &= \frac{(N_{12} - N_{11})N_{31}}{\Delta_0}, \\ W_{33} &= \frac{(N_{11} + N_{12})(N_{11} - N_{12})}{\Delta_0}, \\ W_{44} = W_{55} &= \frac{2}{Q(1 + b_\alpha^2)D_{13} + R(1 - D_1)}, & W_{66} &= \frac{3}{QD_{11} + 3RD_1}, \end{aligned}$$

где $\Delta_0 = \det(N_0) = (N_{11} - N_{12})(N_{11}N_{33} - 2N_{13}N_{31} + N_{12}N_{33})$ — определитель матрицы N_0 третьего порядка с элементами

$$\begin{aligned} N_{11}^{(\alpha)} = N_{22}^{(\alpha)} &= QD_{11}^{(\alpha)} + RD_1^{(\alpha)}, & N_{12}^{(\alpha)} = N_{21}^{(\alpha)} &= \frac{QD_{11}^{(\alpha)}}{3} - RD_1^{(\alpha)}, & N_{33}^{(\alpha)} &= QD_{33}^{(\alpha)} + RD_3^{(\alpha)}, \\ N_{13}^{(\alpha)} = N_{23}^{(\alpha)} &= QD_{31}^{(\alpha)} - RD_1^{(\alpha)}, & N_{31}^{(\alpha)} = N_{32}^{(\alpha)} &= QD_{13}^{(\alpha)} - RD_3^{(\alpha)}, \\ Q &= \frac{3}{2(1-\nu)}, & R &= \frac{1/2 - \nu}{1-\nu} \end{aligned}$$

и зависящие от типоразмера ОУНТ геометрические параметры

$$\begin{aligned} D_1^{(\alpha)} &= \frac{b_\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^2(b_\alpha^2+u)^{1/2}} = \frac{b_\alpha(b_\alpha\sqrt{b_\alpha^2-1} - \text{Arcch } b_\alpha)}{2\sqrt{(b_\alpha^2-1)^3}}, & D_3^{(\alpha)} &= 1/ - 2D_1^{(\alpha)}, \\ 3D_{13}^{(\alpha)} &= \frac{D_1^{(\alpha)} - D_3^{(\alpha)}}{b_\alpha^2 - 1}, & D_{31}^{(\alpha)} &= D_{13}^{(\alpha)}b_\alpha^2, & 4D_{11}^{(\alpha)} &= 1 - 3D_{13}^{(\alpha)}, & D_{33}^{(\alpha)} &= \frac{1}{3} - 2D_{13}^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Остальные элементы матрицы $W^{(\alpha)}$ равны нулю.

Осреднение по объему композита возмущений деформации по всем частицам материала неупрочненной матрицы и ОУНТ всех типоразмеров должно, согласно методу самосогласования, привести к нулевому результату, т. е.

$$\langle \hat{\mathbf{e}}^\circ \rangle C_V^\circ + \sum_{\alpha=1}^N \langle \hat{\mathbf{e}}^{(\alpha)} \rangle C_V^{(\alpha)} = \mathbf{O}_2,$$

где \mathbf{O}_2 — тензор второго ранга с нулевыми компонентами. Все тензоры второго ранга, входящие в левые части этого равенства и определенные первыми формулами (14) и (16), имеют один и тот же множитель $\hat{\mathbf{e}}_0$, характеризующий макроскопически однородное деформированное состояние представительного объема структуры упрочненной матрицы. Поэтому при осреднении этот множитель можно опустить и перейти к осреднению тензоров четвертого ранга, определенных вторыми формулами (14) и (16), т. е.

$$\langle \hat{\mathbf{u}}^\circ \rangle C_V^\circ + \sum_{\alpha=1}^N \langle \hat{\mathbf{u}}^{(\alpha)} \rangle C_V^{(\alpha)} = \mathbf{O}_4. \quad (17)$$

Во вторую формулу (14) входит внутреннее произведение изотропных тензоров \mathbf{C} и \mathbf{W} . С учетом равенств (2), (3) и (15) получим

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{W}^\circ = 9K \frac{1-\nu}{1+\nu} \mathbf{V} + 15G \frac{1-\nu}{4-5\nu} \mathbf{D}.$$

Тогда, продолжив преобразования, вместо второй формулы (14) с учетом зависимости ν от K и G запишем

$$\hat{\mathbf{u}}^\circ = \left(\frac{3K+4G}{3K^\circ+4G} - 1 \right) \mathbf{V} + \left(\frac{5G(3K+4G)}{6G^\circ(K+2G)+G(9K+8G)} - 1 \right) \mathbf{D}.$$

Для вычисления внутреннего произведения тензоров \mathbf{C} и $\mathbf{W}^{(\alpha)}$ во второй формуле (15) используем соответствующие им матрицы C и $W^{(\alpha)}$ и в итоге получим матрицу $Z^{(\alpha)} = CW^{(\alpha)}$ с элементами (без верхнего индекса α у элементов матриц $Z^{(\alpha)}$ и $W^{(\alpha)}$)

$$Z_{11} = Z_{22} = C_{11}W_{11} + C_{12}(W_{12} + W_{31}), \quad Z_{12} = Z_{21} = C_{11}W_{12} + C_{12}(W_{11} + W_{31}),$$

$$Z_{13} = Z_{23} = C_{11}W_{13} + C_{12}(W_{13} + W_{33}), \quad Z_{31} = Z_{32} = C_{11}W_{31} + C_{12}(W_{11} + W_{12}),$$

$$Z_{33} = C_{11}W_{33} + 2C_{12}W_{13}, \quad Z_{44} = Z_{55} = C_{44}W_{44}, \quad Z_{66} = C_{44}W_{66},$$

где для изотропной упрочненной матрицы $C_{11} = K + 4G/3$, $C_{12} = K - 2G/3$ и $C_{44} = (C_{11} - C_{12})/2 = G$ [19]. Тогда тензору $\mathbf{C}^{(\alpha)} - \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}^{(\alpha)}$ будет соответствовать блочная матрица $Y^{(\alpha)}$ с элементами

$$Y_{11}^{(\alpha)} = Y_{22}^{(\alpha)} = C_{11}^{(\alpha)} - C_{11} + Z_{11}^{(\alpha)}, \quad Y_{12}^{(\alpha)} = Y_{21}^{(\alpha)} = C_{12}^{(\alpha)} - C_{12} + Z_{12}^{(\alpha)},$$

$$Y_{13}^{(\alpha)} = Y_{23}^{(\alpha)} = C_{13}^{(\alpha)} - C_{12} + Z_{13}^{(\alpha)}, \quad Y_{31}^{(\alpha)} = Y_{32}^{(\alpha)} = C_{13}^{(\alpha)} - C_{12} + Z_{31}^{(\alpha)},$$

$$Y_{33}^{(\alpha)} = C_{33}^{(\alpha)} - C_{11} + Z_{33}^{(\alpha)}, \quad Y_{44}^{(\alpha)} = Y_{55}^{(\alpha)} = C_{44}^{(\alpha)} - C_{44} + Z_{44}^{(\alpha)}, \quad Y_{66}^{(\alpha)} = C_{66}^{(\alpha)} - C_{66} + Z_{66}^{(\alpha)}.$$

После обращения матрицы $Y^{(\alpha)}$ получим также блочную матрицу шестого порядка $Q^{(\alpha)}$. Теперь вместо равенства (17) можно записать соответствующее ему матричное соотношение

$$\langle U^o \rangle C_V^o + \sum_{\alpha=1}^N \langle U^{(\alpha)} \rangle C_V^{(\alpha)} = O_6, \quad (18)$$

где $U^{(\alpha)} = Q^{(\alpha)} Z^{(\alpha)} - I_6$, O_6 и I_6 — нулевая и единичная матрицы шестого порядка.

Операции осреднения матриц в равенстве (18) удобно провести путем вычисления определяемых формулами вида (7) инвариантов соответствующих им тензоров. В итоге получим два нелинейных алгебраических уравнения, содержащих в качестве неизвестных объемный модуль K и модуль сдвига G упрочненной матрицы. Одним из способов решения системы этих уравнений является переход к задаче безусловной минимизации [16, 17] целевой функции в виде суммы квадратов левых частей уравнений.

4. Результаты расчетов

Сначала рассмотрим влияние удлинения ОУНТ, определяемого для типоразмера $\alpha = \overline{1, N}$ отношением $b_\alpha = l_\alpha/d_\alpha$, от которого зависят значения геометрических параметров, обозначенных литерой D с цифровыми нижними индексами. На рис. 1 в полулогарифмических координатах представлены зависимости этих параметров (без верхнего индекса α) от b_α . Из этого рисунка следует, что при $b_\alpha \geq 50$ указанные геометрические параметры можно считать постоянными, причем принять

$$D_3 = D_{13} = 0, \quad D_{31} = \frac{1}{6}, \quad D_{11} = \frac{1}{4}, \quad D_{33} = \frac{1}{3}, \quad D_1 = \frac{1}{2}.$$

Диаметр ОУНТ изменяется от 0,3 до 5 нм, а длина превышает диаметр примерно на три порядка [18]. Таким образом, при последующей количественной оценке упругих свойств матрицы, упрочненной ОУНТ, можно принять приведенные выше постоянные значения геометрических параметров. Для определения упругих характеристик ОУНТ использованы

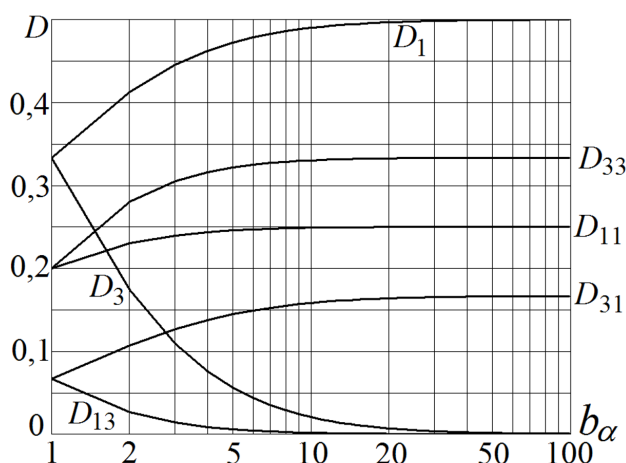


Рис. 1. Зависимости геометрических параметров от удлинения ОУНТ

значения продольного модуля упругости графена $E = 1,2$ ТПа и коэффициента Пуассона $\nu = 0,412$ [19].

В качестве материала неупрочненной полимерной матрицы композита выбрано связующее на основе эпоксидной смолы с продольным модулем упругости $E^\circ = 3,50$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu^\circ = 0,36$ [20]. Этим значениям соответствуют объемный модуль упругости $K^\circ = 4,10$ ГПа и модуль сдвига $G^\circ = 1,23$ ГПа.

Рассмотрены три типоразмера ОУНТ ($\alpha = 1, 2, 3$) конфигурации Zigzag [21] с индексами хиральности $(10, 0)$, $(20, 0)$ и $(30, 0)$, которым соответствуют диаметры трубок $d_1 = 0,783$ нм, $d_1 = 1,566$ нм и $d_1 = 2,349$ нм, рассчитанные для принятой конфигурации ОУНТ по формуле [22] $d_\alpha = (\sqrt{3}/\pi)d_0m$, где $d_0 = 0,142$ нм, а m — значение первого индекса хиральности. Для каждого типоразмера ОУНТ по соотношениям, приведенным в работе [5], определены значения элементов матриц упругости (в ТПа) и податливости (в 1/ТПа), представленные соответственно в табл. 1 и 2.

Т а б л и ц а 1

α	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
1	0,129	-0,0010	0,053	0,235	0,034	0,065
2	0,066	-0,0029	0,026	0,121	0,018	0,035
3	0,045	-0,0025	0,017	0,082	0,012	0,024

Т а б л и ц а 2

α	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{33}	S_{44}	S_{66}
1	8,645	0,950	-2,152	5,223	29,499	15,390
2	16,819	2,370	-4,126	10,015	56,567	28,898
3	24,999	3,783	-6,102	14,811	83,652	42,432

Следует отметить, что для всех рассмотренных типоразмеров ОУНТ имеет место по сравнению с монолитными трансверсально изотропными кристаллическими материалами [6] изменение знаков элементов C_{12} и S_{12} матриц упругости и податливости соответственно.

На рис. 2, 3 и 4 в полулогарифмических координатах представлены зависимости объемного модуля упругости и модуля сдвига упрочненной матрицы от объемной концентрации $C_{\text{OУНТ}}^\alpha$ ОУНТ каждого из трех рассматриваемых типоразмеров. На каждом из этих рисунков кривые с темными точками определяют гарантированные верхнюю и нижнюю границы области, в которой должны быть расположены значения объемного модуля упругости K упрочненной матрицы, а кривые с темными квадратами ограничивают область расположения значений модуля сдвига G такой матрицы. Кривые без символов построены по результатам расчетов, проведенных методом самосогласования. Видно, что во всех случаях эти результаты не выходят за пределы указанных областей.

Согласно работе [3], упрочнение полимерной матрицы углеродными нанотрубками не ухудшает ее технологические свойства по крайней мере до значения суммарной объемной

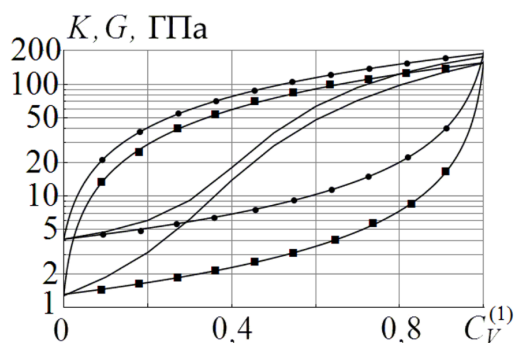


Рис. 2. Зависимости объемного модуля упругости и модуля сдвига упрочненной матрицы от объемной концентрации ОУНТ типоразмера $\alpha = 1$

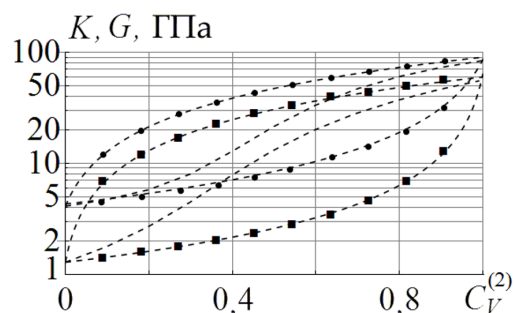


Рис. 3. Зависимости объемного модуля упругости и модуля сдвига упрочненной матрицы от объемной концентрации ОУНТ типоразмера $\alpha = 2$

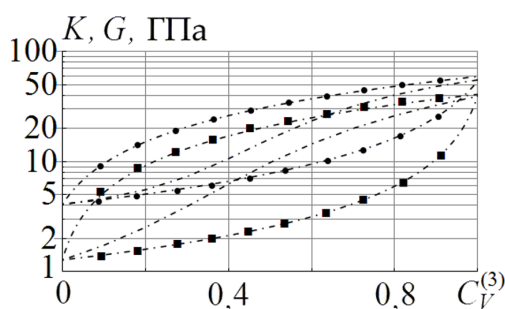


Рис. 4. Зависимости объемного модуля упругости и модуля сдвига упрочненной матрицы от объемной концентрации ОУНТ типоразмера $\alpha = 3$

концентрации C_V нанотрубок, не превышающей 0,15. В табл. 3 для различных значений C_V приведены значения модуля объемной упругости K и модуля сдвига G , рассчитанные по методу самосогласования при условии, что упрочнение проведено смесью в равных долях трех рассмотренных типоразмеров ОУНТ.

Т а б л и ц а 3

C_V	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
K , ГПа	4,10	4,27	4,56	5,00	5,64	6,56
G , ГПа	1,23	1,50	1,78	2,16	2,68	3,41

Из результатов расчетов упругих характеристик полимерной матрицы, упрочненной ОУНТ, проведенных методом самосогласования как для отдельных типоразмеров ОУНТ, так и для смеси этих типоразмеров, следует, что с увеличением объемной концентрации ОУНТ модуль сдвига упрочненной матрицы возрастает более интенсивно по сравнению с ее объемным модулем упругости. Поскольку именно от величины модуля сдвига матрицы зависит выполнение ее важной функции обеспечения эффективного механического взаимодействия между армирующими элементами композита, можно ожидать увеличения и механических характеристики композитов с полимерными матрицами, упрочненными ОУНТ.

Заключение

Полученные двусторонние оценки упругих свойств полимерной матрицы композита, упрочненной хаотически ориентированными трансверсально изотропными однослойными углеродными нанотрубками, дают возможность установить границы ожидаемых значений модулей упругости такой матрицы. Установлено, что влияние реальных значений удлинения нанотрубок на упругие характеристики упрочненных матриц несущественно. Результаты расчетов упругих свойств упрочненной матрицы методом самосогласования выявили более интенсивное увеличение ее модуля сдвига по сравнению с объемным модулем упругости по мере возрастания объемной концентрации упрочняющих высокомодульных нанотрубок как их отдельных типоразмеров, так и смеси различных типоразмеров.

Работа выполнена в рамках проекта 1712 государственного задания № 2014/104 Минобрнауки РФ.

Список литературы

1. Комков М.А., Тарасов В.А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 431 с.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
3. Степанищев Н.А., Тарасов В.А. Упрочнение полиэфирной матрицы углеродными нанотрубками // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2010. Спец. вып. С. 53–66.
4. Белов Ю.С., Вершинин Е.В., Говоров Д.С., Логинов Б.М., Пономарев А.В. Исследование механических характеристик многослойных углеродных нанотрубок // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 2. С. 11–44. DOI: [10.7463/0213.0533309](https://doi.org/10.7463/0213.0533309)
5. Зарубин В.С., Сергеева Е.С. Исследование связи упругих характеристик однослойной углеродной нанотрубки и графена // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1(64). С. 100–110. DOI: [10.18698/1812-3368-2016-1-100-110](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-1-100-110)
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
7. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Пугачев О.В. Двусторонние оценки термоупругих характеристик композита с дисперсными включениями // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 9. С. 318–335. DOI: [10.7463/0915.0811479](https://doi.org/10.7463/0915.0811479)
8. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Изотропные шаровые включения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2014. № 5. С. 53–69.

10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка температурного коэффициента линейного расширения композита с дисперсными анизотропными включениями методом самосогласования // *Механика композитных материалов*. 2016. Т. 52, № 2. С. 209–224.
11. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
12. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2009. № 3. С. 36–49.
13. Hill R.A self-consistent mechanics of composite materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1965. Vol. 13, iss. 4. P. 213–222. DOI: [10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4)
14. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций: пер. с англ. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 248 с.
15. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Анизотропные шаровые включения // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2014. № 6. С. 20–31.
16. Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. Введение в методы оптимизации. М.: Финансы и статистика; НИЦ ИНФРА-М, 2008. 272 с.
17. Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. Методы оптимизации. М.: ИЦ РИОР, 2012. 270 с.
18. Мищенко С.В., Ткачев А.Г. Углеродные наноматериалы. Производство, свойства, применение. М.: Машиностроение, 2008. 320 с.
19. Erdemir A., Martin J.-M. Superlubricity. Amsterdam: Elsevier, 2007. 524 p.
20. Николаев А.Ф., Крыжановский В.К., Бурлов В.В., Крыжановская Ю.В. Технология полимерных материалов / под ред. В.К. Крыжановского. СПб.: Профессия, 2008. 544 с.
21. Prabhu S., Bhaumik S., Vinaygam B.K. Finite element modeling and analysis of zigzag and armchair type single wall carbon nanotube // *Journal of Mechanical Engineering Research*. 2012. Vol. 4, no. 8, P. 260–266. DOI: [10.5897/JMER12.025](https://doi.org/10.5897/JMER12.025)
22. Елецкий А.В. Углеродные нанотрубки и их эмиссионные свойства // *Успехи физических наук*. 2002. Т. 172, № 4. С. 401–438. DOI: [10.3367/UFNr.0172.200204b.0401](https://doi.org/10.3367/UFNr.0172.200204b.0401)

Estimating the Elastic Properties of the Carbon Nanotube-Reinforced Composite Matrix

Zarubin V. S.^{1,*}, Sergeeva E. S.¹, Shishkina S. I.¹

*fn2@bmstu.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: method of self-consistency, two-sided estimates, composite matrix, single-walled carbon nanotubes

The matrix of the composite material (composite), in addition to the performing basic functions to provide a desirable form of the manufacturable structure and a mechanical interaction between the reinforcing elements, bears a certain share of the external load that acts on the composite. The nanostructure element-hardened matrix allows us to save its appropriate technological properties (low viscosity for good wetting of the reinforcing elements in the process of impregnation, a capability to manufacture semi-finished products (prepregs), which are further used to make products, a quality interconnection of the composite layers in molding process, low values of final molding parameters (temperature, pressure), and high adhesive strength of matrix with reinforcing elements) and improve its performance characteristics such as strength, rigidity, capability to form a solid material, and heat resistance. For example, hardening the polymer matrix through randomly oriented high-modulus carbon nanotubes, occupying 15% of the volume, may increase its elastic characteristics by 80%.

It is difficult to analyse quantitatively an effect of the hardening composite matrix based on nanostructure elements because of the considerable spread of the theoretical and experimental data on the mechanical properties of such elements, including data on the elastic characteristics of the carbon nanotubes, especially multilayered ones. The paper presents two-sided estimates of the elastic properties of the polymer matrix reinforced with randomly oriented single-walled carbon nanotubes (SWCNTs) the elastic characteristics of which can be calculated from the known properties of graphene. These estimates are based on the dual variational formulation of the elasticity problem in a heterogeneous solid, consisting of two alternative functionals (a Lagrangian functional to be minimized and a Castigliano functional to be maximized), which reach the matching extremes at true distributions of displacements and stresses in such a body. In the area restricted by these estimates there are the values of the elastic moduli of a hardened matrix obtained through

the mathematical model of interaction between the separately disposed and transversely isotropic SWCNTs and the surrounding isotropic linearly elastic medium.

Given in the paper ratio ratings make it possible to predict the elastic properties of the polymer matrix of the composite in its hardening by the randomly oriented high-modulus SWCNTs.

References

1. Komkov M.A., Tarasov V.A. *Tekhnologia namotki kompozitnykh konstruksii raket i sredstv porajenia* [Technology of winding of composite constructions of rockets and defeat facilities]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 432 p. (in Russian).
2. Vasilyev V.V. *Mekhanika konstruksii iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 272 p. (in Russian).
3. Stepanishev N.A., Tarasov V.A. Hardening of Polyester Matrix of Carbon Nanotubes. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Instrument Engineering*, 2010, spec. iss., pp. 53–66. (in Russian).
4. Belov Yu.S., Vershinin E.V., Govorov D.S., Loginov B.M., Ponomarev A.V. Investigation of mechanical properties of multilayer carbon nanotubes. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 2, pp. 11–44. DOI: [10.7463/0213.0533309](https://doi.org/10.7463/0213.0533309) (in Russian).
5. Zarubin V.S., Sergeeva E.S. Investigation of the relationship between elastic properties of a single-walled carbon nanotubes and graphene. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2016, no. 1(64), pp. 100–110. DOI: [10.18698/1812-3368-2016-1-100-110](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-1-100-110) (in Russian).
6. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi Sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p. (in Russian).
7. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Pugachev O.V. Two-Sided Estimates of Thermo-elastic Characteristics of Dispersed Inclusion Composites. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2015, no.9, pp. 318–335. DOI: [10.7463/0915.0811479](https://doi.org/10.7463/0915.0811479) (in Russian).
8. Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microinhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p. (in Russian).
9. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Comparative Analysis Estimates of Elastic Moduli for Composite. Isotropic Spherical Inclusions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering*, 2014, no. 5, pp. 53–69. (in Russian).

10. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Saveleva I.Yu. Evaluation of the Linear Thermal Expansion Coefficient of a Composite with Disperse Anisotropic Inclusions by the Self-Consistency Method. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 209–224. (English version of journal: *Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 143–154. DOI: [10.1007/s11029-016-9567-2](https://doi.org/10.1007/s11029-016-9567-2)).
11. Zarubin V.S., Stankevich I.V. *Raschet teplotnoprizhennykh konstruksii* [Calculation of heat-stressed designs]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 352 p. (in Russian).
12. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mixture Models of Composite Mechanics. P. 1. Thermal Mechanics and Thermoelasticity of Multicomponent Mixture. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2009, no. 3, pp. 36–49. (in Russian).
13. Hill R.A. self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1965, vol. 13, iss. 4, pp. 213–222. DOI: [10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4)
14. Eshelby J.D. The continuum theory of lattice defects. In: Seitz F., Turnbull D., eds. *Progress in Solid State Physics. Vol. 3*. New York, Academic Press, 1956, pp. 79–144. (Russ. ed.: Eshelby J.D. *Kontinual'naiia teoriia dislokatsii*. Moscow, Inostrannaia literatura Publ., 1963, 248 p.).
15. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelieva I.Yu. Comparative Analysis Modulus Elasticity Estimates for Composite Anisotropic Spherical Inclusions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering*, 2014, no. 6, pp. 20–31. (in Russian).
16. Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. *Vvedenie v metody optimizatsii* [Introduction to Optimization Methods]. Moscow, Finance and Statistics Publ.; SIC INFRA-M Publ., 2008. 272 p. (in Russian).
17. Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, IC RIOR Publ., 2012. 270 p. (in Russian).
18. Mishchenko S.V., Tkachev A.G. *Uglitrodnye nanovaterialy. Proizvodstvo, svoistva, primeneniye* [Carbon nanomaterials. Production, Properties, Applications]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2008. 320 p. (in Russian).
19. Erdemir A., Martin J.-M. *Superlubricity*. Amsterdam, Elsevier, 2007. 524 p.
20. Nicolaev A.F., Kryzhanovskii V.K., Burlov V.V., Kryzhanovskaya Yu.V. *Tekhnologiyi polimernykh materialov* [Technology of the Polymeric Materials]. St. Petersburg, Professiy Publ., 2008. 544 p. (in Russian).
21. Prabhu S., Bhaumik S., Vinayagam B.K. Finite element modeling and analysis of zigzag and armchair type single wall carbon nanotube. *Journal of Mechanical Engineering Research*, 2012, vol. 4, no. 8, pp. 260–266. DOI: [10.5897/JMER12.025](https://doi.org/10.5897/JMER12.025)
22. Eletskaia A.V. Carbon nanotubes and their emission properties. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2002, vol. 172, no. 4, pp. 401–438. DOI: [10.3367/UFNr.0172.200204b.0401](https://doi.org/10.3367/UFNr.0172.200204b.0401) (English version of journal: *Physics-Uspekhi*, 2002, vol. 454, no. 4, pp. 369–402. DOI: [10.1070/PU2002v045n04ABEH001033](https://doi.org/10.1070/PU2002v045n04ABEH001033)).