

УДК 004.3+519.6

## О допущениях при разработке математической модели термогравитационной конвекции в технологических баках большого объема с учетом брожения

Шкапов П. М.<sup>1,\*</sup>, Артюшкин А. Ю.<sup>2</sup>

[\\*spm@bmstu.ru](mailto:spm@bmstu.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский Государственный Университет  
Пищевых Производств, Москва, Россия

---

Рассмотрена конвекция жидкости в вертикальном цилиндрическом баке под действием силы тяжести при охлаждении в верхнем сечении с учетом дрожжевого брожения. При математическом моделировании объем емкости делится на три зоны, для каждой из которых получены упрощенные модельные уравнения. В предложенной упрощенной модели используется ряд допущений: приближение Буссинеска, цилиндрическое течение Пуазейля и др. Модель включает уравнение теплопередачи через охлаждающую стенку, что позволяет задать закон изменения температуры хладагента и проанализировать характер протекания процесса. Основное применение модели – использование в качестве уравнений-связей при решении задач оптимизации.

**Ключевые слова:** математическая модель, конвекция, технологические баки, приближение Буссинеска

---

### Введение

Фундаментальные работы в области механики жидкости дают достаточно полное представление о поведении жидкости в условиях естественной термогравитационной конвекции. В них описание движения жидкости основано на известных уравнениях Навье-Стокса, дополненных уравнениями переноса тепла и непрерывности [1]. В некоторых конкретных случаях, математическая модель должна учитывать дополнительные факторы сопутствующие технологическому процессу в виде выделения тепла в различных биохимических реакторах, явление барботажа, стратификацию криогенной жидкости и т.п. [2-4]. Принимая во внимание распространенность явления термогравитационной конвекции в промышленных технологических аппаратах, получение приемлемой математической модели процесса, на основании которой возможно проведение имитационного моделирования, является актуальной задачей. Подтверждением этому служит ряд современных работ, посвященных моделированию конвекции в аппаратах

различной геометрической формы (например, [5]). Отдельно стоит отметить актуальность получения математической модели поведения жидкости в технологических баках большого объема, которые распространены в химических производствах, нефтегазовом комплексе, а также в пищевой промышленности, например, при производстве напитков брожения. В последнем случае существенной новой качественной особенностью является выделение тепла в процессе жизнедеятельности дрожжей, а также необходимость поддержания устойчивого ламинарного термогравитационного движения жидкости внутри бака, продиктованные требованиями технологического процесса [6].

Представленная в работе модель термогравитационной конвекции учитывает процесс брожения в цилиндро-коническом танке (ЦКТ), связанный с необходимостью охлаждения технологической среды через кольцевую рубашку, расположенную в верхней части аппарата. Математическая модель поддается численному расчету с помощью метода конечных элементов (МКЭ) и может выступать в качестве имитационной модели при решении задач оптимизации [7-10]. Проведем обоснование упрощения решаемой задачи с учетом в модели главных особенностей процесса для достижения возможности применения ее в численных алгоритмах автоматизации управления технологическими процессами реальных производств с применением типовых вычислительных машин системы автоматизации [11].

### **Выделение характерных зон конвективного течения в ЦКТ**

При производстве напитков с использованием дрожжевых культур, пива или кваса, в промышленных масштабах, процессы брожения и дображивания проводят в вертикальных цилиндро-конических танках. Каждый ЦКТ снабжен несколькими кольцевыми рубашками охлаждения. На цилиндрической части танка, в зависимости от соотношения высоты и диаметра аппарата, располагают от трех до пяти рубашек охлаждения. На начальном этапе, который является определяющим для всего дальнейшего процесса, в работу включается только верхняя рубашка [6]. Таким образом, за счет охлаждения среды в верхней части ЦКТ, стремятся создать внутри танка конвективное движение среды, которое необходимо поддерживать на протяжении всего процесса брожения. Такая организация процесса гарантирует отсутствие расслоения суслу за счет оседания дрожжей, а также способствует равномерному охлаждению продукта по всему объему без применения механического перемешивания, которое оказывает негативное влияние на дрожжевые клетки.

При построении математической модели, для всех необходимых выкладок будем использовать цилиндрическую систему координат, которая наиболее подходит для соответствующей геометрии аппарата. Разделим цилиндрический объем ЦКТ условно на три зоны. В первую зону высотой  $Z$  войдет объем с кольцевым сечением, соответствующий верхней рубашке охлаждения, где происходит теплообмен. Ко второй зоне отнесем объем кольцевого сечения, от нижней границы первой зоны до днища ЦКТ, который занимает конвективный поток (ведущий), направленный сверху вниз.

Восходящий конвективный поток (ведомый), занимающий центральный цилиндрический объем, отнесем к третьей зоне (рис. 1).

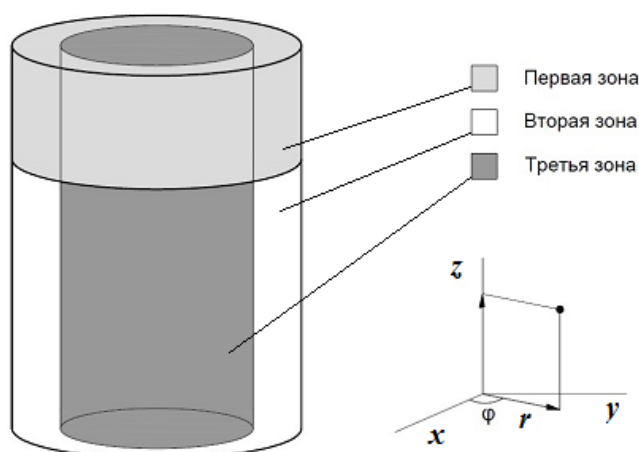


Рис.1 Разделение ЦКТ на зоны. (Схема, пропорции не соблюдены)

### Описание процессов и допущения для первой выделенной зоны ЦКТ

В области рубашки охлаждения не будем учитывать теплопроводность внутри конвективного слоя, а также тепловыделение за счет жизнедеятельности дрожжей. Влияние этих условий будем учитывать в дальнейшем, при описании второй зоны. Примем допущения, что плотность сусла, удельная теплоемкость, а также коэффициент теплопередачи через стенку – постоянные величины. Для сусла пренебрежем азимутальным и радиальным распределением температуры, то есть примем для зоны гипотезу полного вытеснения. В силу конструктивных особенностей рубашки охлаждения, будем определять ее источником бесконечной тепловой емкости. Также будем считать, что сусло обменивается теплом только с хладагентом без учета влияния окружающей среды. Такая постановка задачи правомерна при хорошей теплоизоляции самого танка.

С учетом принятых допущений, уравнение процесса теплопередачи через разделительную стенку между рубашкой охлаждения и кольцевым пристеночным конвективным потоком может быть представлено в форме линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$cm \frac{\partial \Theta(z, \tau)}{\partial \tau} + cmv \frac{\partial \Theta(z, \tau)}{\partial z} = kF(\Theta_0(\tau) - \Theta(z, \tau)), \quad (1)$$

где  $\tau$  – время прохождения потока через контактирующий с рубашкой объем вдоль вертикальной координаты (время вытеснения);

$\Theta$  – температура;

$m$  – масса конвективного потока, находящегося в зоне 1;

$c$  – удельная теплоемкость конвективного потока, находящегося в зоне 1.

Скорость конвективного потока  $v$  будем считать для зоны 1 постоянным параметром на рассматриваемом временном интервале моделирования.

Вид решения уравнения (1) зависит от временного интервала. Для начального интервала времени  $\tau < Z/v$ , решение имеет вид

$$\Theta(\tau) = \Theta_0 + \exp\left(-\frac{kF}{cm} \tau\right)(\Theta^0 - \Theta_0),$$

где  $\Theta^0$  – температура конвективного потока на входе в зону 1 (верхнее сечение зоны 1).

Это решение не зависит от  $z$ , то есть при стартовом интервале времени профиль распределения температуры конвективного потока по координате  $z$  остается неизменным во времени.

Для интервала времени  $\tau > Z/v$  решение имеет другую форму

$$\Theta(z) = \Theta_0 + \exp\left(-\frac{kF}{cm} \frac{z}{v}\right)(\Theta^0 - \Theta_0). \quad (2)$$

Вид решения (2) свидетельствует о том, что в этом временном интервале распределение температуры при изменении  $v$  мгновенно распространяется по всей высоте зоны 1. Профиль температуры по координате  $z$  остается неизменным до пересчета значения скорости.

### Описание процессов и допущения для второй выделенной зоны ЦКТ

При описании конвективного движения жидкости принято использовать систему уравнений Навье-Стокса, к которым добавляют уравнение переноса тепла и уравнение неразрывности, основанное на законе сохранения массы. Перечисленные выражения имеют форму дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных относительно времени и пространственных координат. В векторной форме

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\frac{\nabla \tilde{p}}{\rho_0} - g\beta\tilde{\Theta} + \mu\Delta v, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} + v \cdot \nabla \tilde{\Theta} = \chi\Delta\tilde{\Theta} + \mathcal{Q}, \quad (4)$$

$$\nabla v = 0, \quad (5)$$

в системе уравнений (3)-(5) обозначено:

$v$  – вектор скорости конвективного потока;

$\tilde{\Theta}$  и  $\tilde{p}$  – отклонения температуры и давления от их равновесных значений;

$\rho_0$  – плотность, соответствующая начальному значению температуры  $\Theta^0$ ;

$g$  – вектор ускорения свободного падения;

$\beta$  – объемный коэффициент теплового расширения жидкости;

$\mu$  – вязкость кинематическая;

$\chi$  – коэффициент температуропроводности;

$\nabla$  – оператор набла;

$\Delta \equiv \nabla^2$  - оператор Лапласа;

$\mathcal{G}$  - параметр, определяющий количество выделенного тепла за счет жизнедеятельности дрожжей в единицу времени.

Примем следующие допущения для построения модели конвективного движения жидкости применительно ко второй и третьей зонам:

- будем считать, что жидкость ньютоновская, несжимаемая и вязкая;
- конвективное движение будем рассматривать в приближении Буссинеска;
- тепловым эффектом от трения при движении жидкости (эффектом вязкостной диссипации) будем пренебрегать;
- будем полагать, что течение безвихревое, азимутальная составляющая вектора скорости равна нулю (движение жидкости в азимутальном направлении отсутствует).
- будем пренебрегать диффузионными процессами, то есть примем, что пристеночный и центральный потоки не смешиваются и не обмениваются между собой теплом. Это является следствием весьма небольшой теплопроводности жидкости, а также ее значительной удельной теплоемкости, так что теплопередача от потока к потоку вдоль радиуса пренебрежимо мала в сравнении с конвективным переносом тепла внутри слоя;
- положим, что на границе двух несмешивающихся потоков жидкости радиальные составляющие скорости равны нулю;
- будем считать, что на границе между стенкой ЦКТ и контактирующим с ней слоем имеет место эффект прилипания (осевая компонента скорости потока  $v_z$  равна нулю), а профиль осевой компоненты скорости зависит только от координаты  $r$  (аналог цилиндрического течения Пуазейля), полагая, что давление, в свою очередь, зависит только от координаты  $z$ :  $p = \psi(z)$ .

Таким образом,

$$v_z = v_z(t, r), v_\varphi \equiv v_r \equiv 0. \quad (6)$$

Здесь  $v_z, v_\varphi, v_r$  - проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат.

Уравнение неразрывности (5) в цилиндрических координатах с учетом (6) имеет вид тождества

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Векторное уравнение (3) в общем случае распадается на три уравнения относительно координат. Однако при сделанных допущениях интерес представляет только одно из них, описывающее конвективное движение по координате  $z$ , так как остальные уравнения становятся тривиальными. Таким образом, для зоны 2

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g\alpha\tilde{\Theta}. \quad (7)$$

Важной особенностью выражения (7) является отсутствие в левой части конвективной составляющей, что существенно упрощает процедуру поиска численного решения, то есть зависимости вертикальной компоненты скорости  $v_z$  от времени  $t$  и радиальной координаты  $r$ .

Решение следует подставить в уравнение теплообмена (1), предварительно усреднив по координате  $r$ . При усреднении можно использовать полученное в работе [9] соотношение между максимальной и средней скоростью. Так, для зоны 2 в практически важном случае соотношения радиусов  $\tilde{R} \in (1,0;1,5]$ , где  $\tilde{R} = R/R_1$ ,  $R_1$  - радиус центральной зоны 3, а  $R$  - радиус ЦКТ, отношение  $v_z^{\max}/\bar{v}_z = 1,5$ .

Уравнение теплопроводности при введенных допущениях примет вид

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} + v_z \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial z} = \chi \frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial z^2} + \mathcal{G}. \quad (8)$$

Температура  $\Theta(t,0)$  на границе первой и второй зон, полученная при решении уравнения (1) является начальной для уравнения (8) при численном решении (краевое условие) и имитационном моделировании.

### Описание процессов и опущения для третьей выделенной зоны ЦКТ

Для центрального потока в третьей зоне имеет место близкий к изотермическому перенос жидкости под воздействием разности давлений (архимедова сила) и гравитационной силы. Для этой зоны с учетом (6) и других принятых выше допущений уравнение движения (3) можно записать в форме

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (9)$$

Среда с температурой  $\Theta(t,0)$  из нижнего сечения от границы зоны 2 поступит в первую зону, зону действия рубашки охлаждения через центральный слой (зона 3), за время, которое зависит от скорости центрального потока. Как показано в [9], для центрального потока отношение скоростей  $v_z^{\max}/\bar{v}_z = 2$ .

### Дополнительные допущения для формирования математической модели

Определим порядок выбора начальных значений температур и скорости для каждой из зон. Будем считать, что в начальный момент времени сусло внутри ЦКТ имеет одинаковую температуру и нулевую скорость во всех зонах, что совпадает с технологическими требованиями – заполнить ЦКТ как можно быстрее, чтобы брожение началось одновременно во всем объеме. После включения верхней рубашки охлаждения и до момента появления конвекции можно пренебречь зависимостью параметров от координат, а скорость среды полагать незначительно и медленно меняющейся в окрестности теплопередающей стенки. Согласно существующим технологическим нормам, температура хладагента в этот момент должна быть такой, чтобы, по

возможности, оградить дрожжи от шокового воздействия холода, так как на частицы, находящиеся в непосредственном контакте со стенкой, воздействие холода будет длительным при отсутствии конвективного движения. Тогда выражение для теплообмена через стенку двух неподвижных термодинамических систем с сосредоточенными параметрами можно записать в следующей форме

$$cm \frac{d\Theta}{dt} = kF(\Theta_0^0 - \Theta(t)), \quad (10)$$

где  $\Theta_0^0$  – значение температуры хладагента, соответствующее технологическим требованиям на начало процесса.

Такая картина наблюдается до тех пор, пока температура среды в зоне 1 (зоне теплообмена) не изменится так, чтобы число Рэлея  $Ra$  стало больше критического  $Ra_c$ . Это значение температуры будет соответствовать начальному моменту модельного времени для выражения (7).

Полученная в результате принятия допущений, описанных выше, система уравнений (1), (7)-(10) может быть решена численно, например, с применением метода конечных элементов [7], либо с использованием других численных подходов [12]. Предложенную модель можно использовать, прежде всего, в задачах оптимального управления технологическими процессами пищевого производства. В [7-9] показано, что погрешности результатов расчетов по предложенной упрощенной модели, используемой в реальном комплексе автоматизации управления параметрами системы, компенсируется малым временем счета и коррекцией результатов счета по математической модели на каждом шаге управления.

## Заключение

Представлена математическая модель для расчета определяющих параметров жидкости при ее конвекционном движении внутри цилиндрической емкости большого объема под действием гравитационных сил в условиях охлаждения в верхнем сегменте бака. Ее отличительными особенностями являются обоснованные упрощения, учитывающие реальные особенности технологического процесса брожения в объеме ЦКТ.

## Список литературы

1. Бэтчелор Дж.К. Введение в динамику жидкости: пер. с англ. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 768 с. [Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2000. 615 p.].
2. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
3. Новый справочник химика и технолога. Т. 9-10. Процессы и аппараты химических технологий. Ч. 1 / ред. Г.М. Островский. СПб.: Профессионал, 2004. 848 с.

4. Домашенко А.М., Темнов А.Н. Тепловые эффекты колебаний криогенных жидкостей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. Спец. вып. Актуальные проблемы развития ракетно-космической техники и систем вооружения. С. 201-214
5. Мартюшев С.Г., Мирошниченко И.В., Шеремет М.А. Численный анализ пространственных нестационарных режимов сопряженного конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутом объеме с источником энергии // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87, № 1. С. 119-128.
6. Кунце В., Мит Г. Технология солода и пива: пер. с нем. СПб.: Профессия, 2001. 912 с.
7. Артюшкин А.Ю., Карпов В.И., Татаринов А.В. Энергосберегающий алгоритм оптимального управления температурой брожения пива (термодинамический подход) // Известия вузов. Пищевая технология. 2010. № 4. С. 103-106.
8. Артюшкин А.Ю., Воронина П.В., Татаринов А.В. Математическое обеспечение системы оптимального управления объектом теплообмена с динамическими параметрами, заданными в алгоритмической форме // Известия МГТУ «МАМИ». 2013. Т. 4, № 1 (15). С. 59-63.
9. Артюшкин А.Ю., Татаринов А.В. Синтез оценочной математической модели конвекции при брожении пива // Известия вузов. Пищевая технология. 2011. № 2-3. С. 108-111.
10. Сулимов В.Д., Шкапов П.М. Гибридные алгоритмы векторной оптимизации в системах вычислительной диагностики // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 3. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/325628.html> (дата обращения 01.10.2015).
11. Шкапов П.М. Методология моделирования гидромеханических систем пищевых производств при расчете их динамических характеристик // Хранение и переработка сельхозсырья. 2010. № 9. С. 48-51.
12. Kageyama A., Yoshida M. Geodynamo and Mantle Convection Simulations on the Earth Simulator Using the Yin-Yang Grid // Journal of Physics: Conference Series. 2005. Vol. 16. P. 325-338. DOI: [10.1088/1742-6596/16/1/045](https://doi.org/10.1088/1742-6596/16/1/045)



## **On Assumptions in Development of a Mathematical Model of Thermo-gravitational Convection in the Large Volume Process Tanks Taking into Account Fermentation**

P.M. Shkapov<sup>1,\*</sup>, A.Yu. Artyushkin<sup>2</sup>

[\\*spm@bmstu.ru](mailto:spm@bmstu.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia

---

**Keywords:** mathematical model, convection, technological tanks, Boussinesq approximation

---

The paper provides a mathematical model of thermo-gravity convection in a large volume vertical cylinder. The heat is removed from the product via the cooling jacket at the top of the cylinder. We suppose that a laminar fluid motion takes place. The model is based on the Navier-Stokes equation, the equation of heat transfer through the wall, and the heat transfer equation. The peculiarity of the process in large volume tanks was the distribution of the physical parameters of the coordinates that was taken into account when constructing the model. The model corresponds to a process of wort beer fermentation in the cylindrical-conical tanks (CCT). The CCT volume is divided into three zones and for each zone model equations was obtained. The first zone has an annular cross-section and it is limited to the height by the cooling jacket. In this zone the heat flow from the cooling jacket to the product is uppermost. Model equation of the first zone describes the process of heat transfer through the wall and is presented by linear inhomogeneous differential equation in partial derivatives that is solved analytically. For the second and third zones description there was a number of engineering assumptions. The fluid was considered Newtonian, viscous and incompressible. Convective motion considered in the Boussinesq approximation. The effect of viscous dissipation is not considered. The topology of fluid motion is similar to the cylindrical Poiseuille. The second zone model consists of the Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates with the introduction of a simplified and the heat equation in the liquid layer. The volume that is occupied by an upward convective flow pertains to the third area. Convective flows do not mix and do not exchange heat. At the start of the process a medium has the same temperature and a zero initial velocity in the whole volume that allows us to specify the initial conditions for the process. The paper shows the relationship of the zones through the boundary conditions. The presented system of equations can be solved numerically using the finite element method. Application of the proposed mathematical model of convection in a vertical cylinder with lateral cooling is suitable for solving optimization problems, such as constraint equations.

## References

1. Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000. 615 p. (Russ. ed.: Batchelor G.K. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti*. Moscow; Izhevsk, "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika" Publ., 2004. 768 p.).
2. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Sovremennye matematicheskie modeli konveksii* [Modern mathematical models of convection]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 368 p. (in Russian).
3. Ostrovskii G.M., ed. *Novyi spravochnik khimika i tekhnologa. T. 9-10. Protsessy i apparaty khimicheskikh tekhnologii. Ch. 1* [The new handbook for the chemist and technologist. Vol. 9-10. Processes and devices of chemical technologies. Pt. 1]. St. Petersburg, Professional Publ., 2004. 848 p. (in Russian).
4. Domashenko A.M., Temnov A.N. Thermal effects of vibrations of cryogenic liquids. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering*, 2012, spec. iss., pp. 201-214. (in Russian).
5. Martyushev S.G., Miroshnichenko I.V., Sheremet M.A. Numerical Analysis of Spatial Unsteady Regimes of Conjugate Convective-Radiative Heat Transfer in a Closed Volume with an Energy Source. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, no. 1, pp. 124-134. DOI: [10.1007/s10891-014-0992-6](https://doi.org/10.1007/s10891-014-0992-6)
6. Kuntse W., Mieth H.O. *Tekhnologiya soloda i piva* [Technology of malt and beer]. Transl. from German. St. Petersburg, Professiya Publ., 2001. 912 p. (in Russian).
7. Artyushkin A.Yu., Karpov V.I., Tatarinov A.V. Energy-efficient algorithm of optimal temperature control in beer fermentation process (thermodynamic approach). *Izvestiya vuzov. Pishchevaya tekhnologiya = News of institutes of higher education. Food technology*, 2010, no. 4, pp. 103-106. (in Russian).
8. Artyushkin A.Y., Voronina P.V., Tatarinov A.V. B. Mathematical software of an optimal control system of heat exchange object with dynamic parameters specified in algorithmic form. *Izvestiya MGTU "MAMI"*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 59-63. (in Russian).
9. Artyushkin A.Yu., Tatarinov A.V. Synthesis of estimation mathematical model of convection during beer fermentation. *Izvestiya vuzov. Pishchevaya tekhnologiya = News of institutes of higher education. Food technology*, 2011, no. 2-3, pp. 108-111. (in Russian).
10. Sulimov V.D., Shkapov P.M. Hybrid algorithms for vector optimization in computational diagnostics systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 3. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/325628.html> , accessed 01.10.2015. (in Russian).
11. Shkapov P.M. Methodology of modelling of hydromechanical systems of food manufactures at calculation of their dynamic characteristics. *Khranenie i pererabotka sel'khozsyrya = Storage and processing of farm products*, 2010, no. 9, pp. 66-69. (in Russian).

12. Kageyama A., Yoshida M. Geodynamo and Mantle Convection Simulations on the Earth Simulator Using the Yin-Yang Grid. *Journal of Physics: Conference Series*, 2005, vol. 16, pp. 325-338. DOI: [10.1088/1742-6596/16/1/045](https://doi.org/10.1088/1742-6596/16/1/045)