

УДК 534.1

Уточнение конечно-элементной модели лопатки ГТД на основе результатов вибрационных испытаний с учётом разброса модальных параметров

Николаев С. М.^{1,*}, Жулёв В. А.¹,
Киселёв И. А.¹

[*nikolaev.box@gmail.com](mailto:nikolaev.box@gmail.com)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В данной статье рассматривается вопрос уточнения конечно-элементной модели лопатки компрессора низкого давления, закреплённой в технологической оснастке с использованием стохастического подхода на основе результатов модальных испытаний. Цель уточнения модели – сведение к минимуму различия экспериментальных и расчётных собственных частот и форм колебаний. Предложенный алгоритм позволяет достичь указанной цели с помощью вариации приведённых модулей упругости элементов сборочной конструкции в области контакта с учётом разброса исследуемых частот. В работе выведены рекуррентные зависимости, лежащие в основе предлагаемого алгоритма. На примере уточнения модели лопатки компрессора газотурбинного двигателя показана эффективность предлагаемого метода для получения конечно-элементных моделей, адекватно описывающих динамику исследуемого изделия.

Ключевые слова: уточнение модели, экспериментальный модальный анализ, конечно-элементное моделирование, стохастический подход

Введение

Целью математического моделирования механических систем в динамике является исследование характеристик поведения объектов под действием различных нагрузок, переменных во времени. С помощью модели можно определить такие параметры системы как собственные частоты и формы колебаний, а также найти наибольшую амплитуду колебаний, распределение напряжений и деформаций при различных режимах эксплуатации конструкции. В настоящее время широкое распространение получил метод конечных элементов, который позволяет определить вышеупомянутые характеристики для изделий со сложной геометрией. Однако, для достоверного определения динамических параметров конечно-элементная модель должна с высокой точностью соответствовать объекту исследования. Выполнение такого требования в большинстве случаев затруднительно, так как, во многих случаях, объекты исследования являются сборочными конструкциями, а точное моделирование мест соединений и стыков при

динамическом поведении конструкции не всегда возможно из-за большого количества неизвестных параметров.

Таким образом, возникает задача идентификации параметров конечно-элементной модели в местах соединений. Обычно, такими параметрами являются приведенные модули упругости элементов конструкции в местах соединений. В данном случае, приведенные модули упругости несут физический смысл параметров контактной жесткости, неизвестной заранее.

Как известно, собственные частоты и формы колебаний являются базовыми динамическими характеристиками любой механической системы. При этом методика испытаний по определению собственных частот колебаний являются достаточно хорошо изученной и простой для реализации. Методы определения собственных частот из экспериментальных данных подробно описаны в работах D. Ewins, P. Sas, R. Allemang, D. Brown и др. [1-3].

Разницу значений собственных частот, полученных экспериментально и численно, удобно использовать в качестве критерия точности расчётной модели. Наряду с собственными частотами, в качестве критерия соответствия модели и объекта, могут использоваться и собственные формы колебаний. Однако, получение экспериментальных собственных форм более трудоёмкий процесс и, в рамках данной статьи, на рассматривается.

Первые публикации в области уточнения и верификации модели стали появляться в конце 60-х – начале 70-х годов. Данные методы были улучшены и обобщены на случай, когда параметры механической системы известны с некоторой конечной точностью, то есть являются случайными величинами с известными статистическими характеристиками. Наиболее подробные математические выкладки проделаны в работе [4]. Несмотря на большое количество исследований, данная область продолжает развиваться в настоящее время [5–8]. Последние достижения в области уточнения расчетных моделей механических систем связаны с применением теорем теории вероятности и статистики, в частности с использованием теоремы Байеса, для определения функции плотности вероятности системы [9]. Стоит отметить, что вопрос автоматизированного уточнения конечно-элементных моделей сложных механических систем по результатам модальных испытаний является актуальной проблемой для внедрения автоматизации проектирования в различных отраслях высокотехнологичной промышленности.

Постановка задачи

В рамках работы решается задача уточнения конечно-элементной модели лопатки компрессора низкого давления, закрепленной в технологической оснастке. Динамические характеристики модели должны с заданной степенью точности соответствовать динамическим характеристикам партии изделий. Значения собственных частот колебаний партии лопаток являются случайными величинами, с известными из модальных испытаний статистическими характеристиками (математические ожидания и дисперсии). Такая постановка задачи требует применения стохастического подхода к уточнению конечно-элементной модели, который позволяет учесть случайную природу параметров модели и динамических характеристик объекта.

Получение рекуррентных соотношений для верификации конечно-элементной модели с учетом статистического разброса экспериментальных данных

Как было отмечено выше, в ходе проведения модальных испытаний собственные частоты и формы колебаний, а также коэффициенты демпфирования могут быть определены с некоторым статистическим разбросом, который необходимо учитывать при верификации модели. Ниже приведена последовательность получения рекуррентных соотношений для верификации и уточнения конечно-элементной модели по результатам модальных испытаний с учетом разброса параметров системы. При этом, выкладки приведены для общего случая, когда в качестве параметров модели могут быть выбраны любые величины.

Рассмотрим характеристическое уравнение механической системы n -го порядка без учета демпфирования

$$(\mathbf{K} - p^2\mathbf{M})\mathbf{q} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{K} – матрица жёсткости системы,

\mathbf{M} – матрица масс системы,

p – собственная частота колебаний системы,

\mathbf{q} – собственный вектор системы.

Можно ввести некоторую неизвестную функцию, которая описывает связь между собственными частотами системы и параметрами системы.

Данную функцию можно разложить в ряд Тейлора до первого члена [7], тогда соотношение между вектором собственных частот и параметрами системы может быть представлено в векторно-матричной форме:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_p) + \mathbf{T} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p). \quad (2)$$

где \mathbf{x} – вектор идеальных параметров объекта,

\mathbf{x}_p – вектор параметров модели,

$\boldsymbol{\omega}$ – вектор, составленный из $(p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)$,

\mathbf{T} – матрица производных частот от параметров, то есть

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \omega_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \omega_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим процедуру решения уравнения (2) с учетом нормального разброса экспериментальных данных. Перепишем (2) в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} \quad (3)$$

где

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_p), \quad (4)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p. \quad (5)$$

Предполагается, что параметры модели имеют нормальное Гауссовское распределение. Тогда, математическое ожидание параметров объекта

$$\boldsymbol{\mu}_x = E[\mathbf{x}] = \mathbf{x}_p, \quad (6)$$

ковариационная матрица вектора \mathbf{x} определяется как:

$$\mathbf{S}_{xx} = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T] = E[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)^T]. \quad (7)$$

Математическое ожидание и ковариационная матрица вектора \mathbf{r} :

$$\boldsymbol{\mu}_r = E[\mathbf{r}] = E[\mathbf{x} - \mathbf{x}_p] = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$\mathbf{S}_{rr} = E[\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T] = E[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)^T] = \mathbf{S}_{xx}, \quad (9)$$

а математическое ожидание и ковариационная матрица вектора \mathbf{y} :

$$\boldsymbol{\mu}_y = E[\mathbf{y}] = \mathbf{0}, \quad (10)$$

$$E[\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T] = E[\mathbf{T} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{T}^T] = \mathbf{T} \cdot E[\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T] \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{rr} \cdot \mathbf{T}^T. \quad (11)$$

Рассмотрим систему (3) с учётом погрешности $\boldsymbol{\varepsilon}$, которая возникает в результате измерений. Данная погрешность образуется как вследствие несовершенства аппаратуры и алгоритмов обработки экспериментальных данных, так и вследствие разброса параметров при переходе от одного изделия партии к другому.

Примем, что данная погрешность имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу $\mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}$. Данная матрица получена из модальных испытаний и обычно является диагональной матрицей дисперсий.

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (12)$$

Для новой системы среднее значение \mathbf{y} совпадает со значением \mathbf{y}

$$\boldsymbol{\mu}_y = E[\mathbf{y}] = \mathbf{0} \quad (13)$$

Матрица ковариации \mathbf{y} принимает новый вид

$$\mathbf{S}_{yy} = E[\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}] = E[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{T} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon})^T] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{rr} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon}. \quad (14)$$

Матрица ковариаций векторов \mathbf{y} и \mathbf{r} определяется как

$$\mathbf{S}_{yr} = E[\mathbf{y} \cdot \mathbf{r}^T] = E[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{r}^T] = E[\mathbf{T} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}^T] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{rr}, \quad (15)$$

причем, вектора \mathbf{r} и $\boldsymbol{\varepsilon}$ статистически независимы, следовательно,

$$E[\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}^T] = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Цель приведенных математических операций – получить наилучшее приближение параметров модели \mathbf{r} на основе измеренных параметров натурального объекта. Следовательно, необходимо решить обратную задачу:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}, \quad (17)$$

где матрица \mathbf{G} должна обеспечивать наименьшую разницу между действительным вектором \mathbf{r} и полученным вектором \mathbf{r}^* , то есть норма матрицы

$$\mathbf{Q} = E\left[(\mathbf{r}^* - \mathbf{r})(\mathbf{r}^* - \mathbf{r})^T\right] \quad (18)$$

должна стремиться к минимальному значению.

Рассмотрим выражение (18) с учетом (17)

$$\mathbf{Q} = E\left[(\mathbf{G} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{r})(\mathbf{G} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{r})^T\right] = \mathbf{G} \cdot \mathbf{S}_{yy} \cdot \mathbf{G}^T - \mathbf{G} \cdot \mathbf{S}_{yr} - \mathbf{S}_{yr}^T \cdot \mathbf{G}^T + \mathbf{S}_{rr}, \quad (19)$$

и проварьируем (19) по \mathbf{G} . Поскольку норма матрицы \mathbf{Q} минимальна, то её вариация равна нулю

$$0 = \delta \mathbf{G} \cdot (\mathbf{S}_{yy} \cdot \mathbf{G}^T - \mathbf{S}_{yr}) + (\mathbf{G} \cdot \mathbf{S}_{yy} - \mathbf{S}_{yr}) \cdot \delta \mathbf{G}^T. \quad (20)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{G} = \mathbf{S}_{yr}^T \cdot \mathbf{S}_{yy}^{-1}, \quad (21)$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{S}_{yr}^T \cdot \mathbf{S}_{yy}^{-1} \cdot \mathbf{y}. \quad (22)$$

Заметим, что матрица \mathbf{G} является псевдообратной матрицей \mathbf{T} , то есть

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}^+. \quad (23)$$

Объединив уравнения (4), (5), (14) и (15) получаем

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_p + \mathbf{S}_{rr} \cdot \mathbf{T}^T (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{rr} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon})^{-1} \cdot \mathbf{r}, \quad (24)$$

$$\mathbf{S}_{rr}^* = \mathbf{S}_{rr} - \mathbf{S}_{rr} \cdot \mathbf{T}^T (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{rr} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{S}_{\varepsilon\varepsilon})^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_{rr}. \quad (25)$$

Таким образом, на основе работ [5-9] авторами статьи получены рекуррентные соотношения, которые позволяют верифицировать численную модель механической системы с учетом разброса экспериментальных данных. Если зависимость между параметрами модели и её частотами будет иметь линейный характер, то верификация будет осуществлена за одну итерацию. В действительности зависимость нелинейная и потребуется несколько итераций использования формул (24) и (25).

Получение зависимостей для определения коэффициентов чувствительности

Следует отметить, что основная трудоёмкость алгоритма уточнения состоит в вычислении матрицы \mathbf{T} , состоящей из частных производных собственных частот по параметрам. В случае, когда в качестве параметров выступают модули упругости в конечных элементах, искомую производную оказывается возможно получить аналитически [10].

Для нахождения собственной частоты можно использовать соотношение Релея:

$$\omega_i^2 = \frac{\mathbf{q}_i^T \mathbf{K} \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \mathbf{q}_i}. \quad (26)$$

Покажем, как изменяется собственная частота ω_i при изменении механических свойств материала в элементе n . Введем параметр x_j , который будет описывать отклонение механических свойств (плотности и модуля упругости) от номинальных значений. Коэффициент x_j может изменяться в некоторых пределах от $x_{j\min}$ до $x_{j\max}$.

$$\begin{aligned} \rho(x_j) &= x_j \cdot \rho, \\ E(x_j) &= x_j \cdot E, \end{aligned} \quad (27)$$

где

ρ – номинальная плотность материала;

E – номинальный модуль упругости.

Определим производную собственной частоты по параметру x_j . В соответствии с соотношением (26) получим:

$$\frac{d\omega_i}{dx_j} = \frac{1}{2\omega_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \mathbf{q}_i} \left[2 \frac{d\mathbf{q}_i^T}{dx_j} (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_i^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx_j} - \omega_i^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_j} \right) \mathbf{q}_i \right]. \quad (28)$$

Первое слагаемое может быть исключено в соответствии с (1)

$$\frac{d\omega_i}{dx_j} = \frac{1}{2\omega_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \mathbf{q}_i} \cdot \mathbf{q}_i^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx_j} - \omega_i^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_j} \right) \mathbf{q}_i. \quad (29)$$

В случае, если плотность и модуль упругости изменяются только в конечном элементе с номером e , производные от глобальной матрицы масс и жесткости могут быть выражены через изменения матрицы жесткости и масс конечного элемента с номером e :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_j} \mathbf{M} &= \frac{d}{dx_j} \mathbf{M}^e, \\ \frac{d}{dx_j} \mathbf{K} &= \frac{d}{dx_j} \mathbf{K}^e. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя формулы (29) и (30), получаем коэффициент чувствительности e -го элемента, соответствующий i -ой собственной частоте

$$\alpha_i^e = \frac{d\omega_i^2}{dx_e} = 2\omega_i \cdot \frac{d\omega_i}{dx_e} = \frac{1}{m} (\mathbf{q}_i^e)^T \left(\omega_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}^e}{\partial x_e} - \frac{d\mathbf{K}^e}{dx_e} \right) \mathbf{q}_i^e, \quad (31)$$

где α_i^e – коэффициент чувствительности элемента e соответствующий собственной форме i ,

m – модальная масса,

\mathbf{q}_i^e – вектор собственной формы i , соответствующий степеням свободы конечного элемента e .

Производные от глобальных матриц жесткости и масс в соотношении (31) будут равны соответствующим матрицам конечного элемента e

$$\alpha_i^e = \frac{1}{m} (\mathbf{q}_i^e)^T \left(\omega_i^2 \mathbf{M}^e / \rho - \mathbf{K}^e / E \right) \mathbf{q}_i^e. \quad (32)$$

В случае если изменяется только модуль упругости, либо только плотность материала конечного элемента, соотношение (32) принимает вид:

$$\alpha_i^e = \frac{\omega_i^2}{m \rho} (\mathbf{q}_i^e)^T \mathbf{M}^e \mathbf{q}_i^e, \quad (33)$$

$$\alpha_i^n = \frac{1}{m E} (\mathbf{q}_i^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{q}_i^e.$$

Коэффициент чувствительности в виде (33) показывает, что уменьшение плотности (увеличение жесткости) в элементе с максимальным коэффициентом чувствительности приведет к наибольшему (по сравнению с изменением свойств в других КЭ) увеличению i -ой собственной частоты системы.

Следует обратить особое внимание на физический смысл коэффициента чувствительности. При варьировании модулей упругости конкретных конечных элементах, коэффициент чувствительности представляет собой масштабированную потенциальную энергию упругой деформации e -го конечного элемента на i -ой собственной частоте системы.

Таким образом, получены все необходимые соотношения для реализации алгоритма уточнения конечно-элементной модели на основе результатов испытаний с учетом разброса модальных параметров системы. Авторами статьи впервые предложен алгоритм, реализующий зависимости 23, 24, 32, 33 совместно. Использование зависимостей 32, 33 позволяет значительно сократить время работы алгоритма, заменяя численное вычисление матрицы чувствительности её вычислением по аналитическим зависимостям.

Алгоритм реализован в авторском программном обеспечении, позволяющем выполнять уточнение модели в автоматизированном режиме. Блок-схема данного алгоритма представлена на рис. 1.

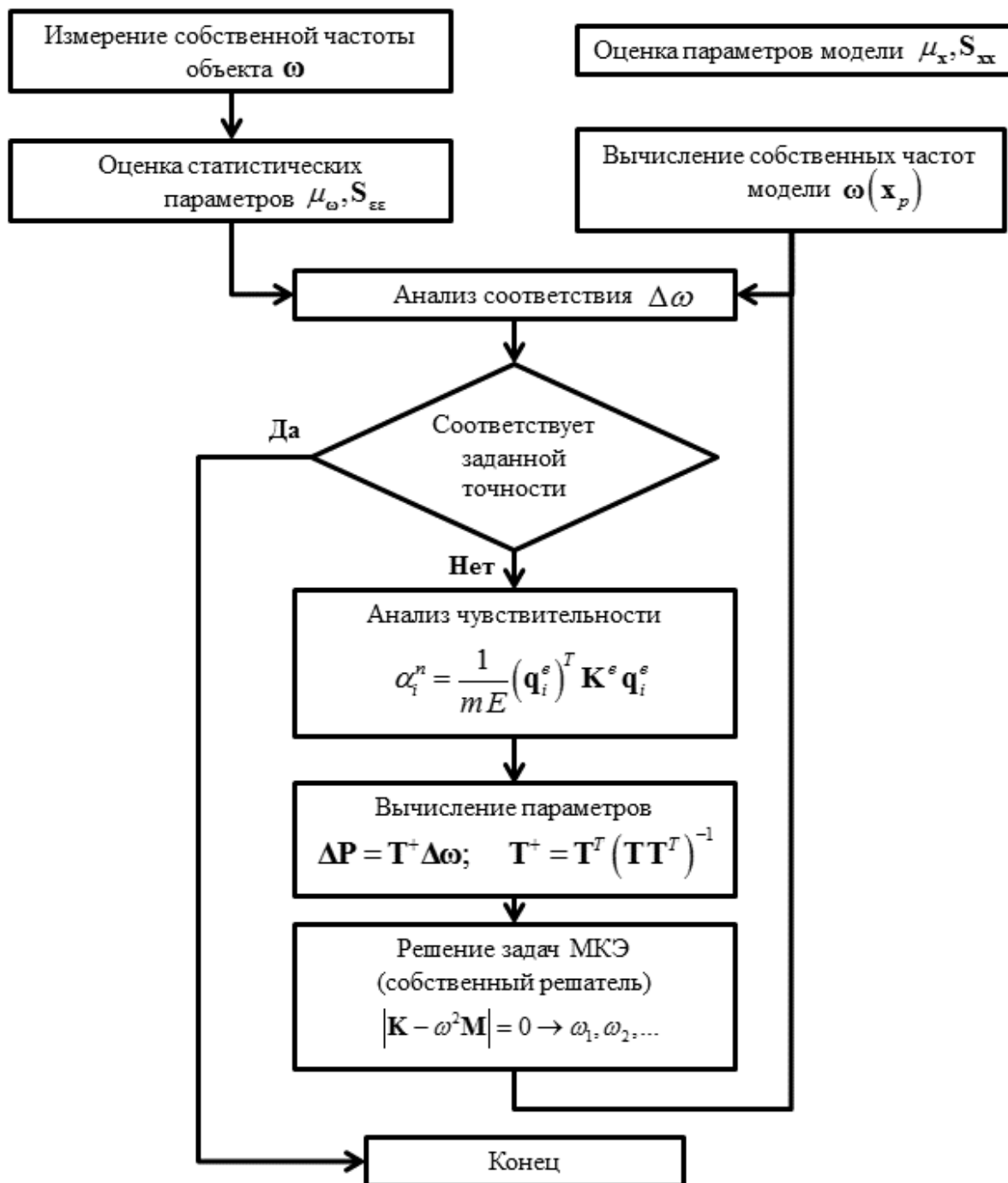


Рисунок 1 - Алгоритм верификации модели с учётом разброса параметров

Этапы верификации модели

В качестве объекта верификации рассматривается лопатка компрессора низкого давления, закреплённая в технологической оснастке (рис. 2). Эксперимент проводился при помощи однокомпонентного датчика ускорения и виброударного молотка фирмы В&К, и аналого-цифрового преобразователя National Instruments. Полученные данные обрабатывались в программном комплексе LabView. Процесс идентификации

собственных частот и форм колебаний лопатки с помощью виброударных испытаний подробно описан в работах [1,2].



Рисунок 2 - Лопатка компрессора низкого давления, закреплённая в технологической оснастке

В результате эксперимента были получены первые три собственные частоты серии лопаток. Результаты испытаний представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты модальных испытаний лопатки ГТД

№ собственной формы	Частота, Гц	Дисперсия, Гц ²
1	208.1	3.7
2	779.5	9.7
3	1104.9	19.3

При моделировании сборки контакт в области закрепления лопатки в оснастке и самой оснастки в станочных тисках не учитывается, т.е. конечно-элементная модель сборочной конструкции выполнена, как одна деталь, состоящая из разных материалов. Конечно-элементная модель представлена на рис. 3.

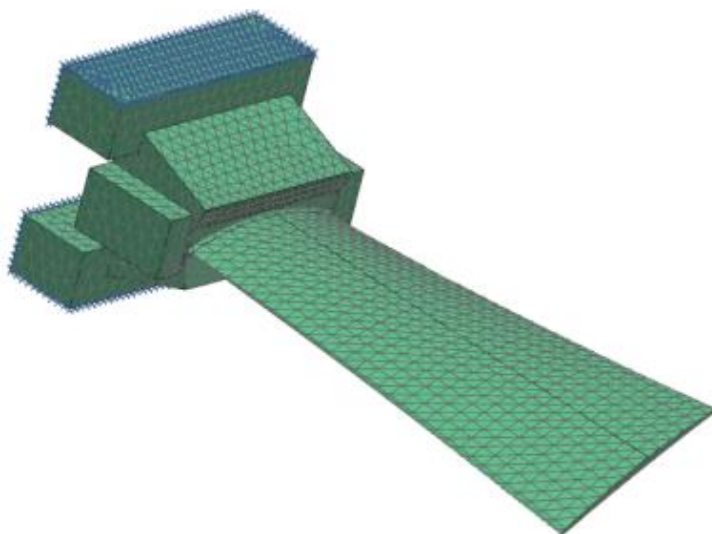


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель лопатки

Первые три собственные формы колебаний изображены на рис. 4.

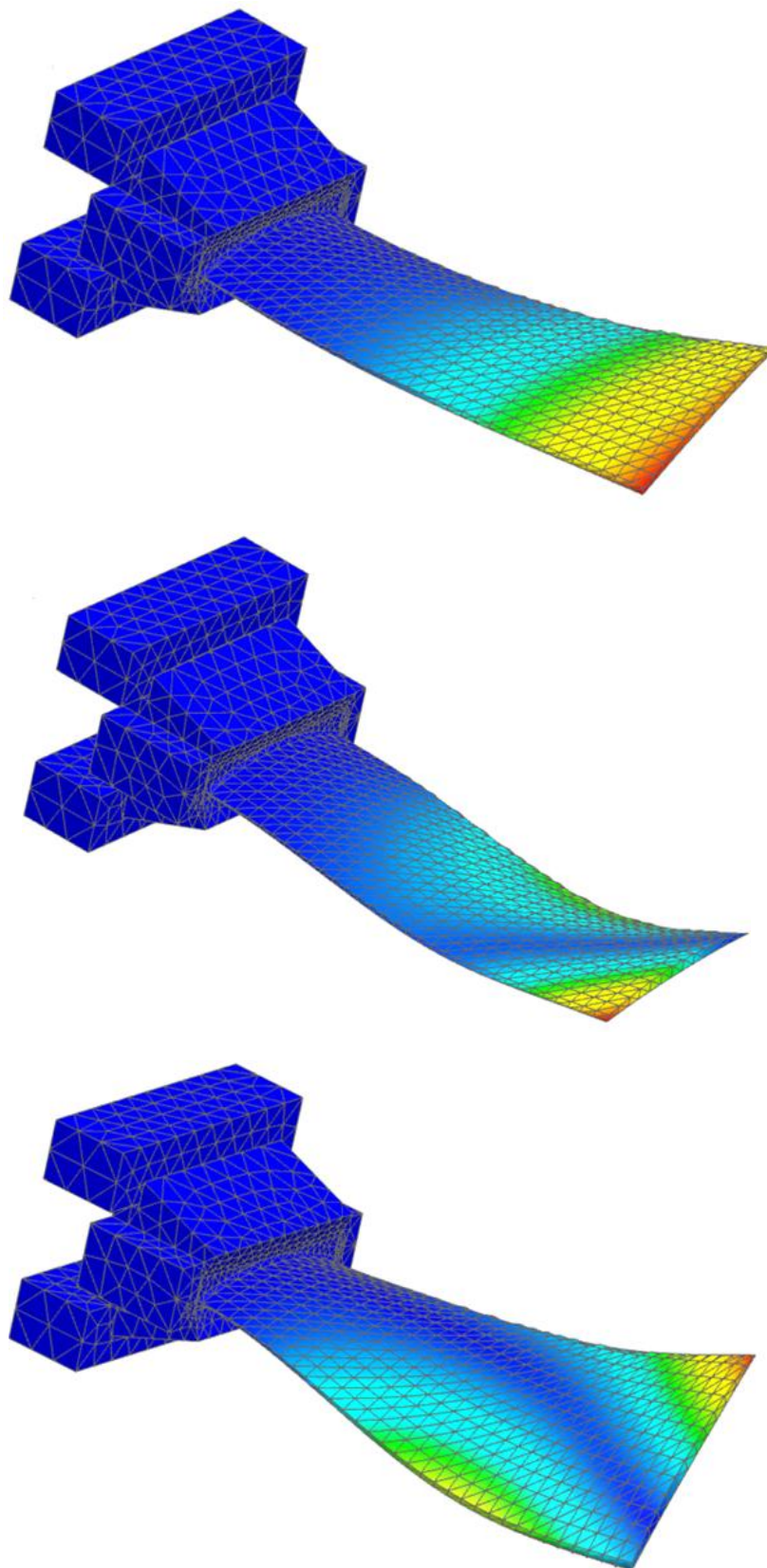


Рисунок 4 – Собственные формы колебаний лопатки

Значения соответствующих собственных частот представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты определения частот лопатки газо-турбинного двигателя методом конечных элементов

№ собственной формы	Частота, Гц
1	230.4
2	886.3
3	1124.7

Для автоматизированного уточнения модели была разработана программа, реализующая алгоритм, изображенный на рис. 1, с рекуррентными зависимостями (24, 25). Уточнение проводилось в области контакта лопатки и оснастки путем корректировки приведённых значений модуля упругости в каждом конечном элементе данной области. В качестве целевой функции, подлежащей минимизации была использована норма вектора ошибки расчетных собственных частот системы. Вектор ошибки рассчитывался следующим образом:

$$\delta = \left(\frac{\mathbf{p}^{FEA} - \mathbf{p}^{test}}{\mathbf{p}^{test}} \right) \cdot 100\% \quad (34)$$

Результаты верификации представлены в таблице 3.

Таблица 3. Результаты уточнения лопатки в области закрепления

№ собственной формы	Частота экспериментальная, Гц	Частота расчетная до уточнения, Гц	Ошибка, %	Частота расчетная после уточнения, Гц	Ошибка, %
1	208.1	230.4	10.7	201.6	- 3.1
2	779.5	886.3	13.7	774.0	- 0.7
3	1104.9	1124.7	1.8	1104.9	0.0

На рис. 5 представлены графики сходимости собственных частот в процессе уточнения модели.

Как видно из приведённого графика, после уточнения модели погрешность по всем трём собственным частотам колебаний лопатки не превышает 4%. Таким образом, уточненную модель лопатки можно использовать для точного моделирования динамики изделия, в частотном диапазоне до 1150 Гц. На рис. 6 представлена уточненная модель лопатки. Цвет каждого конечного элемента модели соответствует значению приведенного модуля упругости в данном элементе после уточнения.

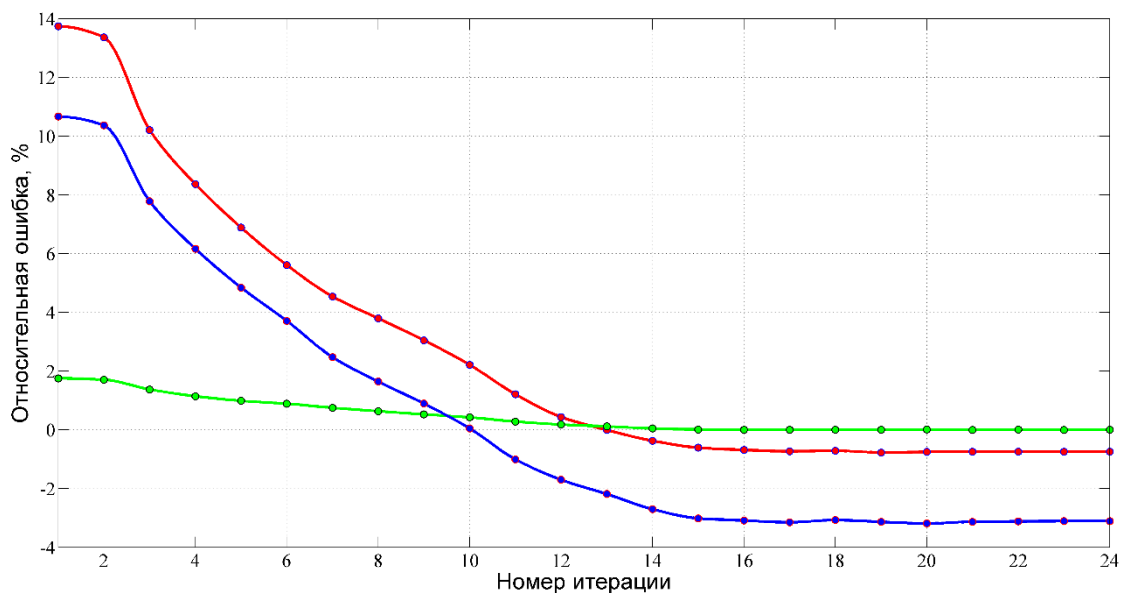


Рисунок 5 - Графики сходимости собственных частот

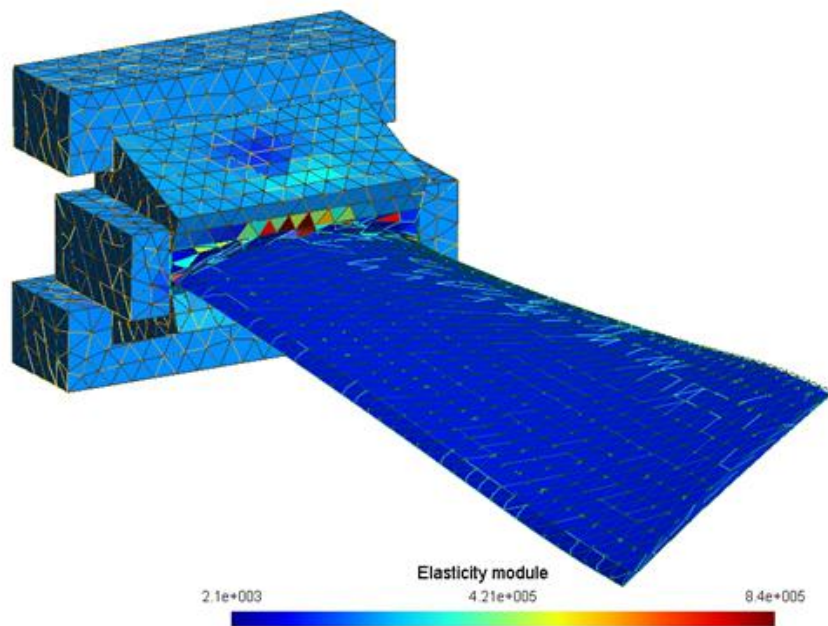


Рисунок 6 - Изображение уточненной модели лопатки

Как видно из рис. 6 наибольшие изменения претерпели значения модулей упругости элементов, находящихся близко к контактной области лопатки и технологической оснастки. Это связано с тем, что в данной области, коэффициенты чувствительности собственных частот колебаний к изменению параметров упругости являются максимальными.

Стоит отметить, что для моделирования сложных переходных процессов, необходимо не только выполнять уточнение модели по собственным частотам колебаний, но и идентифицировать модель диссипативных сил, возникающих в системе.

Заключение

В рамках данной работы, по результатам модальных испытаний серии лопаток компрессора газотурбинного двигателя, было выполнено уточнение конечно-элементной модели данной лопатки с учетом статистического разброса параметров. Для уточнения модели был использован стохастический алгоритм, основанный на анализе чувствительности. Задача уточнения математической модели лопатки была сведена к минимизации различия между измеренными и расчетными значениями собственных частот колебаний с помощью варьирования приведенных модулей упругости в месте закрепления лопатки. До выполнения процедуры уточнения модели, собственные частоты лопатки, полученные в результате модальных испытаний отличались от результатов моделирования более чем на 13%. После процедуры уточнения модели максимальная погрешность по собственным частотам составила 3.79%. Таким образом, предложенный алгоритм может быть использован для уточнения моделей сложных сборочных конструкций, с учетом разброса параметров системы.

Уточненная конечно-элементная модель изделия может быть использована для прогнозирования динамического поведения под действием эксплуатационных нагрузок, точного назначения остаточного ресурса и оптимизации конструкции.

Список литературы

1. Ewins D.J. Modal Testing: Theory, Practice and Application. 2nd edition. Baldock: Research Studies Press LTD, 2000.
2. Heylen W., Lammens S., Sas P. Modal Analysis Theory and Testing. Leuven: KUL Press, 1997.
3. Brown D.L., Allemang R.J., Zimmerman R., Mergeay M. Parameter estimation techniques for modal analysis. SAE Technical Paper No. 790221. SAE, 1979. 19 p. DOI: [10.4271/790221](https://doi.org/10.4271/790221)
4. Collins J.D., Hart G.C., Hasselman T.K., Kennedy B. Statistical Identification of Structures // American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 1974. Vol. 12, no.2. P. 185-190. DOI: [10.2514/3.49190](https://doi.org/10.2514/3.49190)
5. Katafygiotis L.S., Papadimitriou C., Lam H.-F. A probabilistic approach to structural model updating // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 1998. Vol. 17, is. 7-8. P. 495-507. DOI: [10.1016/S0267-7261\(98\)00008-6](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(98)00008-6)
6. Mares C., Mottershead J.E., Friswell M.I. Stochastic model updating: Part 1 — theory and simulated example // Mechanical Systems and Signal Processing. 2006. Vol. 20, no. 7. P. 1674-1695. DOI: [10.1016/j.ymsp.2005.06.006](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2005.06.006)
7. Mottershead J.E., Mares C., James S., Friswell M.I. Stochastic model updating: Part 2 - application to a set of physical structures // Mechanical Systems and Signal Processing. 2006. Vol. 20, no. 8. P. 2171-2185. DOI: [10.1016/j.ymsp.2005.06.007](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2005.06.007)

8. Mottershead J.E., Link M., Friswell M.I. The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2011. Vol. 25, no. 7. P. 2275-2296. DOI: [10.1016/j.ymssp.2010.10.012](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.10.012)
9. Behmanesh I., Moaveni B. Bayesian FE Model Updating in the Presence of Modeling Errors // *Model Validation and Uncertainty Quantifications*. Vol. 3. Springer International Publishing, 2014. P. 119-133. DOI: [10.1007/978-3-319-04552-8_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-04552-8_12)
10. Huang X., Zuo Z.H., Xie Y.M. Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies // *Computers & Structures*. 2009. Vol. 88, no. 5. P. 357-364. DOI: [10.1016/j.compstruc.2009.11.011](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.11.011)

Updating Turbine Blade FE Model Considering the Modal Parameters Scatter

S.M. Nikolaev^{1,*}, V.A. Zhulev¹, I.A. Kiselev¹

[*nikolaev.box@gmail.com](mailto:nikolaev.box@gmail.com)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: model updating, experimental modal analysis, finite-element modeling, stochastic approach

The paper considers an issue of updating a turbine blade finite element model. The turbine blade is fixed in the special rig and the unknown contact conditions strongly influences on the blade dynamics. Hence, there is a difference between the real blade dynamic characteristics and the results of the finite element simulation. The task is to update the blade FE model on the basis of the modal test data to obtain fine dynamic model of the structure. The experimental modal parameters are known with some scatter, which is the result of measurement errors, and some differences from blade to blade within the kit of parts.

The proposed algorithm is capable to update the turbine blade finite element model by variation of elasticity modulus in contact areas taking into account the experimental modal parameters scatter. It is worth noting that elasticity modulus of finite elements near the contact area should be considered as unknown contact stiffness parameters.

The stochastic updating algorithm based on the sensitivity analysis is proposed. The paper presents equations to define sensitivity coefficients and provides the special recurrence relations, on which the proposed algorithm is based. The eigenvalue problem is resolved repeatedly with system parameters changing during the algorithm implementation. The system parameters (elasticity modulus in the contact areas) are recalculated according to the recurrence relations, mentioned above. To implement the proposed algorithm, a special software in C++ language has been developed.

The proposed algorithm has demonstrated its efficiency for updating the finite element model of the complex structure. Thus, the differences between the calculated eigenfrequencies and those of identified from modal testing have been reduced from 13% to 3%. The updated model of the turbine blade could be used for accurate simulation of the blade dynamic behavior under different operating conditions.

References

1. Ewins D.J. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. 2nd edition. Baldock, Research Studies Press LTD, 2000.
2. Heylen W., Lammens S., Sas P. *Modal Analysis Theory and Testing*. Leuven, KUL Press, 1997.
3. Brown D.L., Allemang R.J., Zimmerman R., Mergeay M. *Parameter estimation techniques for modal analysis*. SAE Technical Paper No. 790221. SAE, 1979. 19 p. DOI: [10.4271/790221](https://doi.org/10.4271/790221)
4. Collins J.D., Hart G.C., Hasselman T.K., Kennedy B. Statistical Identification of Structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1974, vol. 12, no.2, pp. 185-190. DOI: [10.2514/3.49190](https://doi.org/10.2514/3.49190)
5. Katafygiotis L.S., Papadimitriou C., Lam H.-F. A probabilistic approach to structural model updating. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1998, vol. 17, is. 7-8, pp. 495-507. DOI: [10.1016/S0267-7261\(98\)00008-6](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(98)00008-6)
6. Mares C., Mottershead J.E., Friswell M.I. Stochastic model updating: Part 1 — theory and simulated example. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006, vol. 20, no. 7, pp. 1674-1695. DOI: [10.1016/j.ymssp.2005.06.006](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2005.06.006)
7. Mottershead J.E., Mares C., James S., Friswell M.I. Stochastic model updating: Part 2 - application to a set of physical structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006, vol. 20, no. 8, pp. 2171-2185. DOI: [10.1016/j.ymssp.2005.06.007](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2005.06.007)
8. Mottershead J.E., Link M., Friswell M.I. The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, vol. 25, no. 7, pp. 2275-2296. DOI: [10.1016/j.ymssp.2010.10.012](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.10.012)
9. Behmanesh I., Moaveni B. Bayesian FE Model Updating in the Presence of Modeling Errors. *Model Validation and Uncertainty Quantifications. Vol. 3*. Springer International Publishing, 2014, pp. 119-133. DOI: [10.1007/978-3-319-04552-8_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-04552-8_12)
10. Huang X., Zuo Z.H., Xie Y.M. Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies. *Computers and Structures*, 2009, vol. 88, no. 5, pp. 357-364. DOI: [10.1016/j.compstruc.2009.11.011](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.11.011)