Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Электрон. журн. 2015. № 08. С. 128–136.

DOI: **10.7463/0815.0800424**

Представлена в редакцию: 30.04.2015
Исправлена: 22.05.2015

УДК 517.968.21

Специальный вариант метода моментов для интегральных уравнений Фредгольма второго рода

Соловьева С. А.[1,*]

[*]solovjeva_sa@mail.ru

[1]Набережночелнинский институт
Казанского федерального университета,
Набережные Челны, Россия

В предлагаемой заметке исследовано линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Для приближенного решения в пространстве гладких функций предложен и теоретически обоснован новый вариант метода моментов. Полученная в статье оценка хорошо согласуется с оценкой для обычного метода моментов для уравнений второго рода в пространстве непрерывных функций. Разработанный метод устойчив относительно малых возмущений исходных данных. Если уравнение второго рода хорошо обусловлено, то приближенное уравнение также хорошо обусловлено. Показано, что построенный метод является оптимальным по порядку точности среди всех полиномиальных проекционных методов решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве гладких функций.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма второго рода, приближенное решение, метод моментов, теоретическое обоснование

Введение

Рассмотрим линейное интегральное уравнение второго рода (УВР)

$$(Ax)(t) \equiv x(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I \equiv [0,1]), \tag{1}$$

где $(Kx)(t) \equiv \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s) \in C^{(m)}(I^2)$, $y(t) \in C^{(m)}(I)$ – известные функции, а $x(t) \in C^{(m)}(I)$ – искомая функция.

Уравнения Фредгольма второго рода возникают во многих областях современной математики и ее приложений. В качестве иллюстрации можно привести работы [1]–[5] и многие другие.

Теория точных и приближенных методов решения УВР достаточно хорошо разработана. Полученные результаты можно найти, например, в справочных пособиях Иванова В.В., Верланя А.Ф. и Сизикова В.С.

Однако установлено [6], что по норме пространства непрерывно дифференцируемых функций классические проекционные методы дают более низкую точность приближения, чем по норме пространства непрерывных функций. В работе [7] дано обоснование специального варианта метода коллокации решения уравнений вида (1) в указанном пространстве, и установлена его неулучшаемость по порядку. В статье [8] предложенные идеи применены для разработки варианта метода коллокации, основанного на интерполяционных многочленах Эрмита–Фейера.

В данной заметке разработан и теоретически обоснован в смысле [9, гл. 1] специальный вариант метода моментов решения уравнения (1) в пространстве гладких функций, при этом были использованы результаты и методы работ [7]–[8], [10]–[13]. Более того, установлено, что построенный метод является оптимальным по порядку среди всевозможных полиномиальных прямых проекционных методов решения уравнения вида (1).

Структура работы следующая. В первой части введено используемое в дальнейших исследованиях функциональное пространство, построены элементы теории приближения в нем; во второй – разработан метод приближенного решения; наконец, третья часть посвящена вопросам оптимизации.

1. Основное пространство

Пусть $C = C(I)$ – класс функций, непрерывных на отрезке *I*, с чебышевской нормой. Через $Y = C^{(m)}$ $(m \in N \bigcup \{0\})$ будем обозначать пространство функций, имеющих непрерывную производную порядка *m*. Очевидно, что $C^{(0)} = C$. Следуя [10], введем в этом пространстве норму

$$\|y\|_Y = \|Dy\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} \left| y^{(i)}(0) \right| \qquad (y \in Y), \tag{2}$$

где $D\varphi \equiv \varphi^{(m)}(t)$ $(\varphi \in Y)$. При $m = 0$ считаем, что $Dy = y$ и $\|y\|_Y = \|y\|_C$. Известно (например, [10]), что функции из *Y* имеют вид

$$y(t) = \Phi(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i , \tag{3}$$

где $\Phi(t) = (JDy)(t) \in Y$ $(y \in Y)$, $(J\varphi)(t) \equiv \dfrac{1}{(m-1)!}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{m-1}\varphi(s)ds$ $(\varphi \in C)$, $\tilde{n}_i = y^{(i)}(0)/i!$ $(i = \overline{0, m-1})$. При $m = 0$ возьмем $J\varphi = \varphi$. Кроме того, *Y* по норме (2) вложено в *C* и полно (например, [9]).

Если $\theta(t,s) \in Y$ по переменной *s* равномерно относительно *t*, то будем писать, что $\theta(t,s) \in Y_s$. Обозначим также через H_l класс полиномов степени не выше *l*.

При обосновании специального варианта метода моментов важную роль будет играть

Лемма 1. Пусть $\theta(t,s)\in Y_s$, $n\in N$. Тогда найдется такая функция $\psi(t,s)=$ $=\psi(t,s;n)\in Y_s$, что будет справедлива оценка

$$\left|(\theta-\psi)(t,s)\right| \le \varepsilon_{n-1}^{t}(\theta) \quad (t,s\in I),$$

где $\varepsilon_{n-1}^{t}(\theta)=E_{n-1}^{t}(h)+\sum_{i=0}^{m-1}E_{n-1}(g_i)$, $h(t,s)=(D_s\theta)(t,s)$, $g_i(t)=\theta_s^{(i)}(t,0)$ $(i=\overline{0,m-1})$, $E_{n-1}(\varphi)$ – наилучшее равномерное приближение непрерывной функции $\varphi(t)$ многочленами степени не выше $n-1$ $(n\ge 1)$.

Доказательство. В силу (3) имеем

$$\theta(t,s)=(J_s h)(t,s)+\sum_{i=0}^{m-1}g_i(t)s^i/i!. \tag{4}$$

Далее, пусть $h_{n-1}^{t}(t,s)$ и $g_{n-1}^{i}(t)$ – алгебраические многочлены степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для функций $h(t,s)$ (по аргументу t) и $g_i(t)$ $(i=\overline{0,\ m-1})$ соответственно. Рассмотрим функцию

$$\psi(t,s)\equiv(J_s h_{n-1}^{t})(t,s)+\sum_{i=0}^{m-1}g_{n-1}^{i}(t)\,s^i/i!\in H_{n+m-1}^{t}. \tag{5}$$

Тогда из (4) и (5) следует требуемая оценка:

$$\left|(\theta-\psi)(t,s)\right|=\left|\frac{1}{(m-1)!}\int_0^t(t-s)^{m-1}(h(t,s)-h_{n-1}^{t}(t,s))ds+\sum_{i=0}^{m-1}(g(t)-g_{n-1}^{i}(t))s^i/i!\right|\le$$

$$\le E_{n-1}^{t}(h)+\sum_{i=0}^{m-1}E_{n-1}(g_i).$$

Пусть линейный оператор $F_n^D\equiv F_{n+m}^D: Y\to H_{n+m-1}$ определен по правилу

$$(F_n^D y)(t)=(JF_nDy)(t)+\sum_{i=0}^{m-1}y^{(i)}(0)t^i/i!, \tag{6}$$

где $F_n: C\to H_{n-1}$ – отображение Фурье по системе смещенных многочленов Чебышева первого рода

$$\tilde{T}_j(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(j\arccos(2t-1)) \quad (j=\overline{1,n-1}),\quad \tilde{T}_0(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \tag{7}$$

система $\tilde{T}_j(t)$ $(j=\overline{0,n-1})$ ортонормированна на отрезке I по весу

$$\rho(t)=\frac{1}{2}(t-t^2)^{-1/2}. \tag{8}$$

Справедлива следующая

Лемма 2. Если $y\in Y$, то

а) $(F_n^D)=F_n^D$;

б) $\left\|F_n^D\right\|_{Y\to H_{n+m-1}}\succ\prec\ln n \quad (n-1\in N)$;

в) $\left\| y - F_n^D y \right\|_Y = O\big(E_{n-1}(Dy)\ln n\big) \quad (y \in Y);$

г) $E_{n+m}(y) = E_n(Dy)$,

где символ $\succ\prec$ означает слабую эквивалентность.

Доказательство аналогично доказательству соответствующих результатов в [10]–[12], при этом существенно используются соотношения (2), (3) и (6).

2. Обобщенный метод моментов

Пусть исходные данные в УВР (1) удовлетворяют условиям

$$(D_t K)(t,s) \in C(I^2), \quad y \in Y, \tag{9}$$

а $x \in Y$ – искомая функция вида (3).

Решение $x^* \equiv A^{-1}y$ уравнения (1) приближаем многочленом

$$x_n(t) = (Jz_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_{n+i} t^i, \quad z_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \quad (n \in N). \tag{10}$$

Очевидно, что $x_n(t) \in H_{n+m-1}$. В соответствии с предлагаемым методом неизвестные параметры c_i $(i = \overline{0, n+m-1})$ находим из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \int_0^1 \rho(t)(DAx_n - Dy)(t)\widetilde{T}_k(t)dt = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}); \\ (Ax_n - y)^{(i)}(0) = 0 \quad (i = \overline{0, m-1}). \end{cases} \tag{11}$$

Проведем обоснование вычислительной схемы (1), (9)–(11)

Теорема 1. Пусть ядро интегрального оператора *A* уравнения (1) тривиально, а функции $h(t,s) = (D_s\theta)(t,s) = (D_s D_t K)(t,s)$, $g_i(t) = (D_t K)_s^{(i)}(t,0)$ и $(Dy)(t)$ принадлежат классу Дини-Липшица. Тогда найдется такой номер *N*, что при $n > N$ приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные на основе условий (10), (11), существуют, единственны и сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (1) по норме пространства *Y*, причем

$$\left\| x^* - x_n^* \right\|_Y = O\left\{ \left(E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) + E_{n-1}(Dy) \right) \ln n \right\}. \tag{12}$$

Доказательство. Линейное интегральное уравнение (1) будем рассматривать как операторное уравнение вида

$$Ax \equiv x + Kx = y \quad (x, y \in Y). \tag{13}$$

Обозначим через $Y_n \subset Y$ класс H_{n+m-1} полиномов y_n степени не выше $n+m-1$. Тогда система уравнений (10)–(11) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv F_n^D A x_n = x_n + F_n^D K x_n = F_n^D y \quad (x_n, F_n^D y \in Y_n). \tag{14}$$

В самом деле, пусть x_n^* – решение уравнения (14), т.е.

$$F_n^D (Ax_n^* - y) \equiv 0.$$

Отсюда в силу (6) получаем:

$$(JF_n D(Ax_n^* - y))(t) + \sum_{i=0}^{m-1} (Ax_n^* - y)^{(i)}(0) t^i / i! \equiv 0$$

или

$$(F_n D(Ax_n^* - y))(t) \equiv 0; \quad (Ax_n^* - y)^{(i)}(0) = 0 \quad (i = \overline{0, m-1}). \tag{15}$$

Для доказательства того, что система (15) преобразуется в операторное уравнение (14), необходимо провести те же самые выкладки, только в обратном порядке.

Покажем теперь, что операторы A и A_n близки на Y_n. Учитывая (13), (14) и лемму 2, для любого элемента $x_n \in Y_n$ получим

$$\left\| Ax_n - A_n x_n \right\|_Y = \left\| Kx_n - F_n^D Kx_n \right\|_Y = O(E_{n-1}(DKx_n) \ln n). \tag{16}$$

С целью оценки величины $E_{n-1}(DKx_n)$ построим функцию

$$(\Psi x_n)(t) \equiv \int_0^1 \psi(t,s)\, x_n(s)\, ds = \int_0^1 \psi(t,s)\,(Jz_n)(s) ds + \sum_{i=0}^{m-1} c_{n+i} \int_0^1 \psi(t,s)\, s^i\, ds, \tag{17}$$

где $\psi(t,s)$ взята на основании леммы 1. По виду $\psi(t,s)$ видно, что $(\Psi x_n)(t) \in H_{n+m-1}$. Теперь, используя (3), (17) и лемму 1, последовательно выводим

$$E_{n-1}(DK\, x_n) \le \left\| DK\, x_n - \Psi\, x_n \right\|_C = \max_{t \in I} \left| \int_0^1 (\theta - \psi)\,(t,s)\,(Jz_n)(s)\, ds + \sum_{i=0}^{m-1} c_i \int_0^1 (\theta - \psi)(t,s) s^i ds \right| \le$$

$$\le \varepsilon_{n-1}^t(\theta) \left(\left\| z_n \right\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} \left| c_i \right| \right) = \varepsilon_{n-1}^t(\theta) \left\| x_n \right\|_Y. \tag{18}$$

Следовательно, из (16) и (18) получим

$$\varepsilon^{(n)} \equiv \left\| A - A_n \right\|_{Y_n \to Y} = O\left\{ \left(E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(g_i) \right) \ln n \right\}. \tag{19}$$

Поскольку функции $h(t,s)$ (по t) и $g_i(t)$ $(i = \overline{0, m-1})$ удовлетворяют условию Дини-Липшица, то на основании теоремы Джексона (например, [14, с. 86]) получим, что $\varepsilon^{(n)} = o(1)$ $(n \to \infty)$. Поэтому из теоремы 7 [9, с.19] при всех n таких, что $q_n \equiv \left\| A^{-1} \right\| \varepsilon^{(n)} < 1$, следует непрерывная обратимость операторов $A_n : Y_n \to Y_n$ и ограниченность по норме обратных операторов:

$$\left\| A_n^{-1} \right\| \;\le\; \left\| A^{-1} \right\| (1 - q_n)^{-1} \quad (A_n^{-1} : Y_n \to Y_n).$$

Правые части уравнений (13) и (14) в силу леммы 2 удовлетворяют условию

$$\nu^{(n)} \equiv \left\| y - F_n^D y \right\|_Y = O(E_{n-1}(Dy) \ln n). \tag{20}$$

Теперь благодаря неравенствам (19), (20) и теореме Джексона (например, [14, с. 86]) из теоремы 7 [9, с.19] следуют утверждения теоремы 1 с оценкой (12).

Следствие 1. Пусть функции $h(t,s)$ (по t), $g_i(t)$ ($i=\overline{0,m-1}$), $(Dy)(t)$ r раз непрерывно дифференцируемы на I и производные $h_t^{(r)}(t,s)$ (ïî t), $g_i^{(r)}(t)$, $(Dy)^{(r)}(t)$ $\in Lip\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$. Тогда в условиях теоремы 1 справедлива оценка

$$\left\| x^* - x_n^* \right\|_X = O(n^{-r-\alpha}\ln n) \quad (r = 0,1,2,\ldots).$$

Для приложений может быть удобной

Теорема 2. Если УВР (1) обладает решением вида (3) при данной правой части $y\in Y$ и приближающий оператор $A_n = F_n^D A$ имеет непрерывный обратный, то погрешность приближенного решения $x_n^*\in Y_n$ для правой части $y_n = F_n^D y \in Y_n$ можно представить в виде

$$\left\| x_n^* - x^* \right\|_Y = O(E_{n-1}(z^*)\ln n).$$

Доказательство. Поскольку $A_n \equiv F_n^D A$, то в силу теоремы 5 [9, гл. 1] имеем

$$\left\| x^* - x_n^* \right\|_Y = \left\| (E - A_n^{-1} F_n^D A)(x^* - x_n) \right\|_Y , \tag{21}$$

где E – единичный оператор в пространстве Y, а x_n – пока неизвестный элемент, который выберем так, чтобы правая часть равенства (21) была минимальной, а именно, возьмем $x_n \in Y$ такой, что

$$\left\| x^* - x_n \right\|_Y = \inf_{f_n \in H_{n+m-1}} \left\| x^* - f_n \right\|_Y \equiv E_{n+m-1}(x^*).$$

Тогда из (21) и леммы 2 следует доказываемое утверждение.

Следствие 2. Пусть в условиях теоремы 2 компонента $z_n^*(t)$ решения $x_n^*(t)$ УВР (1) принадлежит классу Дини-Липшица. Тогда последовательность $\{x_n^*(t)\}$ сходится к точному решению $x^*(t)$ по метрике пространства Y.

Замечание. Так как $\tilde{N}^{(0)} = \tilde{N}$, то при $m=0$ уравнение (1) преобразуется в аналогичное уравнение в пространстве C, а предложенный в статье метод превращается в известный метод моментов, причем $h(t,s) = K(t,s)$, $(Dy)(t) = y(t)$ и оценка (12) хорошо согласуется с известной оценкой [13] метода моментов решения уравнений второго рода в классе C.

В заключение данного пункта отметим следующие важные для приложений факты.

Теорема 3. В условиях теоремы 1 справедливы утверждения: обобщенный метод моментов для уравнения (1) устойчив относительно малых возмущений элементов системы (11); если уравнение (1) хорошо обусловлено, то аппроксимирующее уравнение (14) тоже хорошо обусловлено.

Доказательство следует из теорем 11, 13 [9, с. 23–25] с учетом того, что при выполнении условий теоремы 1 операторы, обратные к операторам A_n, ограничены по норме в совокупности (хотя бы при достаточно больших n).

3. Оптимизация проекционных методов решения УВР

Пусть Y – банахово пространство, а Y_n – его произвольное подпространство, $\dim Y_n = = N = N(n)$, причем $N \to \infty \quad (n \to \infty)$. Пусть $\Im_n \equiv \{\Gamma_n\}$ – совокупность линейных операторов $\Gamma_n : Y \to Y_n$. Рассмотрим классы линейных операторных уравнений, каждое из которых имеет одно и только одно решение:

$$Ax = y \quad (x, y \in Y) \, , \tag{22}$$

$$\Gamma_n A x_n = \Gamma_n y \quad (x_n \in X_n, \Gamma_n \in \Im_n, n \in N) \, . \tag{23}$$

Пусть, далее, $x^* \in Y$ и $x_n^* \in Y_n$ – соответственно решения уравнений (22) и (23), а $\Phi \equiv \{f\}$ – множество коэффициентов уравнения (22), которое порождает класс $Y^* = \{x^*\}$ искомых функций.

Следуя [9, с. 40], величину

$$V_N(\Phi) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{\Gamma_n \in \Im_n} V(\Phi; \Gamma_n; Y_n) \, , \tag{24}$$

где

$$V(\Phi;\Gamma_n;Y_n) \equiv \sup_{f\in\Phi} V(f;\Gamma_n;Y_n) = \sup_{x^*\in X^*} \left\| x^* - x_n^* \right\|_X \, ,$$

будем называть оптимальной оценкой погрешности всевозможных прямых проекционных методов $(\Gamma_n \in \Im_n)$ решения уравнения (22) на классе Φ.

Пусть существует пространство $Y_n^0 \subset Y$ размерности $N(n) < \infty$ и операторы $\Gamma_n^0 : Y \to Y_n^0 \;\; (\Gamma_n^0 \in \Im_n)$, при которых

$$V_N(\Phi) \succ\prec V(\Phi; \Gamma_n^0; Y_n^0) \quad (N \to \infty). \tag{25}$$

Тогда метод (22)–(23) при $Y_n = Y_n^0, \Gamma_n = \Gamma_n^0$ называется оптимальным по порядку на классе Φ среди всевозможных прямых проекционных методов Γ_n $(\Gamma_n \in \Im_n)$ решения уравнений (22) [9, с. 40]).

Рассмотрим оптимизацию на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in \Phi$) УВР (1) при $K(t,s)$ (по t), $y(t) \in H_\omega^{m+r} \equiv \{ f \in C^{(m+r)}(I) \,|\, \omega(f^{(m+r)};\Delta) \le \omega(\Delta) \}$, где $\omega = \omega(\Delta)$ – некоторый заданный модуль непрерывности, $r = 0,1,2,\ldots$ Тогда имеем

$$X^* \equiv \{x^* \in Y \mid Ax^* = y;\; K\,(\text{ïî}\;\; t), y \in H_\omega^{m+r}\} = H_{\omega^*}^{m+r} \qquad (\omega^* \ge \omega) \, .$$

Пусть, далее, $Y_n^0 \equiv H_{n+m-1}$, а $\Im_n \equiv \Im_n^{(2)}$ – семейство всех полиномиальных проекционных $(\Gamma_n^2 = \Gamma_n)$ операторов $\Gamma_n : Y \to Y_n^0$, удовлетворяющих условию $\left\|\Gamma_n\right\| n^{-r} \omega(n^{-1}) = o(1) \;\; (n \to \infty)$.

Теорема 4. Если $\Phi = H_\omega^{m+r}$, $\Im_n = \Im_n^{(2)}$, то

$$V_N(\Phi) \succ\prec N^{-r} \omega(N^{-1}) \ln N \quad (N = n + m) \tag{26}$$

и обобщенный метод моментов оптимален на классе Ф среди всевозможных полиномиальных прямых проекционных методов решения УВР (1).

Доказательство. В соответствии с результатами пунктов 1 и 2 обобщенный метод моментов порождает проекционный оператор $\Gamma_n^0 = F_n^D : Y \to Y_n^0$, причем в силу леммы 2 $F_n^D \in \mathfrak{I}_n^{(2)}$. Далее, учитывая теорему 2 и теорему Джексона (например, [14, с. 86]), последовательно получим:

$$V_N(\Phi) \le V(\Phi; F_n^D;\ Y_n^0) = \sup_{x^* \in H_{\omega^*}^{m+r}} \left\| x^* - x_n^0 \right\|_Y = O(E_{n-1}(z^*) \ln n) =$$

$$= O(n^{-r}\, \omega(n^{-1}) \ln n) = O(N^{-r}\, \omega(N^{-1}) \ln N) \quad (F_n^D A x_n^0 \equiv F_n^D y). \tag{27}$$

Для получения нижней оценки воспользуемся тем, что УВР (1) при $K(t,s) \equiv 0$ принадлежит рассматриваемому классу однозначно разрешимых в пространстве Y уравнений. Имеем:

$$V_N(\Phi) \ge \inf_{\Gamma_n \in \mathfrak{I}_n^{(2)}} \sup_{x^* \in H_{\omega^*}^{m+r}} \left\| x^* - x_n^* \right\|_X = \inf_{\Gamma_n \in \mathfrak{I}_n^{(2)}} \sup_{y \in H_\omega^{m+r}} \left\| y - F_n^D y \right\|_Y =$$

$$= \inf_{\Gamma_n \in \mathfrak{I}_n^{(2)}} \sup_{y \in H_\omega^{m+r}} \left\| Dy - DF_n^D y \right\|_C = \inf_{P_n \in \mathrm{P}_n^{(2)}} \sup_{Dy \in H_\omega^{r}} \left\| Dy - F_n D y \right\|_C, \tag{28}$$

где $\mathrm{P}_n^{(2)} \equiv \{P_n\}$ – множество алгебраических полиномиальных операторов $P_n : C \to H_{n-1}$, удовлетворяющих условию $P_n^2 = P_n$ и обладающих свойством $\left\| P_n \right\| n^{-r}\, \omega(n^{-1}) \to 0 \quad (n \to \infty)$. Из леммы 2 ясно, что $\Gamma_n \in \mathfrak{I}_n^{(2)} \iff P_n \in \mathrm{P}_n^{(2)}$. Так как ([9, с. 171])

$$\inf_{P_n \in \mathrm{P}_n^{(2)}} \sup_{z \in H_\omega^r} \left\| z - P_n z \right\|_C \ \ge\ d_1 n^{-r}\, \omega(1/n) \ln n, \tag{29}$$

то из (28) и (29) получаем нижнюю оценку

$$V_N(\Phi) \ \ge\ d_2\, N^{-r}\, \omega(1/N) \ln N. \tag{30}$$

Из соотношений (25), (27) и (30) следует утверждение теоремы с оценкой (26).

Следствие 3. Пусть $\Phi \equiv H_\alpha^{m+r}(M) \quad (0 < \alpha \le 1,\ r = 0,1,\ldots)$. Тогда верна оценка

$$V_N(\Phi) \succ\!\!\prec M\, N^{-r-\alpha} \ln N \quad (N = n + m),$$

и этот оптимальный порядок реализует предложенный выше вариант метода моментов.

Заключение

В статье разработан специальный вариант метода моментов, приспособленный к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве гладких функций. Кроме того, установлено, что рассмотренный метод является устойчивым относительно малых возмущений исходных данных и оптимальным по порядку точности среди всех полиномиальных прямых проекционных методов. Для теоретического обоснования был использован предложенный Габдулхаевым Б.Г. вариант общей теории приближенных методов анализа.

Полученные в работе оценки хорошо согласуются с известными результатами по решению уравнений второго рода в классе непрерывных функций.

Использованные идеи и методы могут быть применены при разработке ряда новых полиномиальных и сплайновых методов решения уравнения (1) в пространстве гладких функций.

Список литературы

1. Zhong X.-C., Huang Q.-A. Approximate Solution of Three-Point Boundary Value Problems for Second-Order Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 247, no. 11. Pp. 18–29. DOI: 10.1016/j.amc.2014.08.076
2. Широкова Е.А. О приближенном конформном отображении единичного круга на односвязную область // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 57-67.
3. Александров В.М., Пожарский Д.А. Задачи о разрезах в составном упругом клине // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 143–149.
4. Крутицкий П.А., Прозоров К.В. Задача для уравнения диффузии вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на противоположных сторонах разрезов // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1219–1223.
5. Yilbas B.S., Al-Dweik A.Y., Mansoor S.B. Non-equilibrium Energy Transport in a Thin Metallic Film: Analytical Solution for Radiative Transport Equation // Physica B: Condensed Matter. 2014. Vol. 454, no. 12. P. 15–22. DOI: 10.1016/j.physb.2014.07.021
6. Габдулхаев Б.Г. Заметка об общей теории приближенных методов анализа // Учёные записки Казан. гос. ун-та. Т. 125, кн. 2. Функциональный анализ и теория функций, сб. 3. Казань: КГУ, 1965. С. 18–31.
7. Габбасов Н.С., Касакина И.П. К численному решению интегральных уравнений второго рода в классе гладких функций // Всероссийская научная конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 26–28 мая 2004 г.): тр. Ч. 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Самара: Изд-во СамГТУ, 2004. С. 48–51.
8. Соловьева С.А. К вопросу о решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Научно-технический вестник Поволжья. 2014. № 1. С. 37–40.
9. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во КГУ, 1980. 232 с.
10. Габбасов Н.С. Коллокационный метод решения интегральных уравнений первого рода в классе обобщенных функций // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 2. С. 12–20.

11. Габбасов Н.С. К теории интегральных уравнений третьего рода // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1192–1201.
12. Габбасов Н.С., Соловьева С.А. Обобщенный метод моментов для одного класса интегральных уравнений третьего рода // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 10. С. 1416–1423.
13. Габдулхаев Б.Г. Некоторые вопросы приближенных методов // Учёные записки Казан. гос. ун-та. Т. 128, кн. 5. Функциональный анализ и теория функций, сб. 5. Казань: КГУ, 1968. С. 20–29.
14. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.

Science & Education of the Bauman MSTU Electronic journal ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2015, no. 08, pp. 239–251.

DOI: **10.7463/0815.0800424**

Received: 30.04.2015
Revised: 22.05.2015

A Special Variant of the Moment Method for Fredholm Integral Equations of the Second Kind

S.A. Solov'eva[1,*]

[*]solovjeva_sa@mail.ru

[1]Kazan Federal University Naberezhnye Chelny Institute, Naberezhnye Chelny, Russia

Keywords: Fredholm integral equation of the second kind, the approximate solution, moment method , the the-oretical substantiation

We consider the linear Fredholm integral equation of the second kind, where the kernel and the free term are smooth functions. We find the unknown function in this class as well.

Exact and approximate methods for the solution of linear Fredholm integral equations of the second kind are well developed. However, classical methods do not take into account the structural properties of the kernel and the free term of equation.

In this paper we develop and justify a special variant of the moment method to solve this equation, which takes into account the differential properties of initial data. The proposed paper furthers studies of N.S Gabbasov, I.P. Kasakina, and S.A Solov'eva. We use approximation theory, version of the general theory of approximate methods of analysis that Gabdulkhayev B.G suggested, and methods of functional analysis to prove theorems. In addition, we use N.S. Gabbasov's ideas and methods in papers that are devoted to the Fredholm equations of the first kind, as well as N.S. Gabbasov and S.A Solov'eva's investigations on the Fredholm equations of the third kind in the space of distributions.

The first part of the paper provides a description of the basic function space and elements of the theory of approximation in it.

In the second part we propose and theoretically justify a generalized moment method. We have demonstrated that the improvement of differential properties of the initial data improves the approximation accuracy. Since, in practice, the approximate equations are solved, as a rule, only approximately, we prove the stability and causality of the proposed method. The resulting estimate of the paper is in good agreement with the estimate for the ordinary moment method for equations of the second kind in the space of continuous functions.

In the final section we have shown that a developed method is optimal in order of accuracy among all polynomial projection methods to solve Fredholm integral equations of the second kind in the space of smooth functions.

We recommend using a developed method in case when the initial data are continuously differentiable functions, and moreover, the accuracy of the approximate solution is necessary to estimate by the norm of the space of smooth functions.

Similarly, we can develop other polynomial and spline methods for the approximate solution.

References

1. Zhong X.-C., Huang Q.-A. Approximate Solution of Three-Point Boundary Value Problems for Second-Order Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 247, no. 11, pp. 18–29. DOI: 10.1016/j.amc.2014.08.076
2. Shirokova E.A. On the Approximate Conformal Mapping of the Unit Disk on a Simply Connected Domain. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*, 2014, no. 3, pp. 57–67. (English translation of journal: *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 47–57. DOI: 10.3103/S1066369X14030050).
3. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. Problems of Cuts in a Composite Elastic Wedge. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2009, Vol. 73, no. 1, pp. 143–149. (English translation of journal: *Journal of Applied mathematics and mechanics*, 2009, Vol. 73, no. 1, pp. 103–108. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.003).
4. Krutitskii P.A., Prozorov K.V. Problem for the Diffusion Equation Outside Cuts on the Plane with the Dirichlet Condition and an Oblique Derivative Condition on Opposite Sides of the Cuts. *Differentcial'nye uravneniya*, 2012, vol. 48, no. 2, pp. 1219–1223. (English translation of journal: *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1197–1211. DOI: 10.1134/S0012266112090017).
5. Yilbas B.S., Al-Dweik A.Y., Mansoor S.B. Non-equilibrium Energy Transport in a Thin Metallic Film: Analytical Solution for Radiative Transport Equation. *Physica B: Condensed Matter*, 2014, vol. 454, no. 12, pp. 15–22. DOI: 10.1016/j.physb.2014.07.021
6. Gabdulkhayev B.G. A Note on the General Theory of Approximate Methods шт Analysis. *Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet. Uchenye Zapiski. Vol. 125, book 2. Functional analysis and theory of functions, no. 3.* Kazan, KSU Publ., 1965, pp. 18-31. (in Russian).
7. Gabbasov N.S., Kasakina I.P. K On the Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind in the Class of Smooth Functions. *Vserossiiskaya nauchnaya konferentsiya "Matematicheskoye modelirovaniye i krayevye zadachi": tr. Ch. 3. Differentcial'nye uravneniya i kraevye zadachi* [Proceedings of the All-Russian Science Conference on Mathematical Modeling and Boundary Problems. Pt. 3. Differential Equations and Boundary Value Problems]. Samara, SSTU Publ., 2004, pp. 48–51 (in Russian).
8. Solov'eva S.A. On the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya = Scientific and Technical Volga region Bulletin*, 2014, no. 1, pp. 37–40 (in Russian).
9. Gabdulkhayev B.G. *Optimal'nye approksimatcii reshenii lineynykh zadach* [Optimal approximations of solutions of linear problems]. Kazan, KSU Publ., 1980, 232 p. (in Russian).

10. Gabbasov N.S. The collocation method for solving integral equations of the first kind in the class of generalized functions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*, 1993, no. 2, pp. 12–20. (English translation of journal: *Russian Mathematics*, 1993, vol. 37, no. 3, pp. 10–18.).
11. Gabbasov N.S. A Note on the Theory of Linear Integral Equations of the Third Kind. *Differentsial'nye uravneniya*, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1192–1201. (English translation of journal: *Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1194–1203.).
12. Gabbasov N.S., Solov'eva S.A. Generalized Moment Method for a Class of Integral Equations of the Third Kind. *Differentsial'nye uravneniya*, 2006, vol. 42, no. 10, pp. 1416–1223. (English translation of journal: Differential Equations, 2006, vol. 42, no. 10, pp. 1490–1498. DOI: 10.1134/S0012266106100132).
13. Gabdulkhayev B.G. Certain questions of approximate methods. *Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet. Uchenye Zapiski. Vol. 128, book 5. Functional analysis and theory of functions, no. 5*. Kazan, KSU Publ., 1968, pp. 20–29. (in Russian).
14. Daugavet I.K. *Vvedeniye v teoriyu priblizheniya funktcii* [An Introduction to the theory of approximation of functions]. Leningrad, LSU Publ., 1977. 184 p. (in Russian).