

УДК 532.5.01

Моделирование осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения посредством механического аналога

Гончаров Д. А.^{1,*}, Пожалостин А. А.¹,
Кокушкин В. В.²

* goncharov@bmstu.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
²РКК «Энергия» им. С.П. Королева, Королев, Россия

Изложено приближенное аналитическое решение краевой задачи о малых свободных осесимметричных колебаниях упругого бака с жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения. Составлены выражения для колебаний механического аналога, действие сил поверхностного натяжения учтено как действие обобщенных потенциальных сил на механический аналог, фактически, с помощью энергетического метода учтены капиллярные силы на свободной поверхности. В качестве механического аналога рассматривается осциллятор на пружине, жесткость которой определяется энергетическим методом. Учет сил поверхностного натяжения имеет существенное значение в условиях малой гравитации и невесомости.

Ключевые слова: жидкость; колебания; поверхностное натяжение; осциллятор; механический аналог

Введение

Задача о малых движениях жидкости под действием сил поверхностного натяжения возникает в связи с возникновением условий невесомости или микрогравитации, что реализуется на пассивных участках траектории космических летательных аппаратов или при разделении ступеней ракет-носителей [1]. Возросшая актуальность задачи обусловлена интенсификацией работ в области проектирования и создания перспективных средств выведения и разгонных блоков, как в нашей стране, так и за рубежом [2]. Исследованию поведения жидкости в условиях невесомости или микрогравитации посвящено множество публикаций и монографий, из работ последнего времени можно отметить, например, [3], где также рассматривается движение механического аналога, применительно к процессам кипения жидкости в условиях невесомости. В работе [4] исследуется линейная неустойчивость равновесия плоского горизонтального слоя неоднородно нагретой жидкости относительно колебательных возмущений. В ставшей уже классической работе [5] изложены результаты,

полученные в ходе экспериментальных изысканий в том числе в условиях невесомости, проведенных на долговременных орбитальных станциях. В серии работ [6], [7], [8] затрагивались вопросы движения жидкости в подвижном сосуде с локальными нерегулярностями на дне, выполнялось построение механического аналога таких движений. В рамках работ по НИР [9] решена задача управления одномерным движением сосуда с тяжелой неоднородной жидкостью посредством силы, приложенной к стенке. Построен синтез оптимального по быстродействию торможения вращений твердого тела с полостью, содержащей сильно вязкую жидкость (при малых числах Рейнольдса), и линейный демпфер большой жесткости; полностью изучена картина управляемого движения. Исследовано влияние излучения капиллярных волн на колебания осциллятора, находящегося под поверхностью неограниченной жидкости. В строгой постановке исследована задача о перемещении тела на упругой связи (осциллятора) под поверхностью тяжелой жидкости; обнаружены качественные эффекты. В статье [10] приводится математическая модель движения КА с колеблющимися в баках КА жидкими компонентами топлива. Для моделирования колебаний жидких компонентов топлива в баках использован «механический аналог» колебаний жидкости — колебания сферических маятников. Все дифференциальные уравнения записаны в векторной форме в декартовых координатах. Обсуждаются отличия приведенной модели от известных. Обсуждается применение приведенной модели для имитационного моделирования движения КА. В статье [11] предложена методика определения динамического давления автоцистерны на проезжую часть при торможении с учетом подвижности жидкости, что является актуальным в связи с ее повышенным динамическим воздействием на путь. Разработана динамическая модель автоцистерны, в которой плоская динамическая модель автомобиля дополнена механической моделью жидкого груза. В работе [12] разработана динамическая модель автоцистерны с учетом деления котла на отсеки. Для моделирования продольных колебаний жидкости использовался механический аналог, расчет параметров которого был выполнен с учетом возможности появления гидроудара. В работе [13] описывается методика определения параметров механической модели движения жидкости в баке при вращении относительно продольной его оси с использованием результатов испытаний бака с жидкостью в режиме свободных колебаний. Путем сравнения экспериментальных данных и результатов математического моделирования поведения механического аналога жидкости в виде твердых вкладышей находятся параметры, характеризующие влияние ее подвижности на движение бака. Примечательна работа [14], где на основе результатов испытаний бака с жидкостью в режиме свободных колебаний описываются особенности механической модели движения такой жидкости в баке разгонного блока (РБ) с радиальными перегородками при вращении относительно продольной его оси. Путем сравнения данных экспериментов и математического моделирования поведения механического аналога жидкости в виде твердых вкладышей и обобщенного вихря находятся параметры, характеризующие влияние ее подвижности на движение бака. В студенческой работе [15] сделана попытка исследования устойчивости малых колебаний свободной поверхности жидкости в жесткой цилиндриче-

ской оболочке. Колебания жидкости по первому тону заменяются механическим аналогом в виде линейного осциллятора. При подъеме бака с жидкостью на определенную высоту над поверхностью Земли, из-за эффекта невесомости, устойчивость колебаний жидкости нарушается, в результате чего жидкость отделяется от стенок оболочки и распадается частично на ряд жидких сферических объектов. В работе находится критическая высота подъема бака, при которой устойчивость колебаний жидкости сохраняется. Тем не менее вызывает определенные вопросы физическая корректность рассматриваемых в работе [15] модель, которая для дальнейших исследований требует уточнения и, возможно, корректировки. В работе [16] с помощью механических аналогов исследовались колебания жидких топлив во вращающихся космических летательных аппаратах, а в работе [17] осуществлено численное моделирование таких взаимодействий.

Целью данной работы является построение махеманического аналога для описания малых осесимметричных колебаний жидкости в упругом баке с учетом сил поверхностного натяжения, что в дальнейшем позволит проводить исследования переходных процессов, возникающих в баках космических летательных аппаратов при наступлении состояний невесомости или малой гравитации, когда пренебрежение силами поверхностного натяжения уже недопустимо [18], либо при переходе от таких состояний к наличию, например, инерционных сил, что реализуется при запуске двигательных установок космических летательных аппаратов [1].

В разд. 1 мы вводим основные допущения, постулируем граничные условия и записываем уравнения описывающие малые движения жидкости в упругом баке. Далее, при построении модели, мы записываем энергетические соотношения, благодаря которым осуществляется переход к механическому аналогу. Там же мы будем учитывать действие сил поверхностного натяжения. В заключении проводится обзор полученных результатов.

В рамках данной работы, как можно видеть, удалось выполнить построение моделирующей механической системы, данный подход для случая малых колебаний жидкости под действием сил поверхностного натяжения ранее широко не применялся.

1. Постановка задачи

Указанная краевая задача решена при следующих допущениях:

1) бак с жидкостью предполагается цилиндрическим, абсолютно жестким, закрытым упругим плоским дном (рис. 1);

2) жидкость считается идеальной, несжимаемой, а ее движение — потенциальным с потенциалом скоростей Φ ;

3) плоское днище считается идеальной мембраной постоянной толщины δ , материал которой подчиняется закону Гука;

4) рассматривается случай малых осесимметричных колебаний. Предполагается, что потенциал скоростей не изменяется при учете сил поверхностного натяжения. Формы сво-

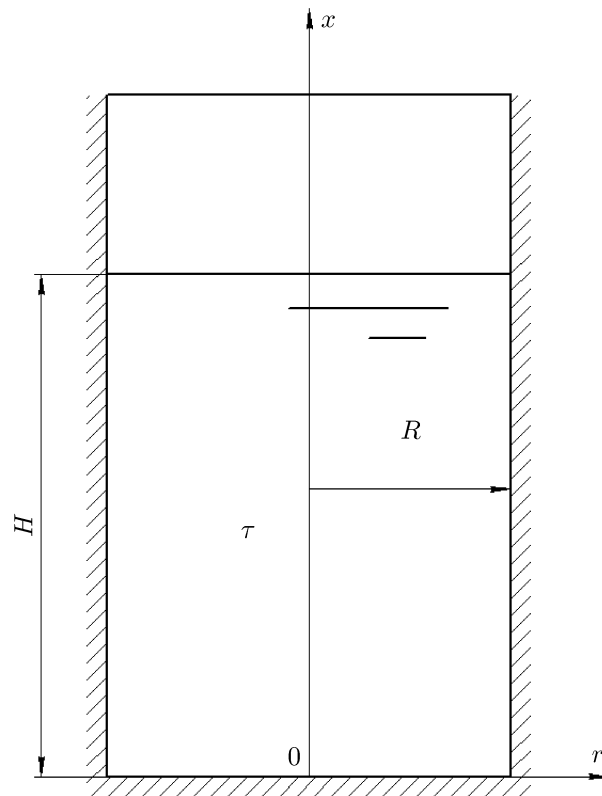


Рис. 1. Модель бака с упругим дном

бодных колебаний потенциала скоростей $\Phi(x, r, t)$ считаются теми же, что и при колебаниях системы без учета сил поверхностного натяжения.

Таким образом, вначале, для решения поставленной задачи требуется определить частоты и формы свободных осесимметричных колебаний в баке с упругой мембраной в однородном поле тяжести. Ускорение свободного падения равно g .

После этого колебания бака с жидкостью заменяются колебаниями механического аналога [20]. При этом постулируется равенство частот свободных колебаний системы бак-жидкость и собственных частот механического аналога.

Решение краевой задачи о малых осесимметричных колебаниях цилиндра, закрытого упругой мембраной впервые было дано Л.И. Балабухом в 1964 г. [19]. Воспользуемся на этом первом этапе решения задачи результатами Л.И. Балабуха. Краевая задача для функции Φ имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0, \quad (x, r) \in \tau, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{r=R} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \dot{w}, \end{aligned}$$

здесь w — смещение мембраны. Кроме того, считается справедливым интеграл Лагранжа — Коши [19]

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (x, r) \in \tau.$$

Линеаризованное граничное условие на свободной поверхности Σ имеет вид $\Phi = 0$. Дифференциальные уравнения осесимметричных движений мембраны под действием гидродинамического давления жидкости примет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

2. Построение модели движения жидкости под действием сил поверхностного натяжения с использованием механического аналога

Потенциал Φ будем искать в виде [19]

$$\Phi(r, x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_{1i} \operatorname{ch}(\lambda_i x) + A_{2i} \operatorname{sh}(\lambda_i x)] J_0\left(\lambda_i \frac{r}{h}\right) \cos \omega t.$$

Константы разделения находим из решения трансцендентного уравнения $J_1\left(\lambda_i \frac{R}{h}\right) = 0$, где $i \in \mathbb{N}$. Не приводя подробного решения задачи сошлемся на результат [19]. Частотное уравнение в рассматриваемом случае — случае жесткой односвязной неподвижной цилиндрической полости с жидкостью, закрытой плоской мембраной имеет вид [19]

$$-\frac{1}{8} + \frac{1}{\omega^2} \frac{h^2}{R^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda_i}{h} \frac{\varrho \delta}{\varrho_0} + 1}{\lambda_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{h} \frac{\varrho \delta}{\varrho_0} + 1 - \lambda_i^3 \frac{h^3}{\omega^2 R^3} \right)} = 0 \quad (1)$$

Это трансцендентное уравнение — мероморфная функция, бесконечный ряд быстро сходится и определение частот колебаний — корней этого уравнения не представляет никаких затруднений.

Для первого тона колебаний, как это следует, например, из [20], можно приведенную массу системы M_1^0 в первом приближении считать равной массе жидкости в баке: $M_1^0 = \rho \pi R^2 H$. Тогда, решая трансцендентное уравнение (1), находим частоту первого тона колебаний ω_1 и приведенную жесткость системы C_1^0 :

$$C_1^0 = M_1^0 \omega_1^2$$

Итак, механический аналог рассматриваемой колебательной системы имеет вид, представленный на рис. 2. Дифференциальное же уравнение колебаний механического аналога, в свою очередь примет вид:

$$M_1^0 \ddot{y} + C_1^0 y = Q_y. \quad (2)$$

Здесь Q_y — обобщенная сила, вычисляя которую мы можем учесть влияние сил поверхностного натяжения:

$$Q_y = \frac{\sum_k \delta A_k(\sigma_0)}{\delta y},$$

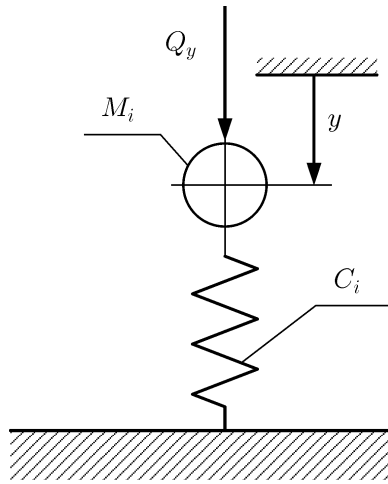


Рис. 2. Механический аналог рассматриваемой системы

где $\sum_k \delta A_k(\sigma_0)$ — возможная работа сил поверхностного натяжения. В соответствии с известной формулой Лапласа, избыточное давление в точке свободной поверхности жидкости Δp сил поверхностного натяжения определяется как [21]

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; R_1, R_2 — радиусы главных кривизн в рассматриваемой точке. Для нашего случая плоской свободной поверхности в круговом цилиндре мы, очевидно, будем иметь $R_1 = R, R_2 = \infty$, откуда:

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R}.$$

Сумма возможных работ сил поверхностного натяжения будет иметь вид:

$$\sum_k \delta A_k(\sigma_0) = - \int_0^R \pi R \sigma \frac{\partial w_\Sigma}{\partial r} r \delta w_\Sigma dr,$$

где w_Σ — перемещения свободной поверхности жидкости при осесимметричных колебаниях первого тона. Поскольку вариация этого перемещения

$$\delta w_\Sigma = - \frac{\lambda_1}{h} \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda_1 x}{h} \right) J_0 \left(\frac{\lambda_1 r}{h} \right) \delta y,$$

то выражения для Q_y будет иметь следующий вид:

$$Q_y = -\pi \sigma \left(\frac{\lambda_1}{h} \right)^2 [\operatorname{sh}(\lambda_1)]^2 I(\lambda_1) y,$$

где

$$I(\lambda_1) = -\frac{\lambda_1}{h} \int_0^R J_1 \left(\lambda_1 \frac{r}{h} \right) J_0 \left(\lambda_1 \frac{r}{h} \right) r dr.$$

Вычисляя этот интеграл, получаем:

$$I(\lambda_1) = \frac{R}{2} J_0^2\left(\lambda_1 \frac{R}{h}\right) - \frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} J_0^2(\xi) d\xi,$$

где в свою очередь $\xi_1 = \lambda_1 \frac{R}{h}$. Интеграл в последнем равенстве вычисляется численно или по теореме о среднем, тогда

$$I(\lambda_1) = \frac{R}{2} \left[J_0^2\left(\lambda_1 \frac{R}{h}\right) - J_0^{\oplus 2} \right],$$

где второе слагаемое есть некоторое значение функции $J_0^2(\xi)$ в диапазоне от 0 до R .

С учетом представления для Q_y выражение для колебаний механического аналога (2) примет вид

$$M_1^0 \ddot{y} + C_1^0 y = -\pi \sigma \left(\frac{\lambda_1}{h}\right)^2 \text{sh}^2(\lambda_1) I(\lambda_1) y,$$

или

$$M_1^0 \ddot{y} + C_1^* y = 0,$$

где

$$C_1^* = C_1^0 + \pi \sigma \left(\frac{\lambda_1}{h}\right)^2 \text{sh}^2(\lambda_1) I(\lambda_1).$$

Таким образом, частота свободных колебаний будет определяться выражением

$$\omega_\sigma^2 = \frac{C_1^*}{M_1^0}.$$

Заключение

В работе предложена возможность учесть влияние сил поверхностного натяжения в задаче о малых колебаниях идеальной, несжимаемой жидкости в упругом баке с помощью механического аналога. Полученные зависимости позволяют осуществить переход к эквивалентной механической системе. Указанный подход, возможно, позволит в будущем решать задачу о неустойчивости осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью, колебания которого заменены эквивалентной механической системой, где учитывается лишь только первый основной тон колебаний. Устойчивость колебаний жидкой массы нарушается из-за возникновения явления невесомости на внеатмосферном участке траектории при движении старших ступеней ракет-носителей или разгонных блоков.

Работа выполнена в рамках гранта Президиента РФ НШ-4058.2014.8.

Список литературы

1. Поляев В.М., Багров В.В., Курпатенков А.В. Капиллярные системы отбора жидкости из баков космических летательных аппаратов. М.: УНПЦ «Энергомаш», 1997. 328 с.

2. Иванов В.П., Партола И.С. Комбинированная система управления расходом топлива кислородно-водородного разгонного блока // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2011. № 3 (27). С. 28–33.
3. Корольков А.В. Поведение системы жидкость-газ в условиях, близких к невесомости // Вестник Московского государственного университета леса — Лесной вестник. 2013. Т. 94, № 2 (94). С. 145–146.
4. Любимов Н.И., Самойлова А.Е. Колебательная устойчивость плоского слоя жидкости со свободной деформируемой поверхностью // Конвективные течения. 2009. № 4. С. 35–50.
5. Авдудевский В.С. Экспериментальные исследования по гидромеханике в условиях невесомости // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1985. Т. 49. № 4. С. 681–686.
6. Калиниченко В.А., Со Аунг Наинг Экспериментальное исследование связанных колебаний сосуда с жидкостью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 1. С. 14–25.
7. Калиниченко В.А., Аунг Наинг Со Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 12. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1138.html> (дата обращения: 20.05.2015).
8. Калиниченко В.А., Коровина Л.И., Нестеров А.В., Аунг Наинг Со Особенности колебаний жидкости в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 12. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1345.html> (дата обращения: 20.05.2015).
9. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Костин Г.В., Корнеев С.Б. Механические модели и методы управления движением гибридных колебательных систем // отчет о НИР № 94-01-01368 / Российский фонд фундаментальных исследований.
10. Кибзун А.И., Мирошкин В.П. Об одной математической модели движения КА в декартовых координатах // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 6. С. 17–27.
11. Гриднев С.Ю., Будковой А.Н. Использование механического аналога жидкости для моделирования колебаний автоцистерны при разгоне и торможении // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2011. № 1. С. 98–106.
12. Гриднев С.Ю., Будковой А.Н. Динамическое воздействие автоцистерн с отсеками на пути при учете гидроудара // Строительная механика и конструкции. 2012. Т. 2, № 4. С. 116–121.
13. Ефименко Г.Г., Кондрашкин И.В., Кривоносова Н.В., Чурилов Г.А. Экспериментальное определение параметров механического аналога жидкости, используемого в математической модели разгонного блока в режиме его вращения // Космонавтика и ракетостроения. 2012. № 2 (67). С. 86–92.

14. Гудков С.С., Ефименко Г.Г., Клишев О.П., Чурилов Г.А. Особенности механического аналога жидкости в баке с радиальными перегородками в режимах закрутки и торможения относительно продольной оси // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 2 (75). С. 147–151.
15. Шунгаров Э.Х., Гончаров Д.А. Об устойчивости малых колебаний свободной поверхности // Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 4. Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/566824.html> (дата обращения 01.05.2015).
16. Chatman Y., Gangadharan S., Schlee K., Sudermann J., Walker Ch., Ristow J., Hubert C. Mechanical Analog Approach to Parameter Estimation of Lateral Spacecraft Fuel Slosh // 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Honolulu, 2007. Art. no. AIAA 2007–2392. DOI: [10.2514/6.2007-2392](https://doi.org/10.2514/6.2007-2392)
17. Sances D.J., Gangadharan S., Sudermann J.E., Marsell B. CFD Fuel Slosh Modeling of Fluid-Structure Interaction in Spacecraft Propellant Tanks with Diaphragms // 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Orlando, 2010. Art. no. AIAA 2010–2955. DOI: [10.2514/6.2010-2955](https://doi.org/10.2514/6.2010-2955)
18. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / под ред. А.Д. Мышкиса; Физ.-техн. ин-т низ. температур АН Украины. Киев: Наукова думка, 1992. 592 с.
19. Балабух Л.И. Некоторые точные решения задачи о колебаниях жидкости в упругих оболочках // 5 Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек: тр. М., 1965. С. 68–72.
20. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 6. Гидродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 736 с.

The Mechanical of the Small Axisymmetric Oscillations of the Liquid with the Surface Tension Forces in Elastic Tank

Goncharov D. A.^{1,*}, Pozhalostin A.A.¹,
Kokushkin V.V.²

* goncharov@bmstu.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Russia

²Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, Russia

Keywords: liquid, vibration, surface tension, oscillator, mechanical analog

In this paper we investigate small axisymmetric oscillations of a liquid in an elastic tank. We also take into account the influence of surface tension forces. For this, we turn to the mechanical analogue of the considered mechanical system. To realize the transition to mechanical analogue we use the energy method: postulating the equality of kinetic and potential energy for the investigated mechanical system and the mechanical system analog. Due to this transition we can further investigate the oscillations of a mechanical analogue. As a mechanical analogue, we consider the oscillator in the spring. The mass of the oscillator is calculated as the weight of the fluid to make oscillations. The oscillator spring constant is calculated using the identity of equations, namely, equation of free small oscillations of the oscillator and equation of free small oscillations of the system under investigation: the fluid in the elastic tank. The identity of equations allows us to draw conclusion about the identity of the natural frequencies for the source mechanical system and the system of a mechanical analogue. Next, we take into consideration the action of the surface tension. We record the Laplace condition for excess pressure because of the forces of surface tension. Then we compile the expression for the generalized force, taking into account the phenomenon of the surface tension. Next, we write the equation of oscillations of a mechanical analogue. The surface tension, due to the introduction of the generalized force in the equation for small oscillations of the mechanical analogue will change the natural frequency of the mechanical analogue. The paper presents the appropriate dependencies. The abovementioned allows us to investigate the stability of small motions of fluid in microgravity or low gravity by studying the stability of small motions of mechanical analogue. The latter is especially important due to the design and development of advanced space aircrafts with optimized use of residual fuels. Mechanics of fluids in low gravity

and zero gravity were presented in references [1, 2, 3, 5, 18, 21]. Fluid motion using mechanical analogues was studied in papers [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20]. The paper [19] solves the problem of hydro-elasticity.

References

1. Polyayev V.M., Bagrov V.V., Kurpatenkov A.V. *Kapillyarnye sistemy otbora zhidkosti iz bakov kosmicheskikh letatel'nykh apparatov* [Capillary system of fluid sampling from tanks of spacecraft]. Moscow, ESPC "Energomash" Publ., 1997. 328 p. (in Russian).
2. Ivanov V.P., Partola I.S. The combined fuel draining control system for liquid oxygen and liquid hydrogen upper stage. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta = Vestnik of the Samara State Aerospace University*, 2011, no. 3-1, pp. 28-33. (in Russian).
3. Korolkov A.V. About behaviour of liquid-gas system in the near weightlessness conditions. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta lesa — Lesnoi vestnik = Moscow state forest university bulletin — Lesnoi vestnik*, 2013, no. 2 (94), pp. 145–146. (in Russian).
4. Lyubimov N.I., Samoiloa A.E. Oscillatory instability of flat liquid layer with a deformable free surface. *Konvektivnye techeniya*, 2009, no. 4, pp. 35–50. (in Russian).
5. Avduevskii V.S. Experimental research on fluid mechanics in microgravity. *Izvestiya AN SSSR. Ser. Fizicheskaya*, 1985, vol. 49, no. 4, pp. 681–686. (in Russian).
6. Kalinichenko V.A., Soe A.N. An Experimental Study of Coupled Vibrations of the Tank with Liquid. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2015, no. 1, pp. 14–25. (in Russian).
7. Kalinichenko V.A., Aung Naing Soe. Faraday waves in a movable tank and their mechanical analog. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 12. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1138.html>, accessed 01.05.2015. (in Russian).
8. Kalinichenko V.A., Korovina L.I., Nesterov S.V., Aung Naing Soe. The features of fluid oscillations in a rectangular vessel with local bottom irregularities. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 12. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1345.html>, accessed 01.05.2015. (in Russian).
9. Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Kostin G.V., Korneev S.B. *Mekhanicheskie modeli i metody upravleniya dvizheniem gibridnykh kolebatel'nykh sistem* [Mechanical models and methods for motion control of hybrid oscillatory systems]. Report on scientific research work, no. 94-01-01368. Russian Foundation for Basic Research (RFBR). (in Russian, unpublished).
10. Kibzun A.I., Miroshkin V.P. About the mathematical model of space vehicle motion. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2009, vol. 21, no. 6, pp. 17–27. (in Russian).
11. Gridnev S.Yu., Budkovoi A.N. In-situ measurements of vibrations of elastically supported steel reinforced concrete bridge during car braking. *Nauchnyi vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2011, no. 1,

- pp. 98–106. (English version of journal: *Scientific herald of the Voronezh state university of architecture and civil engineering. Construction and architecture*, 2011, no. 1, pp. 11–23.).
12. Gridnev S.Yu., Budkovoï A.N. The dynamic impact of road tankers with compartments on the way in accounting for kickoff. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*, 2012, vol. 2, no. 4, pp. 116–121. (in Russian).
 13. Efimenko G.G., Kondrashkin I.V., Krivonosova N.V., Churilov G.A. Experimental determination of parameters of mechanical analogue of liquid used in mathematical model of booster unit in mode of its rotation. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2012, no. 2 (67), pp. 86–92. (in Russian).
 14. Gudkov S.S., Efimenko G.G., Klishev O.P., Churilov G.A. Mechanical Analog Fluid Features in the Reservoir with Radial Partitions in the Braking Mode and Twisting about the Longitudinal Axis. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2014, no. 2 (75), pp. 147–151. (in Russian).
 15. Shungarov E.Kh., Goncharov D.A. Sustainability of small oscillations of free surface. *Molodezhnyi nauchno-tekhnicheskii vestnik MGTU im. N.E. Baumana = Youth Science and Technology Herald of the Bauman MSTU*, 2013, no. 4. Available at: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/566824.html>, accessed 01.05.2015. (in Russian).
 16. Chatman Y., Gangadharan S., Schlee K., Sudermann J., Walker Ch., Ristow J., Hubert C. Mechanical Analog Approach to Parameter Estimation of Lateral Spacecraft Fuel Slosh. 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Honolulu, 2007, art. no. AIAA 2007–2392. DOI: [10.2514/6.2007-2392](https://doi.org/10.2514/6.2007-2392)
 17. Sances D.J., Gangadharan S., Sudermann J.E., Marsell B. CFD Fuel Slosh Modeling of Fluid-Structure Interaction in Spacecraft Propellant Tanks with Diaphragms. 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Orlando, 2010, art. no. AIAA 2010–2955. DOI: [10.2514/6.2010-2955](https://doi.org/10.2514/6.2010-2955)
 18. Myshkis A.D., Babskii V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskii N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya uslovii nevesomosti* [Methods for solving fluid mechanics problems for conditions of weightlessness]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1992. 592 p. (in Russian).
 19. Balabukh L.I. Some exact solutions of problem of oscillations of fluid in elastic shells. 5 *Vsesoyuznaya konferentsiya po teorii plastin i obolochek: tr.* [Proc. of the 5th all-Union Conference on the theory of plates and shells]. Moscow, 1965, pp. 68–72. (in Russian).
 20. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Rocket dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 520 p. (in Russian).
 21. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. In 10 vols. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 736 p. (in Russian).