Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 06. С. 112–122.

DOI: **10.7463/0615.0783375**

Представлена в редакцию: 04.03.2015
Исправлена: 22.05.2015

УДК 519.7

Аналитическое решение краевых задач теории оболочек

Виноградов Ю. И.[1,*]

[*]yuvino@rambler.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Методом Фурье разделения переменных класс задач механики деформирования оболочек приводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Для дифференциальных уравнений с переменными и непрерывными коэффициентами используется их кусочно – постоянная аппроксимация. На этой основе получено аналитическое решение обыкновенных дифференциальных уравнений в виде формул в матричной форме адаптированной к ЭВМ. Решение получается в виде матрицы значений функций Коши – Крылова, замечательное свойство которых удовлетворять произвольным начальным условиям позволяет построить эффективный аналитический метод решения краевых задач механики деформирования оболочек и тонкостенных конструкций.

Ключевые слова: краевые задачи теории оболочек, аналитическое решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Введение

Большой класс краевых задач, например, механики деформирования оболочек и тонкостенных конструкций в основе построения методов исследования содержит проблему решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что эта проблема преодолевается численным решением обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом нет методов оценки погрешностей. Однако, проблема оценки погрешности актуальна, например, при расчете на прочность летательных аппаратов. Проблема преодолевается в работе аналитическим решением дифференциальных уравнений и, следовательно, построением аналитического метода решения краевых задач.

Кроме этого практический интерес представляет решение дифференциальных уравнений в матричной форме, так как на такой основе строятся эффективные алгоритмы решения краевых задач с использованием ЭВМ.

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения всегда можно записать в виде системы уравнений первого порядка и представить в матричной форме (1)

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1,\\
&\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \boldsymbol{y}'(x) = A(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{f}(x). \qquad (1)\\
&\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2y_1}{dx^2} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = f_1,\\
&\frac{d^2y_2}{dx^2} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = f_2, \quad \boldsymbol{y}'' + A(x)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x). \qquad (2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^2y_n}{dx^2} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = f_n.
\end{aligned}$$

Известно также [1], что разрешающая система дифференциальных уравнений теории оболочек может содержать только четные производные и, следовательно, может быть представлена в виде (2).

Требуется определить решение уравнений (1) и (2).

1. Решение однородного дифференциального уравнения

Решение однородного дифференциального уравнения (1), когда $\boldsymbol{f}(x)=0$, определяется формулой [2] . Эта формула получается проще, если использовать мультипликативные свойства матрицы функций Коши – Крылова [3], которую Ф.Р. Гантмахер назвал матрицантом [4].

Матрица функций Коши – Крылова, как известно [4], обладает мультипликативным свойством. На основном интервале она определяется как произведение таких же матриц функций для интервалов, на которые можно поделить основной интервал. Если на интервалах коэффициенты дифференциальных уравнений осреднить (кусочно – постоянная аппроксимация), то матрицы функций Коши – Крылова на них определяются для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. То есть на интервалах решения дифференциальных уравнений – матричные экспоненты. Следовательно [4],

$$K_{x_0}^{x_n}(A(x)) = K_{x_{n-1}}^{x_n}(A(x))K_{x_{n-2}}^{x_{n-1}}(A(x))\ldots K_{x_2}^{x_3}(A(x))K_{x_1}^{x_2}(A(x)) = e^{A(\tau_n)\Delta x_n}e^{A(\tau_{n-1})\Delta x_{n-1}}\ldots e^{A(\tau_2)\Delta x_2}e^{A(\tau_1)\Delta x_1} = e^{B\Delta x_i}.$$

Тогда,

$$K_{x_0}^{x_n}(A(x)) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(B\Delta x_i)^m}{m!},\ B = \sum_{i=1}^{i=n}A(\tau_i),\Delta x_i = \frac{\Delta x}{n},\Delta x = x_n - x_0,\tau_i \in \left[x_{i-1},x_i\right], i = 1,2,\ldots,n. \quad (3)$$

Если коэффициенты уравнения (1) постоянные, то формула (3) принимает известный [4] вид:

$$K_{x_0}^{x_n}(A) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(A\Delta x)^m}{m!}, \ \Delta x = x_n - x_0. \tag{4}$$

Решение однородного уравнения (1) определяется и на основе определения мультипликативного интеграла Вольтерра [4]

$$K_{x_0}^{x_n}(A(x)) = \lim_{\Delta x_i \to 0} [E + A(\tau_n)\Delta x_n]...[E + A(\tau_i)\Delta x_i]...[E + A(\tau_1)\Delta x_1],$$

который является аналогом интегральной суммы для обычного интеграла:

$$K_{x_0}^{x_n}(A(x)) = \prod_{i=n}^{i=1} [E + A(\tau_i)\Delta x_i], \ \Delta x_i = \frac{x_n - x_0}{n}, \tag{5}$$

Если коэффициенты уравнения (1) постоянные, то формула (5) становится матричным биномом Ньютона

$$K_{x_0}^{x_n}(A) = (E + A\Delta x_i)^n, \ \Delta x_i = \frac{x_n - x_0}{n}. \tag{6}$$

Выражения (5) и (6) не являются формулами аналитического решения однородного дифференциального уравнения (1), так как решения с их помощью не позволяют контролировать погрешность. Однако они используются при численном решении дифференциальных уравнений.

Если решение необходимо определить с контролируемой погрешностью, то есть аналитически, то выражения (5) и (6) представляются в виде:

$$K_{x_0}^{x_n}(A(x)) = \prod_{i=n}^{i=1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{[A(\tau_i)\Delta x_i]^m}{m!}, \tag{7}$$

$$K_{x_0}^{x_n}(A) = [\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(A\Delta x_i)^m}{m!}]^n. \tag{8}$$

Таким образом, решение однородного дифференциального уравнения (1) вычисляется по формулам (3) – (8) в виде значений матриц функций Коши-Крылова [3], которые обладают замечательным свойством удовлетворять произвольным начальным условиям и мультипликативным свойством [3,4].

Впервые функции с такими свойствами определил А.Н. Крылов для расчета балки, лежащей на упругом основании, используя метод Коши [5].

Решение дифференциального уравнения (2) с постоянными коэффициентами определяется в виде :

$$\boldsymbol{y} = cos(\sqrt{A}x)\boldsymbol{y}_0 + (\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}x)\boldsymbol{y}_0', \tag{9}$$

где матричные косинус и синус – матричные ряды [4]

$$\cos(\sqrt{A}x) = E - \frac{1}{2!}Ax^2 + \frac{1}{4!}A^2x^4 - ...,$$

$$(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}x) = Ex - \frac{1}{3!}Ax^3 + \frac{1}{5!}A^2x^5 - ....$$

Решение (9) однородного дифференциального уравнения для (2) позволяет получить еще одну формулу вычисления решения однородного дифференциального уравнения для (1) с постоянными коэффициентами.

Сокращая запись, введем обозначения

$$(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}(x_n - x_0)) = s, \quad \cos(\sqrt{A}(x_n - x_0)) = c\,.$$

Учитывая (9), записываем

$$\boldsymbol{z} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c & s \\ -As & \mathrm{c} \end{Vmatrix} \boldsymbol{z}_0.$$

Тогда

$$\boldsymbol{z}' = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -A & 0 \end{Vmatrix} \boldsymbol{z}_0,$$

решение которого $\boldsymbol{z} = K\boldsymbol{z}_0$. Из сравнения с первоначальной записью следует

$$K_{x_0}^{x_n}(A) = \begin{Vmatrix} \cos(\sqrt{A}(x_n - x_0)) & (A)^{-1}\sin(\sqrt{A}(x_n - x_0)) \\ -A(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}(x_n - x_0)) & \cos(\sqrt{A}(x_n - x_0)) \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

где $\Delta x = x_n - x_0$ - основной интервал.

Для дифференциального уравнения с переменными коэффициентами и использованием их кусочно – постоянной аппроксимации решение определяется формулой

$$K_{x_0}^{x_n}(A(x)) = \prod_{i=n}^{i=1} K(\Delta x_i), \text{ где } \Delta x_i = \frac{\Delta x}{n}. \tag{11}$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (1) и (2) по формулам (9) – (11) аналитическое с контролируемой погрешностью, так как в основе их находятся матричные синус и косинус, матричные ряды которых сходятся [4].

2. Частное решение

Частное решение дифференциального уравнения (1) определяется в виде интеграла от так называемой матрицы Коши [4]. Для того чтобы получить формулу вычисления частного решения основной интервал $[x_0, x]$ промежуточными точками x_i $i = 1, 2, ..., n-1$ делим на части с интервалами $[x_{i-1}, x_i]$ и текущему аргументу присваиваем произвольное значение $x = x_n$. На интервалах элементы матрицы *A(x)* и столбца ***f****(x)* осредняются и обозначаются A_i, $\boldsymbol{f}_i$.

На произвольном интервале частное решение $\boldsymbol{y}_{x_{i-1}}^{*x_i}$ определяется на основании матрицы функций Коши-Крылова – решения однородного дифференциального уравнения (1)

$$\boldsymbol{y}^{*x_i}_{x_{i-1}} = K^{x_i}_{x_{i-1}}(A_i)\int[K^{\tau_i}_{x_{i-1}}(A_i)]^{-1}\boldsymbol{f}_i d\tau_i. \qquad (12)$$

Матрицы функций Коши-Крылова всегда можно представить матричными экспонентами и выражение (12) переписать в виде:

$$\boldsymbol{y}^{*x_i}_{x_{i-1}} = e^{A_i\Delta x_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-A_i\Delta\tau_i}\boldsymbol{f}_i d\tau_i, \quad [e^{A_i\Delta\tau_i}]^{-1} = e^{-A_i\Delta\tau_i}, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta\tau_i = \tau_i - x_{i-1}, \tau_i \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (13)$$

Столбец $\boldsymbol{f}_i$ с постоянными элементами выносится из под интеграла. Матричная экспонента под интегралом заменяется матричным рядом. Выполняется интегрирование. Тогда,

$$\boldsymbol{y}*^{x_i}_{x_{i-1}} = e^{A_i\Delta x_i}\overline{T}_i\boldsymbol{f}_i\Delta x_i, \quad \overline{T}_i = E - \frac{A_i\Delta x_i}{2!} + \frac{(A_i\Delta x_i)^2}{3!} - \frac{(A_i\Delta x_i)^3}{4!} + \dots \ . \qquad (14)$$

Перемножая ряды для матричной экспоненты и матрицы $\overline{T}_i$, получаем формулу для определения частного решения на произвольно выбранном интервале $[x_{i-1}, x_i]$

$$\boldsymbol{y}^{*x_i}_{x_{i-1}} = T_i\boldsymbol{f}_i\Delta x_i, \quad T_i = E + \frac{A_i\Delta x_i}{2!} + \frac{(A_i\Delta x_i)^2}{3!} + \frac{(A_i\Delta x_i)^3}{4!} + \dots \qquad (15)$$

Здесь матричный ряд сходится, так как он мажорируется сходящимся матричным рядом (4).

Формулу (15) можно получить иначе. Для этого формулу (13) перепишем в виде:

$$\boldsymbol{y}^{*x_i}_{x_{i-1}} = e^{A_i(x_i - x_{i-1})}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-A_i(\tau_i - x_{i-1})}\boldsymbol{f}_i d\tau_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} e^{A_i(x_i - x_{i-1} - \tau_i + x_{i-1})}\boldsymbol{f}_i d\tau_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} e^{A_i\Delta\tau_i}\boldsymbol{f}_i d\tau_i = T_i\boldsymbol{f}_i\Delta x_i.$$

Если в дифференциальном уравнении (1) $A(x)=A=const$, $\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{f}=const$, то формула (15) справедлива и для основного интервала $[x_0, x_n]$. Следовательно,

$$\boldsymbol{y}^{*x_n}_{x_0} = T\boldsymbol{f}\Delta x, \quad T = E + \frac{A\Delta x}{2!} + \frac{(A\Delta x)^2}{3!} + \frac{(A\Delta x)^3}{4!} + \dots, \quad \Delta x = x_n - x_0. \qquad (16)$$

Частное решение для основного интервала получим на основании выражения так называемой матрицы Коши, которую представим в виде:

$$\boldsymbol{y}^{*x_n}_{x_0} = K^{x_n}_{x_0}(A(x))\sum_{i=1}^{i=n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}[K^{x_i}_{x_{i-1}}(A_i)^{-1}\boldsymbol{f}_i d\tau_i.$$

Выполняя почленное интегрирование и используя выражение (14), получим

$$\boldsymbol{y}^{*x_n}_{x_0} = K^{x_n}_{x_0}(A(x))\sum_{i=1}^{i=n}\overline{T}_i\boldsymbol{f}_i\Delta x_i, \quad \overline{T}_i = E - \frac{A_i\Delta x_i}{2!} + \frac{(A_i\Delta x_i)^2}{3!} - \frac{(A_i\Delta x_i)^3}{4!} + \dots \qquad (17)$$

Здесь матричный ряд сходится, так как он мажорируется сходящимся матричным рядом (4)

Формула (17) определяет частное решение уравнения (1). Матрица $K_{x_0}^{x_n}(A(x))$ в формуле перед суммой определяется по одной из формул (3) – (8), (10), (11) и является решением однородного дифференциального уравнения.

Частное решение будет аналитическим, если решение однородного дифференциального уравнения аналитическое, так как содержащийся в нем матричный ряд сходится.

Для основного интервала можно получить иную формулу для определения частного решения. Общее решение уравнения (1) можно записать для значений аргумента x_1, x_2

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(x_1) &= K_{x_0}^{x_1}(A_1)\boldsymbol{y}(x_0) + \boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_1}, \\ \boldsymbol{y}(x_2) &= K_{x_1}^{x_2}(A_2)\boldsymbol{y}(x_1) + \boldsymbol{y}_{x_1}^{*x_2}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_1}$, $\boldsymbol{y}_{x_1}^{*x_2}$ - частные решения дифференциального уравнения (1), которые определяются по формуле (15) на интервалах $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$.

Из уравнений (18) следует, что

$$\boldsymbol{y}(x_2) = K_{x_1}^{x_2}(A_2)K_{x_0}^{x_1}(A_1)\boldsymbol{y}(x_0) + K_{x_1}^{x_2}(A_2)\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_1} + \boldsymbol{y}_{x_1}^{*x_2}. \tag{19}$$

Очевидно, что

$$\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_2} = K_{x_1}^{x_2}(A_2)\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_1} + \boldsymbol{y}_{x_1}^{*x_2}. \tag{20}$$

Для аргумента x_3 общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$\boldsymbol{y}(x_3) = K_{x_2}^{x_3}(A_3)\boldsymbol{y}(x_2) + \boldsymbol{y}_{x_2}^{*x_3}.$$

Используя (19), получим

$$\boldsymbol{y}(x_3) = K_{x_2}^{x_3}(A_3)K_{x_1}^{x_2}(A_2)K_{x_0}^{x_1}(A_1)\boldsymbol{y}(x_0) + K_{x_2}^{x_3}(A_3)K_{x_1}^{x_2}(A_2)\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_1} + K_{x_2}^{x_3}(A_3)\boldsymbol{y}_{x_1}^{*x_2} + \boldsymbol{y}_{x_2}^{*x_3}. \tag{21}$$

Очевидно, что

$$\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_3} = K_{x_2}^{x_3}(A_3)K_{x_1}^{x_2}(A_2)\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_1} + K_{x_2}^{x_3}(A_3)\boldsymbol{y}_{x_1}^{*x_2} + \boldsymbol{y}_{x_2}^{*x_3}. \tag{22}$$

Продолжая итерации, получаем формулу для определения частного решения на основном интервале

$$\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_n} = K_{x_{n-1}}^{x_n}(A_n)K_{x_{n-2}}^{x_{n-1}}(A_{n-1})...K_{x_1}^{x_2}(A_2)\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_1} + K_{x_{n-1}}^{x_n}(A_n)K_{x_{n-2}}^{x_{n-1}}(A_{n-1})...K_{x_2}^{x_3}(A_3)\boldsymbol{y}_{x_1}^{*x_2} + ... + K_{x_{n-1}}^{x_n}(A_n)\boldsymbol{y}_{x_{n-2}}^{*x_{n-1}} + \boldsymbol{y}_{x_{n-1}}^{*x_n},$$

где $K_{x_{i-1}}^{x_i}(A_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ определяется на интервалах $[x_{i-1}, x_i]$ по одной из формул;

$$\boldsymbol{y}_{x_{i-1}}^{*x_i} = T_i \boldsymbol{f}_i \Delta x_i, \quad T_i = E + \frac{A_i \Delta x_i}{2!} + \frac{(A_i \Delta x_i)^2}{3!} + \dots . \tag{23}$$

Очевидно, что формула для частного решения будет аналитической или численной в зависимости от использования аналитических или численных формул для определения значений матриц функций Коши – Крылова. Ряд в (23) очевидно сходится.

Если дифференциальное уравнение (1) имеет постоянные коэффициенты и интервалы $[x_{i-1}, x_i] = const$, то формула (23) принимает вид:

$$\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_n} = K^{n-1}\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_1} + K^{n-2}\boldsymbol{y}_{x_1}^{*x_2} + ... + K\boldsymbol{y}_{x_{n-2}}^{*x_{n-1}} + \boldsymbol{y}_{x_{n-1}}^{*x_n}. \tag{24}$$

где $K = K(A_i)$ и K^i обозначает степень i матрицы K.

Если в уравнении (1) дополнительно $\boldsymbol{f}(x)=const$, то (24) принимает вид:

$$\boldsymbol{y}_{x_0}^{*x_n} = (K^{n-1} + K^{n-2} + ... + K + E)\boldsymbol{y}^*,$$

где $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}_{x_{i-1}}^{*x_i} = const, \ \ i = 1,2,...,n.$

3. Алгоритм решения краевой задачи

*Постановка задачи***.** Пусть система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) механики деформирования оболочки приведена к канонической матричной форме и представлена в виде $\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \boldsymbol{f}(x)$; $\mathbf{y}(x) = \left\| u_n, v_n, w_n, w_n', T_{1n}, S_n, Q_{1n}, M_{1n} \right\|^T$ - транспонированный столбец искомых величин, $A(x) = \left\| a_{i,j} \right\|_1^n$- матрица, элементы которой - коэффициенты системы ОДУ, $\boldsymbol{f}(x)$- столбец параметров правых частей системы ОДУ.

Необходимо определить решение в матричной форме ОДУ при заданных краевых условиях

$$H_l(0)\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{r}_l(0), \qquad H_k(l)\mathbf{y}(l) = \boldsymbol{r}_k(l) \tag{25}$$

Здесь $H_l(0) = \left\| h_{ij} \right\|_{x=0}$, $\ \ i = 1,2,...,s; \ j = 1,2,...,n$ *и* $H_k(l) = \left\| h_{ij} \right\|_{x=l}$ $i = 1,2,...,n-s; \quad j = 1,2,...,n$ s – число краевых условий при $x = 0$, n – порядок ОДУ; $H_l(0)$ и $H_k(l)$ - прямоугольные матрицы, ненулевые элементы которых в виде единиц заносят для выбора элементов столбцов искомых величин на краях $x = 0$ и $x = l$: $\mathbf{y}(0) = \left\| u_n, v_n, w_n, w_n', T_{1n}, S_n, Q_{1n}, M_{1n} \right\|_{x=0}^T$, $\mathbf{y}(l) = \left\| u_n, v_n, w_n, w_n', T_{1n}, S_n, Q_{1n}, M_{1n} \right\|_{x=l}^T$, на которые накладываются известные краевые условия; $\boldsymbol{r}_l(0) = \left\| r_1, r_2, ..., r_s \right\|_{x=0}^T$ и $\boldsymbol{r}_k(l) = \left\| r_1, r_2, ..., r_{n-s} \right\|_{x=l}^T$ - столбцы, ненулевые элементы которых - заданные значения физических величин или их параметров на краях.

Алгоритм решения задачи

Решение краевой задачи достигается переносом краевых условий (25) в произвольно выбранную точку x_i краевого интервала с помощью решения канонического матричного ОДУ и решением системы алгебраических уравнений для объединенных в этой точке краевых условий. При этом определяются значения искомых величин.

Пусть значения матриц функций Коши – Крылова определяются в направлениях от произвольно выбранной точки в направлении левого края. Общее решение ОДУ принимает вид

$$\mathbf{y}(x_{i-1}) = K_{x_i}^{x_{i-1}}(A(x))\mathbf{y}(x_i) + \mathbf{y}_{x_i}^{*x_{i-1}},$$

Вычисления однородного и частного решений ОДУ осуществляются с помощью полученных формул. Формула переноса краевых условий на левом краю $x=0$ в произвольно выбранную точку x_i при вычислении значений функции Коши -Крылова на интервалах в направлении левого края принимает вид

$$H_l(x_i)\mathbf{y}(x_i)=\boldsymbol{r}_l(x_i), \qquad (26)$$

где

$$H_l(x_i)=H_l(x_{i-1})K_{x_i}^{x_{i-1}}, \quad \boldsymbol{r}_l(x_i)=\boldsymbol{r}_l(x_{i-1})-H_l(x_{i-1})\mathbf{y}_{x_i}^{*x_{i-1}}$$

или

$$H_l(x_i)=H(0)K_{x_1}^{x_0}K_{x_2}^{x_1}...K_{x_i}^{x_{i-1}},$$

$$\boldsymbol{r}_l(x_i)=\boldsymbol{r}_l(0)-H_l(0)(\mathbf{y}_{x_1}^{*x_0}+K_{x_1}^{x_0}\mathbf{y}_{x_2}^{*x_1}+...+K_{x_1}^{x_0}K_{x_2}^{x_1}...K_{x_{i-1}}^{x_{i-2}}\mathbf{y}_{x_i}^{*x_{i-1}})$$

Общее решение ОДУ при вычислении от произвольно выбранной точки в направлении правого края принимает вид

$$\mathbf{y}(x_{i+1})=K_{x_i}^{x_{i+1}}(A(x))\mathbf{y}(x_i)+\mathbf{y}_{x_i}^{*x_{i+1}},$$

Формула для переноса условий на правом краю в произвольно выбранную точку x_i при вычислении значений функций Коши - Крылова на интервалах в направлении правого края имеет вид

$$H_k(x_i)\mathbf{y}(x_i)=\boldsymbol{r}_k(x_i) \qquad (27)$$

где

$$H_k(x_i)=H_k(x_{i+1})K_{x_i}^{x_{i+1}} \text{ или } H_k(x_i)=H_k(l)K_{x_{n-1}}^{x_n}\cdot K_{x_{n-2}}^{x_{n-1}}...K_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$\boldsymbol{r}_k(x_i)=\boldsymbol{r}_k(l)-H_k(l)(\mathbf{y}_{x_{n-1}}^{*x_n}+K_{x_{n-1}}^{x_n}\mathbf{y}_{x_{n-2}}^{*x_{n-1}}+....+K_{x_{n-1}}^{x_n}K_{x_{n-2}}^{x_{n-1}}...K_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\mathbf{y}_{x_i}^{*x_{i+1}})$$

Краевые условия (26) и (27), перенесенные в произвольно выбранную точку x_i, объединяем в систему алгебраических уравнений, неизвестными которой являются искомые величины

$$D(x_i)\mathbf{y}(x_i)=\boldsymbol{r}(x_i); \qquad D(x_i)=\begin{Vmatrix}H_l(x_i)\\H_k(x_i)\end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(x_i)=\begin{Vmatrix}\boldsymbol{r}_l(x_i)\\\boldsymbol{r}_k(x_i)\end{Vmatrix} \qquad (29)$$

Решение краевой задачи для точек x_i (значений аргумента), заканчивается определением столбца искомых величин, характеризующих состояние сечения оболочки, ее жесткость и прочность.

$$\mathbf{y}(x_i)=[D(x_i)]^{-1}\boldsymbol{r}(x_i) \qquad (30)$$

Выводы

Впервые получены формулы определения аналитического решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Они являются основой алгоритмов аналитического решения краевых задач теории оболочек, один из которых опубликован [6]. Аналитически решались задачи определения локальной прочности транспортно пускового стакана ракеты, цилиндрического корпуса торпеды, подкрепленной шпангоутом и нагруженного силами от рулей управления движением, решались задачи исследования концентрации напряжений локально нагруженных оболочек классических форм. Практически подтверждена эффективность аналитического решения краевых задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №15 – 08 – 99591)

Список литературы

1. Матвеенко А.М., Нерубайло Б.В. Вопросы прочности, устойчивости и надежности конструкций. М.: Изд-во МАИ, 2013. 230 с.
2. Виноградов Ю.И. Метод решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады АН. 2006. Т. 409, № 1. С. 15-18.
3. Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И. Функции Коши – Крылова и алгоритмы решения краевых задач теории оболочек // Доклады АН. 2000. Т. 375, № 3. С. 331-333.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
5. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: АН СССР, 1931. 153 с.
6. Виноградов Ю.И. Мультипликативный метод решения краевых задач теории оболочек // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 4. С. 620- 628.
7. Зарубин В.С., Кувыркрн Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств // Математическое моделирование и численные методы. 2014. Т. 1, вып. 1. С. 5-17.

Science & Education of the Bauman MSTU Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2015, no. 06, pp. 112–122.

DOI: **10.7463/0615.0783375**

Received: 04.03.2015
Revised: 22.05.2015

Analytic Solution to Shell Boundary – Value Problems

Yu.I. Vinogradov[1,*]

[*]yuvino@rambler.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: shell boundary – value problems, analytic solution to ordinary differential equations

Object of research is to find analytical solution to the shell boundary – value problems, i.e. to consider the solution for a class of problems concerning the mechanics of hoop closed shells strain.

The objective of work is to create an analytical method to define a stress – strain state of shells under non-axisymmetric loading. Thus, a main goal is to derive the formulas – solutions of the linear ordinary differential equations with variable continuous coefficients.

The partial derivative differential equations of mechanics of shells strain by Fourier's method of variables division are reduced to the system of the differential equations with ordinary derivatives. The paper presents the obtained formulas to define solutions of the uniform differential equations and received on their basis formulas to define a particular solution depending on a type of the right parts of the differential equations.

The analytical algorithm of the solution of a boundary task uses an approach to transfer the boundary conditions to the randomly chosen point of an interval of changing independent variable through the solution of the canonical matrix ordinary differential equation with the subsequent solution of system of algebraic equations for compatibility of boundary conditions at this point. Efficiency of algorithm is based on the fact that the solution of the ordinary differential equations is defined as the values of Cauchy – Krylova functions, which meet initial arbitrary conditions.

The results of researches presented in work are useful to experts in the field of calculus mathematics, dealing with solution of systems of linear ordinary differential equations and creation of effective analytical computing methods to solve shell boundary – value problems.

References

1. Matveenko A.M., Nerubailo B.V. *Voprosy prochnosti, ustoichivosti i nadezhnosti konstruktsii* [Problems of strength, stability and reliability of designs]. Moscow, MAI Publ., 2013. 230 p. (in Russian).

2. Vinogradov Yu. I. Solution method for linear ordinary differential equations. *Doklady AN*, 2006, vol. 409, no. 1, pp. 15-18. (English version of journal: *Doklady Mathematics*, 2006, vol. 74, iss. 1, pp. 480-483. DOI: 10.1134/S106456240604003X).
3. Vinogradov A.Yu., Vinogradov Yu. I. Cauchy-Krylov functions and algorithms for solving boundary value problems in mechanics of shells. *Doklady AN*, 2000, vol. 375, no. 3, pp. 331-333. (English version of journal: *Doklady Physics*, 2000, vol. 45, iss. 11, pp. 620-622. DOI: 10.1134/1.1333870).
4. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [The Theory of Matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 548 p. (in Russian).
5. Krylov A.N. *O raschete balok, lezhashchikh na uprugom osnovanii* [On the calculation of beams lying on elastic foundation]. Leningrad, USSR AS Publ., 1931. 153 p. (in Russian).
6. Vinogradov Yu.I. A multiplicative method of solving boundary value problems of shell theory. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2013, vol. 77, no. 4, pp. 620- 628. (English version of journal: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, iss. 4, pp. 445-451. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.11.013).
7. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Special features of mathematical modeling of technical instruments. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 5-17. (in Russian).