НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. ISSN 1994-0408

Модификация критерия Реньи при проверке гипотез о значении коэффициента ускорения в испытаниях с переменной нагрузкой

08, август 2014
DOI: 10.7463/0814.0720923

Тянникова Н. Д.[1,a], Тимонин В. И.[1]

УДК 519.248

[1]Россия, МГТУ им. Баумана
[a]tiannikova@yandex.ru

Двухвыборочные статистики Реньи применяются для проверки однородности двух выборок в том случае, когда в силу ограниченности времени проведения испытаний отсутствует возможность испытывать выборки до отказа всех элементов. В частности, при определении коэффициентов ускорения форсированного режима испытаний проводят предварительные испытания в переменных режимах, для обработки результатов которых необходимо получить отказы части изделий в нормальном режиме. Для уменьшения продолжительности предварительных испытаний необходимо разработать статистический аппарат оценки коэффициентов ускорения, основанный на анализе цензурированных выборок. В работе предлагается метод обработки результатов предварительных исследований, основанный на статистиках типа Реньи, позволяющий определять функции пересчета по таким данным. Получен метод вычисления точных распределений статистик типа Реньи, предназначенных для проверки гипотез о виде функции связи. Особенностью используемых методов является применение оценок Каплана-Мейера функции надежности для сокращения объёмов и продолжительности испытаний в переменных режимах. Результаты работы являются обобщением на произвольные значения параметров предварительных испытаний результатов одного из авторов.

Ключевые слова: форсированные испытания, статистики типа Реньи, испытания в переменных режимах, непараметрическая статистика, оценки Каплана-Мейера

Введение

Применение режима испытаний с переменной нагрузкой является главной особенностью предварительных исследований в теории форсированных испытаний [1,2,3]. Не вдаваясь в излишнюю детализацию описания стандартных процедур проведения этих исследований (они подробно изложены в [4,5,6]), заметим, что они предназначены для определения функций пересчета между наработками на отказ в нормальном и форсированном режимах. Основным недостатком применяемых схем является необходимость испытаний не только в переменном, но и в постоянном режиме, что приводит к большим временным и материальным затратам. В связи с этим в работах [7,8] был предложен новый метод проведения и обработки результатов предварительных исследований, который позволял определять функции пересчета только по испытаниям в переменном режиме, что значительно сокращает время на их проведение. Он был основан на применении новой статистики типа Колмогорова – Смирнова, для которой были получены предельное распределение и метод вычисления ее точных распределений для практически любых объемов выборок. Вместе с тем применение этой статистики требовало проводить испытания в переменном режиме до отказа всех изделий, что не всегда является возможным. В данной работе предлагается критерий типа Реньи, позволяющий определять функции пересчета по цензурированным справа данным, что дает возможность прекращать испытания до наступления всех отказов.

1. Постановка задачи

На испытания ставятся $N = mn$ образцов, случайным образом разбитые на n групп по m элементов. Пусть наработки одного и того же изделия ξ_0, $\xi_*^1,...,\xi_*^{m-1}$ в режимах $\varepsilon_0,\varepsilon_*^1,...,\varepsilon_*^{m-1}$ соответственно связаны соотношением

$$H_0:\ \xi_0 = \varphi_1\left(\xi_*^1\right),...,\xi_0 = \varphi_{m-1}\left(\xi_*^{m-1}\right), \tag{1}$$

где $\varphi_1(x),...,\varphi_{m-1}(x)$ – некоторые функции связи между наработками до отказа одного и того же изделия в режимах $\varepsilon_0,\varepsilon_*^1,...,\varepsilon_*^{m-1}$. Обозначим за $F_0(t)=1-P_0(t)$ функцию распределения наработок до отказа в нормальном режиме.

Изделия в количестве $N = mn$, разбитые случайным образом на n групп по m изделий, начинают испытываться в режиме ε_0, и, при первом отказе изделия в группе, оставшиеся $(m-1)$ изделия переключаются – одно в ε_*^1, второе – в ε_*^2, и т.д. Пусть $\xi_1^i,\xi_2^i,...,\xi_m^i$ – теоретические наработки до отказа в режиме ε_0 изделий i-ой группы. Обозначим $\theta_0^i,\theta_{*1}^i,...,\theta_{*(m-1)}^i$ – реальные времена работы изделий i-ой группы в режимах $\varepsilon_0,\varepsilon_*^1,...,\varepsilon_*^{m-1}$ соответственно. Тогда, очевидно, $\theta_0^i = \min\left\{\xi_1^i,...,\xi_m^i\right\}$. Как доказано в [9], при соблюдении некоторых слабых ограничений на распределение наработок ξ_*^i, гипотеза (1) эквивалентна статистической гипотезе о том, что выборка θ_0^i, $\eta_1^i = \theta_0^i + \varphi_1\left(\theta_{*1}^i\right)$, …, $\eta_{(m-1)}^i = \theta_0^i + \varphi_{(m-1)}\left(\theta_{*(m-1)}^i\right)$ извлечена из той же совокупности, что и выборка $\xi_1^i,\xi_2^i,...,\xi_m^i$ с функцией распределения $F_0(t)$. В дальнейшем изложении под проверкой гипотезы (1) будем понимать проверку эквивалентной ей статистической гипотезы. Назовем η_j^i прогнозными наработками изделия в нормальном режиме.

Обозначим через $Q=\left(\theta_0^1,\eta_1^1,...,\eta_{(m-1)}^1,...,\theta_0^n,\eta_1^n,...,\eta_{(m-1)}^n\right)$ объединенную выборку из всех реальных и прогнозных наработок изделий. Пусть $\Theta=\left(\theta_0^1,...,\theta_0^n\right)$ – выборка из наработок изделий до первого отказа каждого группы. Её можно рассматривать как прогрессивно цензурированную выборку [10] из совокупности с $F_0(t)$. Тогда, при справедливости (1) можно оценить функцию надежности $P_0(t)$ по выборкам Q и Θ согласно следующим формулам [10]:

$$\widehat{P}_\theta(t)=\begin{cases}1,\ d_1(t)=0,\\ \prod_{i=1}^{d_1(t)}\left(1-\frac{1}{m(n-i+1)}\right),\ 1\le d_1(t)\le(n-1),\\ 0,\ d_1(t)=n,\end{cases}$$

$$\widehat{P}_q(t)=1-\frac{d_2(t)}{mn},$$

где $d_1(t)$, $d_2(t)$ – количество элементов выборок Θ и Q, меньших t. Оценка $\widehat{P}_\theta(t)$ называется оценкой Каплана-Мейера функции $P_0(t)$ по цензурированным данным [10]. Очевидно, что $d_1(t)\le d_2(t)$.

В [8] для проверки (1) использовалась статистика вида

$$T_{mn}=m\sqrt{n}\max_t\frac{\left(\widehat{P}_q(t)\right)^{m-1}}{1-m\cdot\left(1-\widehat{P}_q(t)\right)\cdot\left(\widehat{P}_q(t)\right)^{m-1}}\cdot\left|\widehat{P}_\theta(t)-\widehat{P}_q(t)\right|,$$

которая является аналогом статистики Колмогорова-Смирнова применительно к рассматриваемой проблеме.

Рассмотрим теперь случай, когда испытания проводят до наступления первых r отказов $\theta_0^1<\theta_0^2<...<\theta_0^r$ в нормальном режиме ε_0. Пусть выбраны некоторые функции $\xi_0=\varphi_1\left(\xi_*^1\right),...,\xi_0=\varphi_{m-1}\left(\xi_*^{m-1}\right)$. Обозначим ν- количество прогнозируемых наработок до отказа $\eta_j^i=\theta_0^i+\varphi_j(\theta_{*j}^i)$, для которых справедливо неравенство $\eta_j^i<\theta_0^r,\ j=\overline{1,m-1}$. Тогда $d_2(\theta_0^r)=r+\nu,\ \nu=\overline{0,r(m-1)}$.

Для проверки справедливости (1) предлагается статистика типа Реньи, которая имеет вид

$$R_\lambda=m\sqrt{\frac{n(1-\lambda)}{\lambda}}\max_{\psi(\widehat{P}_q)>1-\lambda}\frac{\left|\widehat{P}_\theta-\widehat{P}_q\right|}{\widehat{P}_q},\qquad(2)$$

где $\psi(x)=\dfrac{x^m}{1-m\,x^{m-1}(1-x)}$, $\lambda=\dfrac{r+\nu}{m\,n}$ - глубина цензурирования.

Заметим, что вид статистики (2) похож на вид стандартной двухвыборочной статистики Реньи [11], за исключением нормирующего множителя и области, по которой вычисляется максимум.

Основным результатом статьи является определение точных (для конечных объёмов выборок) и асимптотического распределения (2) при справедливости гипотезы (1).

2. Асимптотическое распределение

Без ограничения общности можно считать, что $P_0(t)=1-t,\ 0\le t\le 1.$ В [7] была доказана теорема, на которую существенно опирается вывод основного результата работы.

Теорема 1. [7] Распределение процесса $Y_{mn}(t)=m\sqrt{n}(\widehat{P}_\theta(t)-\widehat{P}_q(t)),\ 0\le t\le T<1$, слабо сходится при $n\to\infty$ к распределению непрерывного гауссовского процесса $Y(t)$ с $E\left[Y(t)\right]=0, E\left[Y(s)\cdot Y(t)\right]=(1-t)\cdot\dfrac{1-(1-s)^m-ms\cdot(1-s)^{m-1}}{(1-s)^{m-1}},\ 0\le s\le t\le T.$ ▸

Тогда для предельного распределения R_λ справедлив следующий результат.

Теорема 2. При $n\to\infty$ и справедливости (1) распределение статистики (2) сходится к стандартному распределению Реньи

$$\lim_{n\to\infty}P_n(R_\lambda<h)=L(h)=\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\exp\left\{-\frac{(2i+1)^2\pi^2}{8h^2}\right\}. \tag{3}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу теоремы Гливенко и при условии (1), выполняется соотношение $P\left\{\sup\limits_t\left|\widehat{P}_q-(1-t)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right\}=1$. Кроме того, в силу определения статистики (2), знаменатель $\widehat{P}_q$ ограничен снизу положительным числом. В этом случае, как было указано в [11], при определении асимптотических распределений можно заменить $\widehat{P}_q(t)$ на ее предельное значение $(1-t)$.

Рассмотрим преобразование $\tau(t)=\dfrac{1-(1-t)^m-mt\cdot(1-t)^{m-1}}{1-mt\cdot(1-t)^{m-1}}:[0,1]\to[0,1]$. Нетрудно показать, что $\tau'(t)=\dfrac{m(1-t)^{m-1}\left(1-(1-t)^{m-1}\right)}{\left(1-mt(1-t)^{m-1}\right)^2}\ge 0$, $\tau(0)=0$, $\tau(1)=1$, т.е. $\tau(t)$ - строго возрастающее на $[0,1]$ преобразование. Тогда существует обратное преобразование $t=t(\tau)$. Введем в рассмотрение процесс

$$W(\tau)=V(t(\tau))=Y(t(\tau))\cdot\frac{\left(1-t(\tau)\right)^{m-1}}{1-mt(\tau)\cdot\left(1-t(\tau)\right)^{m-1}}=Y(t(\tau))\cdot\phi(t(\tau)).$$

Имеем при $0\le u\le v<1,\ t(u)=s,\ t(v)=t$.

$$E\left[W(\tau)\right]=0,\ E\left[W(u)\cdot W(v)\right]=\phi(t(u))\phi(t(v))\cdot E\left[Y(t(u))Y(t(v))\right]=$$
$$=\phi(s)\phi(t)\cdot E\left[Y(s)Y(t)\right]=$$
$$=\frac{(1-t)^{m-1}}{1-mt\cdot(1-t)^{m-1}}\cdot\frac{(1-s)^{m-1}}{1-ms\cdot(1-s)^{m-1}}\cdot(1-t)\cdot\frac{1-(1-s)^m-ms\cdot(1-s)^{m-1}}{(1-s)^{m-1}}=$$

$$=\frac{(1-t)^m}{1-mt\cdot(1-t)^{m-1}}\cdot\frac{1-(1-s)^m-ms\cdot(1-s)^{m-1}}{1-ms\cdot(1-s)^{m-1}}=$$

$$=\frac{1-(1-s)^m-ms\cdot(1-s)^{m-1}}{1-ms\cdot(1-s)^{m-1}}\cdot\left(1-\frac{1-(1-t)^m-mt\cdot(1-t)^{m-1}}{1-mt\cdot(1-t)^{m-1}}\right)=u(1-v),\ u\le v.$$

Следовательно, $W(\tau)$ есть стандартный броуновский мост [11].

Имеем

$$L(h)=P\left(\sqrt{\frac{(1-\lambda)}{\lambda}}\sup_{\tau<\lambda}\frac{|W(\tau)|}{1-\tau}<h\right)=P\left(\sqrt{\frac{(1-\lambda)}{\lambda}}\sup_{1-\tau(t)>1-\lambda}\frac{|W(\tau(t))|}{1-\tau(t)}<h\right)=$$

$$=P\left(\sqrt{\frac{(1-\lambda)}{\lambda}}\sup_{\frac{(1-t)^m}{1-mt(1-t)^{m-1}}>1-\lambda}\frac{|V(t)|}{\frac{(1-t)^m}{1-mt(1-t)^{m-1}}}<h\right)=$$

$$=P\left(\sqrt{\frac{(1-\lambda)}{\lambda}}\sup_{\frac{(1-t)^m}{1-mt(1-t)^{m-1}}>1-\lambda}\frac{|Y(t)|}{1-t}<h\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left(m\sqrt{\frac{(1-\lambda)n}{\lambda}}\max_{\psi(\widehat{P}_q)>1-\lambda}\frac{\left|\widehat{P}_\theta-\widehat{P}_q\right|}{\widehat{P}_q}\right)$$

Последнее выражение является левой частью $L(h)$ соотношения (3). ▸

Доказанная теорема позволяет проверять гипотезы (1) при больших объемах выборок n. В реальных условиях эти объемы никогда не превышают нескольких десятков. Известно, что скорость сходимости распределений статистик типа Колмогорова – Смирнова очень медленная [12]. По этой причине необходимо иметь метод вычисления точных распределений статистики (2).

3. Точные распределения

В работе [8] был разработан общий метод вычисления точных распределений статистик типа Колмогорова – Смирнова. Он основан на модели случайного блуждания по ячейкам матрицы A треугольного вида. При этом вероятности $P(R_\lambda<h)$ вычисляются как вероятности невыхода траекторий случайного блуждания из некоторого подмножества $A_0\subset A$.

Пусть $\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{mn}$ – вариационный ряд выборки Q.

Пусть $z_i=\begin{cases}1, \text{если } \gamma_i-\text{одно из } \theta_0^i,\\ 0, \text{в противном случае,}\end{cases}$ $V_i=\sum_{j=1}^{i}z_j,\ W_i=n-V_i+1,\ i=1\ldots mn,\ W_0=0.$

Вектор $Z=(z_1,z_2,\ldots,z_{mn})$ называется допустимым, если:

1. Z состоит из n единиц и $(m-1)n$ нулей;

2. $\left[\frac{i-1}{m}\right]+1 \le V_i \le \min\{i,n\}$.

Очевидно, что в результате испытаний могут появиться только допустимые векторы.

Теорема 3. [8] Распределение вероятностей допустимых векторов не зависит от вида функции надежности $P_0(t)$ и определяется следующим выражением:

$$p(Z)=\frac{m^n n!}{(mn)!}\cdot\left((m-1)\cdot r_1-m+1\right)\cdot\ldots\cdot\left((m-1)\cdot r_{n(m-1)}-(m-1)n\cdot m+1\right)=$$

$$=\frac{m^n n!}{(mn)!}\prod_{j=1}^{(m-1)n}\left((m-1)r_j-mj+1\right), \quad (4)$$

где r_j – номер j-ого нуля в векторе Z. ▸

Чтобы вычислить точные распределения статистики R_λ, введем следующую модель случайного блуждания [8].

Пусть $\{a_{ij}\}=A,\ j=0,\ldots,n(m-1),\ i=0,\ldots,n$ – двумерный массив ячеек (он имеет треугольный вид). Частица на первом шаге выходит из ячейки $a_{n,n(m-1)}$ и на l-ом шаге переходит из $a_{n-W_{l-1},(m-1)n+W_{l-1}-l+1}$ в ячейку $a_{n-W_l,(m-1)n+W_l-l}$. На mn-ом шаге она заканчивает блуждание в ячейке a_{00}. Траектории частицы будут находиться во взаимно однозначном соответствии с допустимыми векторами Z. Равенство $z_k=1,\ k=1,\ldots,mn$ в векторе Z соответствует скачку вверх на $l=mn-k+1$ шаге, появление $z_k=0$, $k=1,\ldots,mn$ – скачку влево.

Массив ячеек, по которым происходит блуждание, показан на рис. 1.

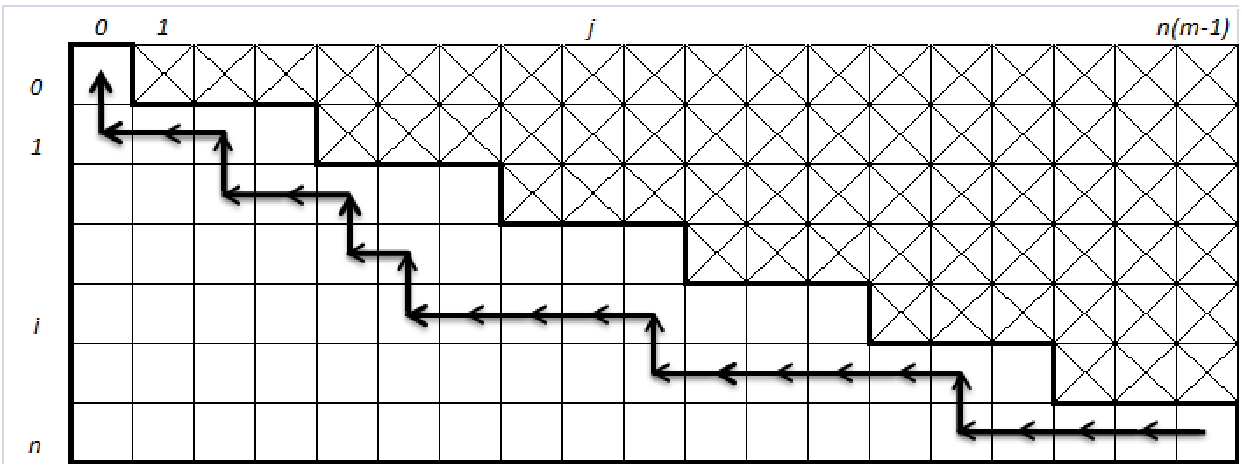

Рис. 1. Возможная траектория блуждания частицы по массиву ячеек

Теорема 4. Вероятность $P_n(R_\lambda<h)$ равна величине $\pi_{00}(h)$, которую можно получить повторным применением соотношения

$$\pi_{ij}(h)=\begin{cases}1, \text{ если } i=n,\ j=n(m-1);\\ \left(\dfrac{im-i-j}{mn-i-j}\pi_{i,j+1}(h)+\dfrac{m(n-i)}{mn-i-j}\pi_{i+1,j}(h)\right)\chi_{ij}(h),\ 0\le i\le n,\ 0\le j\le i(m-1).\end{cases} \quad (5)$$

с граничными условиями $\pi_{i,i(m-1)+1}=0,\ i=\overline{0,n}$, $\pi_{n+1,j}=0,\ j=\overline{1,n}(m-1)$.

Здесь $\chi_{ij}(h)=\begin{cases}1, & a_{ij}\in A_0\\ 0, & a_{ij}\notin A_0\end{cases}$ – индикатор массива A_0, где $A_0=\{a_{ij}\}$, чьи индексы $i,\ j$ удовлетворяют условиям:

1. $i=n,\ j=n(m-1)$.

2. $\dfrac{(mn-i-j)^m}{(mn)^m-m(mn-i-j)^{m-1}(i+j)}\le 1-\lambda;$

3. $\left(\dfrac{(mn-i-j)^m}{(mn)^m-m(mn-i-j)^{m-1}(i+j)}>1-\lambda\right)\bigcap$

$$\bigcap\left(m\sqrt{\frac{(1-\lambda)n}{\lambda}}\,\frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{i}\left(1-\dfrac{1}{mn-mk+m}\right)-\dfrac{mn-i-j}{mn}\right|}{\dfrac{mn-i-j}{mn}}<h\right).$$

Доказательство. Учитывая (4), нетрудно видеть, что вероятность реализации каждой траектории [8] можно записать в виде

$$p(\omega)=\prod_{l=1}^{mn}\left(\frac{m^{z_{mn-l+1}}W_l^{z_{mn-l+1}}\left(mW_{mn-l+1}-mn+l\right)^{1-z_{mn-l+1}}}{l}\right)=\prod_{l=1}^{mn}\lambda_l(\omega). \quad (6)$$

Пусть ω_{ij} – множество «частичных» траекторий, оканчивающихся в a_{ij} (соответствующие Z имеют ($n-i$) единиц и $n(m-1)-j$ нулей на последних $mn-(i+j)$ местах). Обозначим $p_{ij}=\prod\limits_{l=1}^{mn-i-j}\lambda_l(\omega)$. Согласно (6) вероятность любой траектории, совершающей скачок на $mn-(i+j)$-ом шаге $a_{i+1,j}\to a_{ij}$ (что соответствует $z_{i+j+1}=1$), имеет множитель $\dfrac{m(n-i)}{mn-i-j}$ (для скачка $a_{i,j+1}\to a_{ij}$ соответственно $\dfrac{im-i-j}{mn-i-j}$). Пусть $\pi_{ij}=\sum\limits_{\omega_{ij}}p_{ij}$. Тогда (5) следует из того, что в a_{ij} за один скачок можно попасть только из $a_{i+1,j}$ или $a_{i,j+1}$ (при $j=(m-1)i$ – только из $a_{i+1,(m-1)i}$). Множитель $\chi_{ij}(A_0)$ и граничные условия обеспечивают обращение в нуль вероятностей траекторий, не лежащих целиком в A_0. Множество $A_0=\{a_{ij}\}$ имеет такой вид вследствие того, что не проверяется неравенство $R_\lambda<h$ вне множества, соответствующего первым $(r+\nu)$ отказам. ▸

Алгоритм (5) реализован в виде программного продукта, позволяющего вычислять точные вероятности для очень значительных объёмов выборок.

В табл. 1-3 приведены значения точных вероятностей $P_n(R_\lambda < h)$ для случая $m = \overline{3,5}$ и аргументов $h = 1.78, 1.96, 2.24$, являющихся квантилями предельного распределения уровней $0.85, 0.9, 0.95$ соответственно. Полученные результаты говорят о том, что пользоваться асимптотическими значениями вероятностей можно только начиная с $n = 500$. Учитывая, что таких объёмов выборок на практике не бывает, необходимо пользоваться не асимптотическими, а точными вероятностями, вычисленными согласно (5).

Таблица 1. Квантили статистики R_λ при λ = 0,75, $m = 3$ для конечных объёмов выборок

n	**h**		
	1,78	**1,96**	**2,24**
10	0.8589	0.8596	0.8637
50	0.8893	0.9139	0.9604
100	0.8778	0.9145	0.9577
150	0.8669	0.9151	0.9561
500	0.8613	0.9089	0.9538
1000	0.8571	0.9054	0.9522
2000	0.8552	0.9036	0.9519
3000	0.8538	0.9030	0.9515
4000	0.8535	0.9026	0.9513

Таблица 2 . Квантили статистики R_λ при λ = 0,75, $m = 4$ для конечных объёмов выборок

n	**h**		
	1,78	**1,96**	**2,24**
10	0.8596	0.9139 0.9145	0.9118
50	0.8804	0.9177	0.9441
100	0.8599	0.9133	0.9528
150	0.8636	0.9113	0.9538
500	0.8575	0.9061	0.9533
1000	0.8570	0.9046	0.9526
2000	0.8550	0.9035	0.9515
3000	0.8538	0.9030	0.9513
4000	0.8535	0.9026	0.9512

Таблица 3. Квантили статистики R_λ при $\lambda = 0{,}75$, $m = 5$ для конечных объёмов выборок

n	h		
	1,78	**1,96**	**2,24**
10	0.8740	0.8859	0.8867
50	0.8906	0.9180	0.9525
100	0.8765	0.9156	0.9564
150	0.8669	0.9111	0.9522
500	0.8598	0.9062	0.9529
1000	0.8571	0.9052	0.9519
2000	0.8548	0.9034	0.9516
3000	0.8539	0.9030	0.9513
4000	0.8532	0.9026	0.9512

Заключение

В работе получены асимптотическое и для конечных объёмов выборок распределения статистики типа Реньи для случая зависимых выборок, одна из которых является прогрессивно цензурированной. Для оценки функции надежности по прогрессивно цензурируемой выборке использована оценка Каплана-Мейера. Данный результат позволяет проводить испытания до отказа лишь части испытываемых изделий.

Список литературы

1. Meeker W.Q., Escobar L.A., Hong Y. Using Accelerated Life Tests Results to Predict Field Reliability // Technometrics. 2009. Vol. 51, no. 2. P. 146-161.
2. Escobar L.A., Meeker W.Q. A Review of Accelerated Test Models // Statistical Science. 2006. Vol. 21, no. 4. P. 552-577.
3. Elsayed E.A. Accelerated Life Testing // In: Handbook of Reliability Engineering. Springer London, 2003. P. 415-428. DOI: 10.1007/1-85233-841-5_22
4. Карташов Г.Д. Предварительные исследования в теории форсированных испытаний. М.: Знание, 1980. 51 с.
5. Nelson W. Accelerated Testing Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. 601 p.
6. Birolinni A. Reliability Engineering. Theory and Practice. Springer Berlin Heidelberg, 2007. 593 p. DOI: 10.1007/978-3-540-49390-7
7. Тимонин В.И. Оптимизация проведения предварительных исследований в теории форсированных испытаний // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2003. № 2. С. 28-41.

8. Тимонин В.И., Ермолаева М.А. Точные распределения статистик типа Колмогорова-Смирнова, применяемых для анализа остаточной надежности резервированных систем // Электромагнитные волны и электронные системы. 2012. Т. 17, № 10. С. 66-72.
9. Карташов Г.Д. Установление связей между ненаблюдаемыми одновременно случайными величинами // Применение теории вероятностей и математической статистики: сб. науч. тр. Вильнюс: Ин-т мат. и кибер. АН ЛитССР, 1981. С.18-29.
10. Тимонин В.И., Ермолаева М.А. Оценки Каплана-Мейера в статистиках типа Колмогорова-Смирнова при проверке гипотез в испытаниях с переменной нагрузкой // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15, № 7. С. 18-26.
11. Hajek J., Sidak Z. Theory of Rank Tests. London: Academic Press, 2004. 438 p.
12. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: URSS, 2014. 584 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. ISSN 1994-0408

Renyi Criterion Modification in Testing the Hypotheses About Acceleration Factor Meaning at Variable-Load Tests

 # 08, August 2014

DOI: 10.7463/0814.0720923

N.D. Tiannikova[1,a], V.I.Timonin[1]

[1]Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russia

[a]tiannikova@yandex.ru

Keywords: accelareted testing, Renyi statistics, testing in alternative modes, Kaplan-Meier estimates

This paper concerns the acceleration factor estimation at strenuous tests of products in case of unstable production process (different batches of the same products may be with different index of reliability).

Kartashov has developed techniques for determining the invariant functional from batch to batch, which convert accelerated test results to the normal mode. Its highlight is to conduct so-called preliminary tests of one sample of products, including pre-tests in the variable mode. The standard procedure for the preliminary tests (examination) is as follows: testing the n groups of products, with m elements in each group, begins in the normal mode. As soon as one of the products in the group fails, tests of remaining products start in the accelerated mode. In addition to tests in the variable mode, there are also tests conducted in the constantly normal mode. As a result of such tests of products from one batch, an acceleration factor of strenuous tests is determined for this type of products for any batch.

The described procedure has the following shortcomings:

• tests duration in the normal mode is long and, as a result, is very much time-consuming and cost-demandable;

• tests conducted in the variable mode to the failure of all the products have the same drawback.

This paper proposes a method for conducting the preliminary studies. It does not require testing in the constant mode and, additionally, allows tests duration in the variable mode to be restricted by the moment of the first failure in the r group. To analyze the results of such tests the Renyi type criterion of homogeneity of two samples is suggested. A method for calculating the distribution of its statistics for the finite sample sizes is developed and implemented in the software complex. The asymptotic distribution of the statistics is given. The estimate of the ac-

celeration factor is provided by its minimization. It is shown that for real sample sizes of products only exact distribution should be used, as the asymptotic distribution approximates satisfactorily the exact distributions starting with $n = 500$.

References

1. Meeker W.Q., Escobar L.A., Hong Y. Using Accelerated Life Tests Results to Predict Field Reliability. *Technometrics*, 2009, vol. 51, no. 2, pp. 146-161.
2. Escobar L.A., Meeker W.Q. A Review of Accelerated Test Models. *Statistical Science*, 2006, vol. 21, no. 4, pp. 552-577.
3. Elsayed E.A. Accelerated Life Testing. In: *Handbook of Reliability Engineering*. Springer London, 2003, pp. 415-428. DOI: 10.1007/1-85233-841-5_22
4. Kartashov G.D. *Predvaritel'nye issledovaniia v teorii forsirovannykh ispytanii* [Preliminary studies in the theory of forced testing]. Moscow, Znanie Publ., 1980. 51 p. (in Russian).
5. Nelson W. *Accelerated Testing Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*. New Jersey, John Wiley & Sons, 2004. 601 p.
6. Birolinni A. *Reliability Engineering. Theory and Practice*. Springer Berlin Heidelberg, 2007. 593 p. DOI: 10.1007/978-3-540-49390-7
7. Timonin V.I. Optimization of Preliminary Studies in Theory of Forced Testing. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2003, no. 2, pp. 28-41. (in Russian).
8. Timonin V.I., Ermolaeva M.A. The exact distributions of Kolmogorov-Smirnov statistics used for residual reliability analysis of redundant systems. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy = Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2012, vol. 17, no. 10, pp. 66-72. (in Russian).
9. Kartashov G.D. Establishing links between both unobservable random variables. *Primenenie teorii veroiatnostei i matematicheskoi statistiki: sb. nauch. tr*. [Application of the theory of probability and mathematical statistics: collection of scientific papers]. Vil'nius, Institute of Mathematics and Cybernetics, Academy of Sciences of the Lithuanian SSR Publ., 1981, pp.18-29. (in Russian).
10. Timonin V.I., Ermolaeva M.A. About Kaplan-Meyer Estimators in Statistics Similar to Kolmogorov-Smirnov for Testing the Hypothesis in Variable Load Tests. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy = Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2010, vol. 15, no. 7, pp. 18-26. (in Russian).
11. Hajek J., Sidak Z. *Theory of Rank Tests*. London, Academic Press, 2004. 438 p.

12. Gnedenko B.V., Beliaev Iu.K., Solov'ev A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical methods in reliability theory]. Moscow, URSS Publ., 2014. 584 p. (in Russian).