НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Уточнение некоторых оценок для значений гипергеометрических функций

04, апрель 2014

DOI: 10.7463/0414.0704694

Иванков П. Л.

УДК 511.361

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

ivankovpl@mail.ru

Введение

Первые оценки неоднородных линейных форм от значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами были получены с помощью эффективной конструкции линейных приближающих форм [1]. В работе [2] предложен некоторый вариант метода Зигеля, который позволил получить аналогичные оценки в более общей ситуации. При этом в обоих случаях были использованы сведения из теории делимости в полях алгебраических чисел. Оценки линейных форм, содержащиеся в указанных работах, значительно отличаются от оценок сверху, которые можно получить с помощью принципа Дирихле. Оказалось, однако, что упомянутые оценки можно в некоторых случаях уточнить, причем это уточнение осуществляется за счет оптимального выбора степени нулевого многочлена без привлечения теорем о делимости в полях алгебраических чисел [3]. Метод, использованный в последней работе, можно применить и в случае, когда рассматриваемые неоднородные линейные формы содержат также и производные соответствующих функций по параметру. Заметим ещё, что оценки, полученные в данной работе (как и в работе [3]), все еще весьма далеки от ожидаемых.

1. Результаты

Рассмотрим функции

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)}\,\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x+\lambda_k}, \quad k=1,\,\ldots,\,t, \quad l_k=0,\,1,\,\ldots,\tau_k-1, \quad j=1,\,\ldots,\,u, \tag{1}$$

где $b(x) = (x+\beta_1)\ldots(x+\beta_m)$ — многочлен, первые v_1-1 корней которого рациональны ($v_1 \geqslant 1$), а $(x+\beta_{v_1})\ldots(x+\beta_m) \in \mathbb{I}[x]$; $\mathbb{I}$ — некоторое мнимое квадратичное поле; $u = m+1$;

$\tau_1, \ldots, \tau_t$ — натуральные числа. Будем считать, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ — дробные рациональные числа, причем $\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \notin \mathbb{Z}$ при $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 = 1, \ldots, t$. Потребуем также, чтобы $b(x)(x+\lambda_1)\ldots(x+\lambda_t)$ не равнялось нулю при $x = 1, 2, \ldots$ Перечисленные условия обеспечивают линейную независимость функций

$$1, \quad F_{kl_kj}(z), \quad k = 1, \ldots, t, \quad l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1, \quad j = 1, \ldots, u, \tag{2}$$

над полем рациональных дробей [4, теорема 1].

Теорема 1. Пусть $0 \neq \xi \in \mathbb{I}$, $v = u - v_1$ и выполнены все перечисленные выше условия; ε — произвольное положительное число, h_0, h_{kl_kj}, $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, u$, — нетривиальный набор целых чисел из поля $\mathbb{I}$. Обозначим

$$H = \max(|h_{kl_kj}|,\ k = 1, \ldots, t,\ l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1,\ j = 1, \ldots, u).$$

Тогда, если H достаточно велико (нижняя граница зависит от ε), то выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k-1} \sum_{j=1}^{u} h_{kl_kj} F_{kl_kj}(\xi) \right| > H^{-w-\frac{v}{v_1}-\varepsilon}, \tag{3}$$

где $w = uT$, $T = \tau_1 + \ldots + \tau_k$.

В [5, теорема 3] получена аналогичная оценка линейной формы, но с заменой в показателе степени в правой части (3) величины $w + \dfrac{v}{v_1}$ на $\dfrac{u^2T + m\theta}{u - m\theta}$, где

$$\theta = 1 - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\varkappa_1} + \ldots + \frac{1}{\varkappa_m}\right),$$

а $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ — степени соответственно чисел $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Во многих случаях

$$w + \frac{v}{v_1} < \frac{u^2T + m\theta}{u - m\theta}, \tag{4}$$

и оценка (3) оказывается точнее оценки из упомянутой работы. Пусть, например, $b(x) = x^2 + 1$, $t = 1$, $\tau_1 = 2$. Тогда $w = 6$, $v = 2$, $v_1 = 1$, $\theta = \dfrac{1}{2}$ и (4) приводит к неравенству $8 < \dfrac{19}{2}$.

2. Доказательства

Для доказательства теоремы применяются совместные приближения, которые строятся с помощью принципа Дирихле, хотя в рассматриваемом случае можно было бы применить и эффективную конструкцию, см. [6]. При этом специальным образом выбирается степень нулевого многочлена. Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть N — натуральное число, l — неотрицательное целое рациональное число. Тогда

$$\frac{d^l}{d\lambda^l} \prod_{x=1}^{N} \frac{1}{\lambda + x} = \prod_{x=1}^{N} \frac{1}{\lambda + x} \sum \frac{\pm 1}{(\lambda + x_1)\ldots(\lambda + x_l)},$$

где сумма состоит из не более чем $(N+l)^l$ слагаемых, а $x_1, \ldots, x_l$ — числа (среди которых могут быть и повторяющиеся), соответствующим образом выбранные из множества $\{1, \ldots, N\}$.

Доказательство проводится индукцией по l.

Пусть n — достаточно большое натуральное число, а числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ лежат на интервале $(0,\ 1)$. Через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от параметров функций (1), от поля $\mathbb{I}$, а также, возможно, от ξ и (или) от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Обозначим

$$N_1 = \left[n\Big(1+\frac{1}{v_1T}\Big)(1-\varepsilon_1)\right], \quad N_2 = \left[\frac{n}{T}\right]-1, \quad N_3 = \left[n\Big(1+\frac{1}{v_1T}-\frac{1}{uT}\Big)\right].$$

Лемма 2. При любом ε_2 из указанного выше интервала существует нетривиальный набор целых рациональных чисел

$$\theta_0, \quad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_n, \tag{5}$$

для которых выполняются равенства

$$\sum_{s=0}^{n} \theta_s \frac{s(s-1)\ldots(s-\sigma+1)}{\sigma!} A_{kl_ks} = 0, \tag{6}$$

где

$$A_{kl_ks} = \frac{n!}{s!}\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{\lambda_k + N_1 - n + x},$$
$$k = 1, \ldots, t, \quad l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant N_2(1-\varepsilon_2) - 1;$$

при этом

$$|\theta_s| \leqslant e^{\gamma_1 n}, \quad s = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Доказательство. Равенства (6) представляют собой систему из не более чем $n(1-\varepsilon_2)$ уравнений относительно $n+1$ неизвестных (5). Применим лемму Зигеля [7, лемма 11, с. 109]. Сначала оценим общий наименьший знаменатель коэффициентов рассматриваемой системы. Числа $s(s-1)\ldots(s-\sigma+1)/\sigma!$ являются целыми. Далее, используя лемму 1, получаем

$$A_{kl_ks} = \frac{n!}{s!\prod\limits_{x=1}^{n-s}(\lambda_k + N_1 - n + x)} \sum \frac{\pm 1}{(\lambda_k + N_1 - n + x_1)\ldots(\lambda_k + N_1 - n + x_{l_k})}. \tag{8}$$

Общий наименьший знаменатель для множителей перед суммой в правой части этого равенства (при всевозможных допустимых значениях k и s) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_2 n}$. Чтобы доказать последнее утверждение, надо сравнить степени, в которых простые числа входят в числители и знаменатели рассматриваемых дробей, а затем применить асимптотический закон распределения простых чисел. Соответствующее рассуждение является стандартным (см., например, [7, лемма 2 с. 186]). Хорошо известно, что общее наименьшее кратное чисел $1, \ldots, n$ есть величина порядка $e^{O(n)}$. Отсюда нетрудно вывести, что общий наименьший знаменатель дробей, входящих в сумму из правой части равенства (8), не превышает $e^{\gamma_3 n}$. Из сказанного следует, что коэффициенты системы (6) станут целыми рациональными числами после умножения на натуральное число, не превышающее $e^{\gamma_4 n}$. Модули коэффициентов такой преобразованной системы также легко оцениваются: они не превышают $e^{\gamma_5 n}$. Применяя вышеупомянутую лемму Зигеля, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Определим многочлен от z

$$P(z) = \sum_{s=0}^{n} p_s z^s, \tag{9}$$

где

$$p_s = \frac{n!\theta_s}{s!} \prod_{x=N_1-n+1}^{N_1-s} b(x), \tag{10}$$

и пусть

$$r_{kl_kj}(z) = P(z)\, F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{kl_kj\nu} z^{\nu}. \tag{11}$$

Лемма 3. При достаточно большом n в равенстве (11) $c_{kl_kj\nu} = 0$, если $N_3 \leqslant \nu \leqslant N_1$ и $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$; $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k$, $j = 1, \ldots, u$.

Доказательство. При $\nu \geqslant n$ имеем:

$$c_{kl_kj\nu} = \sum_{s=0}^{n} p_s(\nu - s)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{\lambda_k + x} = \frac{n!}{\prod\limits_{x=1}^{N_1-n} b(x)} \sum_{s=0}^{n} \frac{\theta_s}{s!}(\nu - s)^{j-1} \times$$

$$\times \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x-s) \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \left(\prod_{x=1}^{N_1-n} \frac{1}{\lambda_k + x} \prod_{x=N_1-n+1}^{N_1-s} \frac{1}{\lambda_k + x} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} (x + \lambda_k - s) \right) =$$

$$= \frac{n!}{\prod\limits_{x=1}^{N_1-n} b(x)} \sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=l_k} \frac{l_k!}{\mu_1!\mu_2!\mu_3!} \times$$

$$\times \frac{d^{\mu_1}}{d\lambda_k^{\mu_1}} \prod_{x=1}^{N_1-n} \frac{1}{\lambda_k + x} \sum_{s=0}^{n} \frac{\theta_s}{s!} Q_{k\mu_2j\nu}(s) \frac{d^{\mu_3}}{d\lambda_k^{\mu_3}} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{\lambda_k + N_1 - n + x}, \tag{12}$$

где

$$Q_{k\mu_2j\nu}(s) = (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x-s) \frac{d^{\mu_2}}{d\lambda_k^{\mu_2}} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} (x + \lambda_k - s). \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что (при достаточно большом n и при выполнении условия $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$) степени многочленов $Q_{k\mu_2j\nu}(s)$ не больше $N_2(1 - \varepsilon_2) - 1$. Поэтому такие многочлены представляются в виде линейных комбинаций многочленов $\dfrac{s(s-1)\ldots(s-\sigma+1)}{\sigma!}$ от s, входящих в (6):

$$Q_{k\mu_2j\nu}(s) = \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant N_2(1-\varepsilon_2)-1} C_{k\mu_2j\nu\sigma} \frac{s(s-1)\ldots(s-\sigma+1)}{\sigma!}. \tag{14}$$

Подставляя последнее выражение в (12), в соответствии с леммой 2 получим требуемое. Лемма доказана.

Пользуясь леммой 3, можно построить совместные приближения для функций (1). Положим

$$R_{kl_kj}(z) = P_{kl_kj}(z) + P(z)\,F_{kl_kj}(z), \tag{15}$$

где

$$P_{kl_kj}(z) = -\sum_{\nu=0}^{N_3-1} c_{kl_kj\nu} z^{\nu}, \quad k = 1, \ldots, t, \;\; l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1, \;\; j = 1, \ldots, u; \tag{16}$$

коэффициенты $c_{kl_kj\nu}$ определяются равенствами (11). Из леммы 3 следует, что при таком определении многочленов $P_{kl_kj}(z)$ функциональные формы $R_{kl_kj}(z)$ будут иметь при $z = 0$ порядок нуля не меньше, чем $N_1 + 1$.

Лемма 4. Для любого ε_3, $0 < \varepsilon_3 < 1$, можно подобрать ε_1 и ε_2 так, что при всех достаточно больших n будут справедливы оценки

$$|p_s| \leqslant e^{\gamma_6 n}\left(\frac{n!}{s!}\right)^u, \quad |P(\xi)| \leqslant e^{\gamma_7 n}(n!)^u, \quad |R_{kl_kj}(\xi)| \leqslant (n!)^{-\frac{u(1-\varepsilon_3)}{v_1 T}}.$$

Лемма носит чисто технический характер. Первая оценка следует из (10), вторая вытекает из первой, а третью можно получить, если первую оценку применить к (непреобразованному) выражению для $c_{kl_kj\nu}$, см. (12). При этом надо принять во внимание сделанное перед формулировкой рассматриваемой леммы замечание о порядке нуля функции $R_{kl_kj}(z)$.

Для дальнейшего важно иметь оценку общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов (16). Общим знаменателем некоторого множества X чисел из поля $\mathbb{I}$ будем называть любое ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое каждое число из X становится целым в $\mathbb{I}$. Наименьший по модулю знаменатель множества X будем называть наименьшим общим знаменателем этого множества.

Лемма 5. Модуль наименьшего общего знаменателя множества чисел

$$c_{kl_kj\nu}, \quad k = 1, \ldots, t, \;\; l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1, \;\; j = 1, \ldots, u, \;\; \nu = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \tag{17}$$

оценивается сверху величиной $e^{\gamma_8 n}(n!)^{\frac{v}{v_1 T}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выражение для коэффициентов (17) при $\nu \geqslant n$ уже было фактически выписано по ходу доказательства леммы 3. При $0 \leqslant \nu < n$ имеем

$$c_{kl_kj\nu} = S_1 - S_2, \tag{18}$$

где S_1 совпадает с последним выражением из (12), а

$$S_2 = \frac{n!}{\prod\limits_{x=1}^{N_1-n} b(x)} \sum_{s=\nu+1}^{n} \frac{\theta_s}{s!}(\nu - s)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x-s) \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \left(\prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{\lambda_k + x} \prod_{x=\nu+1}^{n} (x + \lambda_k - s) \right), \tag{19}$$

или, после очевидных преобразований, использующих лемму 1,

$$S_2 = \sum_{s=\nu+1}^{n} \theta_s(\nu - s)^{j-1} \frac{\prod\limits_{x=1}^{N_1-\nu} b(x+\nu-s)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1-n} b(x)} \frac{n!}{s!\prod\limits_{x=1}^{n-s}(\lambda_k+x)} \sum_{\mu=0}^{l_k} \binom{l_k}{\mu} \times$$
$$\times \left(\sum \frac{\pm 1}{(\lambda_k+x_1)\dots(\lambda_k+x_\mu)}\right) \frac{d^{l_k-\mu}}{d\lambda_k^{l_k-\mu}} \prod_{x=\nu+1}^{n}(x+\lambda_k-s). \quad (20)$$

Знаменатель дроби, содержащей значения многочлена $b(x)$, полностью сокращается в силу условий $0 \leqslant \nu < n$ и $\nu+1 \leqslant s \leqslant n$. Рациональность чисел λ_k позволяет, как и при оценке общего наименьшего знаменателя множества чисел (8), применить соответствующую стандартную технику [7, лемма 2, с. 186]. Для оценки общего наименьшего знаменателя суммы в скобках применяются те же соображения, что были использованы в аналогичной ситуации для суммы из правой части (8); см. доказательство леммы 2. Очевидна и оценка общего наименьшего знаменателя последнего (продифференцированного по λ_k) произведения — здесь даже не нужна рациональность чисел λ_k. В результате получаем, что модуль общего наименьшего знаменателя чисел (20) не больше, чем $e^{\gamma_9 n}$.

Рассмотрим теперь уменьшаемое S_1 из правой части (18), которое записывается в виде последнего выражения из (12). Многочлен (13), входящий в (12), запишем с помощью (14), выразив коэффициенты $C_{k\mu_2 j\nu\sigma}$ через соответствующие интегралы; мы имеем равенства

$$C_{k\mu_2 j\nu\sigma} = \frac{\sigma!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{Q_{k\mu_2 j\nu}(z)dz}{z(z-1)\dots(z-\sigma)}, \quad (21)$$

где Γ — какая-либо положительно ориентированная окружность, охватывающая все особые точки подынтегральной функции. В данном случае уже нельзя утверждать, что $\sigma \leqslant N_2(1-\varepsilon_2)-1$, так как неравенство $\nu \geqslant N_3$ из леммы 3 не выполняется. Поэтому надо заменить верхнюю границу изменения σ в правой части (14) на N_4, где N_4 — степень многочлена $Q_{k\mu_2 j\nu}(s)$. Поскольку (14) является разложением многочлена из левой части этого равенства в ряд Ньютона, то здесь можно использовать готовые формулы соответствующей теории (см., например, [8, с. 40-41]). Подставим теперь (14) с учетом (21) в последнее выражение из числа входящих в (12), отбросив при этом нулевые слагаемые. Таковыми в соответствии с леммой 2 будут те, у которых $\sigma \leqslant N_2(1-\varepsilon_2)-1$. В результате при $0 \leqslant \nu \leqslant N_1-1$ получим такое равенство:

$$S_1 = \frac{n!}{\prod\limits_{x=1}^{N_1-n} b(x)} \sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=l_k} \frac{l_k!}{\mu_1!\mu_2!\mu_3!} \frac{d^{\mu_1}}{d\lambda_k^{\mu_1}} \prod_{x=1}^{N_1-n} \frac{1}{\lambda_k+x} \sum_{N_2(1-\varepsilon_2)-1<\sigma\leqslant N_4} \frac{\sigma!}{2\pi i} \times$$
$$\times \int\limits_{\Gamma} \frac{Q_{k\mu_2 j\nu}(z)dz}{z(z-1)\dots(z-\sigma)} \sum_{s=0}^{n} \frac{\theta_s}{s!} \frac{s(s-1)\dots(s-\sigma+1)}{\sigma!} \frac{d^{\mu_3}}{d\lambda_k^{\mu_3}} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{\lambda_k+N_1-n+x}. \quad (22)$$

Для оценки общего наименьшего знаменателя получившегося выражения следует заметить сначала, что общий наименьший знаменатель интегралов и дробей вида

$$\frac{n!}{s!}\frac{d^{\mu_3}}{d\lambda_k^{\mu_3}}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{\lambda_k+N_1-n+x} \tag{23}$$

оценивается сверху величиной $e^{\gamma_{10}n}$. Для интегралов это становится очевидным, если записать их в виде вычетов относительно точки $z=\infty$, а для дробей (23) следует применить лемму 1 и стандартную технику, использующую рациональность чисел λ_k, о которой неоднократно говорилось выше. После этого останется лишь оценить (с учетом того, что в (22) выполняется неравенство $\sigma > N_2(1-\varepsilon_2)-1$) общий наименьший знаменатель дроби

$$\frac{[N_2(1-\varepsilon_1)]!}{\prod\limits_{x=1}^{N_1-n} b(x)}\frac{d^{\mu_1}}{d\lambda_k^{\mu_1}}\prod_{x=1}^{N_1-n}\frac{1}{\lambda_k+x}.$$

Перепишем, используя лемму 1, последнее выражение как произведение двух сомножителей:

$$\frac{[N_2(1-\varepsilon_2)]!}{\prod\limits_{x=1}^{N_1-n}(x+\beta_1)\dots(x+\beta_{v_1-1})(x+\lambda_k)}\sum\frac{\pm 1}{(\lambda_k+x_1)\dots(\lambda_k+x_{\mu_1})} \tag{24}$$

и

$$\frac{1}{\prod\limits_{x=1}^{N_1-n}(x+\beta_{v_1})\dots(x+\beta_m)}.$$

Сравнивая степени простых чисел, входящих в числитель и знаменатель дроби (24), а также применяя известное замечание об общем наименьшем кратном чисел $1,\dots,n$, — все это неоднократно использовалось выше — получаем, что общий наименьший знаменатель всех этих дробей оценивается сверху величиной $e^{\gamma_{11}n}$; при этом принимается во внимание и неравенство $\varepsilon_2<\varepsilon_1$ из леммы 3. К полученному таким способом общему наименьшему знаменателю дробей (24) добавим множитель

$$\rho^{N_1-n}\prod_{x=1}^{N_1-n}(x+\beta_{v_1})\dots(x+\beta_m),$$

где натуральное число ρ таково, что все коэффициенты многочлена $\rho(x+\beta_{v_1})\dots(x+\beta_m)$ лежат в $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. В результате мы сможем получить оценку модуля общего наименьшего знаменателя чисел S_1. Вспоминая оценку модуля общего наименьшего знаменателя чисел (19), получим требуемое утверждение. Лемма доказана. Теорема доказана.

Функция $F_{k01}(z)$ удовлетворяет уравнению $b(\delta)(\delta+\lambda_k)y = zy+\lambda_k b(0)$, $\delta = z\frac{z}{dz}$. Дифференцируя это уравнение по λ_k соответствующее число раз, можно получить уравнение, которому удовлетворяет функция $F_{kl_k1}(z)$, а затем составить систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции (1). Перенумеруем эти функции в произвольном порядке и обозначим их через

$$f_1(z), \quad \ldots, \quad f_w(z). \tag{25}$$

Систему уравнений, которой удовлетворяют функции (25), запишем в матричной форме:

$$\delta Y = AY + A_0,$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1w} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{w1} & \ldots & a_{ww} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{01} \\ \vdots \\ a_{0w} \end{pmatrix},$$

A и A_0 — матрицы, элементами которых являются многочлены от z. Пусть

$$\boldsymbol{F}(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_w(z) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}(z) = \begin{pmatrix} P_1(z) \\ \vdots \\ P_w(z) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}(z) = \begin{pmatrix} R_1(z) \\ \vdots \\ R_w(z) \end{pmatrix},$$

где компоненты столбцов $\boldsymbol{P}(z)$ и $\boldsymbol{R}(z)$ суть соответствующим образом перенумерованные многочлены (16) и функции (15). Тогда

$$\boldsymbol{R}(z) = P(z)\boldsymbol{F}(z) + \boldsymbol{P}(z).$$

Дальнейшие рассуждения проводятся по схеме, предложенной в работе [9]. Положим

$$\boldsymbol{R}_q(z) = z^q(D - A)^q\boldsymbol{R}(z), \quad q = 0,\, 1,\, \ldots,$$

где $D = \dfrac{d}{dz}$ — оператор дифференцирования. Ясно, что

$$\boldsymbol{R}_q(z) = P_q(z)\boldsymbol{F}(z) + \boldsymbol{P}_q(z),$$

где

$$P_q(z) = z^q\frac{d^q}{dz^q}P(z),$$

а $\boldsymbol{P}_q(z)$ есть столбец высоты w, составленный из многочленов; компоненты этого столбца обозначим $P_{1q}(z), \ldots, P_{wq}(z)$. Далее, рассуждая, как в [9], установим, что при достаточно большом n функциональный определитель, строками которого служат $P_q(z)$, $P_{1q}(z)$, $\ldots$, $P_{wq}(z)$, $q = 0,\, 1,\, \ldots,\, w$, отличен от тождественного нуля; справедливость последнего утверждения обеспечивается линейной независимостью функций (2) над полем рациональных дробей. Если система уравнений, которой удовлетворяют функции (1) неоднородна (т.е. если $b(0) \neq 0$), то фигурирующая в соответствующем рассуждении сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} y_0' = -A_0^T Y \\ Y' = -A^T Y. \end{cases}$$

После этого от функциональных приближений перейдем к числовым. Получающийся при этом результат оформим в виде леммы.

Лемма 6. При любом ε_4, $0 < \varepsilon_4 < 1$, можно так выбрать ε_1, ε_2 и ε_3, что в поле $\mathbb{I}$ найдутся числа

$$g_0^{(q)}, \quad g_1^{(q)}, \quad \ldots, \quad g_w^{(q)}, \quad q = 0, 1, \ldots, w, \tag{26}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

1) определитель, строками которого служат числа (26) отличен от нуля;

2) числа $g_0^{(q)}$ являются целыми в поле $\mathbb{I}$, а модуль общего наименьшего знаменателя остальных чисел из (26) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_{12}n}(n!)^{\frac{v}{v_1T}}$;

3) $|g_0^{(q)}f_r(\xi) + g_r^{(q)}| \leqslant (n!)^{-\frac{u(1-\varepsilon_4)}{v_1T}}$, $r = 1, \ldots, w$, если n достаточно велико;

4) $|g_0^{(q)}| \leqslant e^{\gamma_{13}n}(n!)^u$; два последних неравенства справедливы при $q = 0, 1, \ldots, w$.

Из этой леммы утверждение теоремы выводится хорошо известным способом; см., например, [10, с. 60].

Заключение

Возможности метода, примененного в данной работе, не исчерпаны. Дальнейшие результаты могут быть связаны с обобщением теорем работы [4]. Здесь, по-видимому, имеют место теоремы о линейной независимости гипергеометрических функций и их производных (в том числе и по параметру) над полем рациональных дробей, условия которых совпадают с условиями соответствующих теорем работы [11].

Список литературы

1. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т.17, № 6. С. 1220–1235.

2. Галочкин А.И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. 1986. № 2. С. 30–34.

3. Иванков П.Л. Уточнение оценок некоторых неоднородных линейных форм // Математические заметки. 2005. Т. 77, вып. 4. С. 515–521.

4. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145–151.

5. Иванков П.Л. О дифференцировании по параметру некоторых функций // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 5. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/398478.html (дата обращения 01.03.2014). DOI: 10.7463/0512.0398478

6. Иванков П.Л. Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 12. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/500464.html (дата обращения 01.03.2014). DOI: 10.7463/1212.0500464
7. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 448 с.
8. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. 312 с.
9. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Padé approximation to Diophantine inequalities in values of G-functions // Number Theory. Springer Berlin Heidelberg, 1985. P. 9–51. (Ser. Lect. Notes in Math.; vol. 1135). DOI: 10.1007/BFb0074600
10. Иванков П.Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 5. С. 53–62.
11. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. P. 207–215.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Refinement of some estimates for values of the hypergeometric functions

04, April 2014

DOI: 10.7463/0414.0704694

Ivankov P. L.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
ivankovpl@mail.ru

In this paper we consider the arithmetic properties of values of generalized hypergeometric functions and their derivatives (including those with respect to parameter). Some parameters of these functions are irrational. The research aims at refining the lower bound estimates of the modules of heterogeneous linear forms with coefficients from some imaginary quadratic field of the abovementioned values (heterogeneity here is understood in the sense that the function values are considered together with the unit). To solve this problem we use the effective construction of simultaneous approximations. The degrees of polynomials to form such a construction we choose in a special way. The latter circumstance allows more accurate estimates of the modules of corresponding linear forms.

To solve similar problems a Siegel's method is, usually, used. This is well known in the theory of transcendental numbers method in which functional approximations are constructed by Dirichlet principle. The advantage of this method is the generality of results. In case of irrational parameters such method cannot be applied directly because the minimal common denominator of the hypergeometric series coefficients with irrational parameters grows too fast. Therefore, the first estimates of linear form modules from the values of hypergeometric functions with irrational parameters have been obtained via effective construction of linear approximating forms. Subsequently, the method has been developed, comprising both the elements of Siegel's method and those of the method based on the effective construction of linear approximating forms. Using a combined method enables us to estimate the linear forms under consideration in the most general situation. This method, however, has not been used yet to study the arithmetic nature of hypergeometric function values differentiated with respect to parameter.

Note that all known estimates of the type under consideration still fall far short of expectations. This remark refers just to the heterogeneous case; some of the known estimates of homogeneous

linear forms in most cases cannot be further refined. Generalization of the results in this paper seems to be accomplished by abovementioned combined method, which includes both the generality of Siegel's method and the capabilities of effective constructions.

Publications with keywords: estimates of linear forms, simultaneous approximations, generalized hypergeometric functions, differentiation with respect to parameter

References

1. Galochkin A.I. [On the arithmetic properties the values of certain entire hypergeometric functions]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal — Siberian mathematical journal*, 1976, vol. 17, no. 6, pp. 1220–1235. (in Russian).
2. Galochkin A.I. [Analogue of Siegel's method]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika, mekhanika*, 1986, no. 2, pp. 30–34. (in Russian).
3. Ivankov P.L. [Refinement of estimates for some nonhomogeneous linear forms]. *Matematicheskie zametki*, 2005, vol. 77, iss. 4, pp. 515–521. (English translation: *Mathematical Notes*, 2005, vol. 77, iss. 3-4, pp. 476–481. DOI: 10.1007/s11006-005-0046-7).
4. Ivankov P.L. [On linear independence of certain functions]. *Chebyshevskii sbornik*, 2010, vol. 11, iss. 1, pp. 145–151. (in Russian).
5. Ivankov P.L. [On differentiation with respect to parameter of some functions]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana — Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 5. DOI: 10.7463/0512.0398478 (in Russian).
6. Ivankov P.L. [On the application of simultaneous approximations for the investigation of arithmetic properties of the values of hypergeometric functions]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana — Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 12. DOI: 10.7463/1212.0500464 (in Russian).
7. Шидловский А.Б. Shidlovskiy A.B. *Transtsendentnye chisla* [Transcendental numbers]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 448 p. (in Russian).
8. Фельдман Н.И. Fel'dman N.I. *Sed'maia problema Gil'berta* [Hilbert's seventh problem]. Moscow, MSU Publ., 1982. 312 p. (in Russian).
9. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Padé approximation to diophantine inequalities in values of G-function. In: *Number Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 1985, pp. 9–51. (Ser. *Lect. Notes in Math.*; vol. 1135). DOI: 10.1007/BFb0074600
10. Иванков П.Л. Ivankov P.L. [On linear independence of values of entire hypergeometric functions]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* — Siberian mathematical journal, 1993, vol. 34, no. 5, pp. 53–62. (in Russian).
11. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms. In: *New Advances in Transcendence Theory*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1988, pp. 207–215.