

УДК 517.938

Метод вариаций решения терминальных задач для двумерных систем канонического вида при наличии ограничений

Касаткина Т. С.^{1,*}, Крищенко А. П.¹

[*kasatkina_t_s@mail.ru](mailto:kasatkina_t_s@mail.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается задача терминального управления с фиксированным временем для аффинных систем второго порядка при наличии ограничений на состояния. Предложено решение этой задачи в случае систем со скалярным управлением, имеющих регулярный канонический вид. Доказано, что исходная терминальная задача эквивалентна задаче поиска функции, удовлетворяющей определенным условиям. Функция строится в два этапа. На первом этапе строится функция, определяющая решение терминальной задачи без ограничений. На втором этапе построенная функция, если необходимо корректируется с помощью дополнительного слагаемого, влияние которого регулируется значением входящего в это слагаемое параметра. Предложенный метод протестирован на конкретном примере системы, описывающей колебания математического маятника.

Ключевые слова: терминальное управление, канонический вид, ограничения на состояния

Введение

Решение терминальной задачи заключается в нахождении программного управления, которое реализует движение вдоль траектории, соединяющей заданное начальное положение системы с заданным конечным положением. Формулировка задачи терминального управления может содержать ограничения на состояния. Ограничения на состояния могут следовать из физического смысла задачи, а могут быть наложены исходя из других соображений. Независимо от природы ограничений их наличие существенно осложняет решение задачи.

Решение терминальных задач рассматривалось для плоских систем [1] и аффинных систем с векторным управлением, которые преобразуются к квазиканоническому виду [2, 3, 4, 5, 6]. В работе [7] изложено решение терминальной задачи для динамических систем канонического вида путем построения программной траектории в виде многочлена, степень которого определяется размерностью системы. Однако эти подходы не позволяют учесть ограничения.

В работах [8, 9] описано решение терминальных задач методом накрытий. Этот подход представляет собой обобщение решения задач терминального управления для плоских систем. Идея данного метода заключается в том, что он сводит решение исходной терминальной задачи к решению двух задач Коши, построенных определенным образом. В [10] представлен алгоритм решения терминальной задачи за фиксированное время с помощью кусочно-постоянного управления. Алгоритм использует плоскости переключения, которые получены на основе аппроксимации решений задач линейного программирования. В [11, 12] изложен метод решения задач терминального управления для аффинных систем, использующий орбитальную линеаризацию для преобразования исходной системы к системе канонического вида. В работе [13] для решения терминальных задач используется параметрическое множество решений интегральных уравнений.

В работах [14, 15] рассматривались задачи оптимального управления с заданными граничными условиями и ограничениями на состояния. Авторы использовали метод локальных вариаций. Идея этого метода заключается в поиске локального минимума функционала путем рекуррентного построения последовательности приближений, которая определяет решение задачи. Построение происходит путем варьирования вектора фазовых координат, что позволяет учесть граничные условия и ограничения на состояние. Трудность заключается в определении элементарной операции [16], которая ставит в соответствие двум близким точкам фазового пространства управление как функцию времени. В случае если размерность пространства состояний системы совпадает с размерностью управления, элементарная операция вводится достаточно просто, иначе каждое ее выполнение требует решения вспомогательной вариационной задачи.

В данной статье изложен метод решения задач терминального управления с фиксированным временем для систем второго порядка при наличии ограничений на состояния. Он заключается в построении программной траектории с помощью полинома как функции времени, которая является решением терминальной задачи, при отсутствии ограничений. Если программная траектория удовлетворяет ограничениям, то реализующее ее управление является решением поставленной задачи. Если ограничения на построенную программную траекторию нарушаются, то траектория корректируется путем добавления новой функции, влияние которой регулируется значением параметра. Управление, реализующее движение вдоль построенной программной траектории, является непрерывным.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 приведена постановка задачи. В разд. 2 приведено решение терминальной задачи, не учитывающее ограничения на состояния системы. В разд. 3 изложена схема учета ограничений на состояния. В разд. 4 представлен пример решения задачи терминального управления при наличии ограничений на состояния для системы, описывающей колебания математического маятника. В заключении приведено краткое обсуждение полученных результатов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим гладкую аффинную систему канонического вида со скалярным управлением

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}) + g(y, \dot{y})u, \quad t \in [0; t_*] \quad (1)$$

и ограничениями на состояния

$$h_k(y, \dot{y}) \leq 0, \quad k = \overline{1, K}. \quad (2)$$

Обозначим вектор состояния (y, \dot{y}) системы (1) через \bar{y} и пусть Ω — область допустимых состояний, т.е. $\Omega = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^2: h_k(\bar{y}) \leq 0, k = \overline{1, K}\}$. Будем считать, что система (1) является регулярной, т.е. $g(\bar{y}) \neq 0$ при $\bar{y} \in \Omega$. Также предполагаем, что на переменные состояния заданы граничные условия

$$\bar{y}|_{t=0} = \bar{y}_0 = (y_0, \dot{y}_0)^T, \quad \bar{y}|_{t=t_*} = \bar{y}_* = (y_*, \dot{y}_*)^T; \quad \bar{y}_0, \bar{y}_* \in \Omega, \quad (3)$$

и заданы граничные значения управлений:

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{t=t_*} = u_*. \quad (4)$$

Требуется найти непрерывное управление $u(t)$, удовлетворяющее условиям (4), которое является решением задачи терминального управления с фиксированным временем t_* для системы (1)–(2) с граничными условиями (3).

Каждое решение $u(t)$ поставленной терминальной задачи определяет функцию $y = y(t)$, которая является решением задачи Коши

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}) + g(y, \dot{y})u(t), \quad y|_{t=0} = y_0, \quad \dot{y}|_{t=0} = \dot{y}_0.$$

Функция $y(t)$ и ее производная по времени удовлетворяют системе ограничений (2). Значения ее первой и второй производной в начальный и конечный момент времени однозначно определяются граничными условиями (3)–(4), в частности,

$$\ddot{y}(0) = \ddot{y}_0 = f(y_0, \dot{y}_0) + g(y_0, \dot{y}_0)u_0, \quad \ddot{y}(t_*) = \ddot{y}_* = f(y_*, \dot{y}_*) + g(y_*, \dot{y}_*)u_*.$$

Следовательно, исходная терминальная задача может быть сформулирована в виде задачи поиска функции $\psi(t) \in C^2[0; t_*]$, удовлетворяющей условиям

$$\psi|_{t=0} = y_0, \quad \psi|_{t=t_*} = y_*, \quad (5)$$

$$\dot{\psi}|_{t=0} = \dot{y}_0, \quad \dot{\psi}|_{t=t_*} = \dot{y}_*, \quad (6)$$

$$\ddot{\psi}|_{t=0} = \ddot{y}_0, \quad \ddot{\psi}|_{t=t_*} = \ddot{y}_*, \quad (7)$$

$$h_k(\psi(t), \dot{\psi}(t)) \leq 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad t \in [0; t_*]. \quad (8)$$

Функция $\psi(t)$ определяет траекторию $y = \psi(t)$, $\dot{y} = \dot{\psi}(t)$, $t \in [0; t_*]$, системы (1), которая реализуется непрерывным программным управлением

$$u(t) = \frac{\ddot{\psi}(t) - f(\psi(t), \dot{\psi}(t))}{g(\psi(t), \dot{\psi}(t))} \quad (9)$$

с граничными значениями (4).

2. Решение терминальной задачи при отсутствии ограничений

В классе многочленов существует функция

$$\psi(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + \ddot{y}_0 \frac{t^2}{2} + c_0 \frac{t^3}{t_*^3} + c_1 \frac{t^4}{t_*^4} + c_2 \frac{t^5}{t_*^5}, \quad (10)$$

которая удовлетворяет условиям (5)–(7) и, следовательно, задает управление (9), являющееся решением терминальной задачи (1), (3)–(4) при отсутствии ограничений (2) на состояние системы. Коэффициенты функции (10) определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_* - y_0 - \dot{y}_0 t_* - 0.5 \ddot{y}_0 t_*^2 \\ \dot{y}_* t_* - \dot{y}_0 t_* - \ddot{y}_0 t_*^2 \\ \dot{y}_* t_*^2 - \ddot{y}_0 t_*^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица в левой части системы (11) является невырожденной, она не зависит от вида граничных условий и определяется только степенью полинома (10). Выполнение условий (5)–(7) гарантирует, что управление (9), реализующее движение по траектории $y = \psi(t)$, $\dot{y} = \dot{\psi}(t)$, $t \in [0, t_*]$, имеет граничные значения (4).

3. Учет ограничений на состояние (2)

В общем случае функция $\psi(t)$ в виде (10) не удовлетворяет условию (8). Пусть ограничения (2) таковы, что существуют непересекающиеся отрезки $[t_{li}; t_{ri}]$, $i = \overline{1, n}$, $0 < t_{l1}, t_{rn} < t_*$, $t_{li} < t_{l(i+1)}$, на каждом из которых не выполнено условие (8).

Будем искать новую функцию $\psi_d(t)$, которая удовлетворяет условиям

$$h_k(\psi_d(t), \dot{\psi}_d(t)) \leq 0, \quad t \in [0; t_*], \quad k = \overline{1, K}, \quad (12)$$

по следующей схеме. Отрезок $[t_{l1}; t_{r1}]$ расширяется в обе стороны до отрезка $[\tilde{t}_{l1}; \tilde{t}_{r1}]$ так, что $h_k(\psi(\tilde{t}_{l1}), \dot{\psi}(\tilde{t}_{l1})) \leq 0$, $k = \overline{1, K}$, $h_k(\psi(\tilde{t}_{r1}), \dot{\psi}(\tilde{t}_{r1})) \leq 0$, $k = \overline{1, K}$. На отрезке $[0; \tilde{t}_{l1}]$ функция $\psi_d(t)$ совпадает с функцией $\psi(t)$, так как условия $h_k(\psi(t), \dot{\psi}(t)) \leq 0$, $k = \overline{1, K}$ выполнены при $t \in [0; \tilde{t}_{l1}]$. На отрезке $[\tilde{t}_{l1}; \tilde{t}_{r1}]$ функция $\psi_d(t)$ ищется в виде $\psi_d(t) = \psi(t) + d\psi_{lr}(t)$, где функция $\psi_{lr}(t) \in C^2[\tilde{t}_{l1}; \tilde{t}_{r1}]$ удовлетворяет условиям

$$\psi_{lr}(\tilde{t}_{l1}) = 0, \quad \psi_{lr}(\tilde{t}_{r1}) = 1, \quad \dot{\psi}_{lr}(\tilde{t}_{l1}) = 0, \quad \dot{\psi}_{lr}(\tilde{t}_{r1}) = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{\psi}_{lr}(\tilde{t}_{l1}) = 0, \quad \ddot{\psi}_{lr}(\tilde{t}_{r1}) = 0, \quad (14)$$

$$\psi_{lr}(t) > 0, \quad t \in (\tilde{t}_{l1}; \tilde{t}_{r1}), \quad (15)$$

а d — параметр. Условия (13)–(14) гарантируют C^2 -гладкость функции $\psi_d(t)$ на отрезке $[0; \tilde{t}_{r1}]$ и непрерывность программного управления $u(t)$, реализующего движение по траектории $y = \psi_d(t)$, $\dot{y} = \dot{\psi}_d(t)$. Выберем функцию $\psi_{rl}(t)$ в виде

$$\psi_{rl}(t) = \tau^3(d_0 + d_1\tau^2 + d_2\tau^4), \quad \tau = \frac{t - \tilde{t}_{l1}}{\tilde{t}_{r1} - \tilde{t}_{l1}}, \quad (16)$$

где $d_0 = 4,375$, $d_1 = -5,25$, $d_2 = 1,875$. Можно показать, что функция $\psi_{rl}(t)$ в виде (16) удовлетворяет условиям (13)–(15).

Предположим, что найдено, например, численно значение параметра d , при котором на отрезке $t \in [\tilde{t}_{l1}; \tilde{t}_{r1}]$ выполнены ограничения $h_k(\psi_d(t), \dot{\psi}_d(t)) \leq 0$, $k = \overline{1, K}$. Тогда на отрезке $[\tilde{t}_{r1}; t_*]$ функция $\psi_d(t)$ полагается равной функции $\psi_r(t)$, которая задается аналогично (10) в виде

$$\psi_r(t) = \psi(\tilde{t}_{r1}) + d + \dot{\psi}(\tilde{t}_{r1})(t - \tilde{t}_{r1}) + \ddot{\psi}(\tilde{t}_{r1}) \frac{(t - \tilde{t}_{r1})^2}{2} + c_{r0} \frac{(t - \tilde{t}_{r1})^3}{(t_* - \tilde{t}_{r1})^3} + c_{r1} \frac{(t - \tilde{t}_{r1})^4}{(t_* - \tilde{t}_{r1})^4} + c_{r2} \frac{(t - \tilde{t}_{r1})^5}{(t_* - \tilde{t}_{r1})^5}, \quad (17)$$

где

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{r0} \\ c_{r1} \\ c_{r2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_* - \psi(\tilde{t}_{r1}) - d - \dot{\psi}(\tilde{t}_{r1})(t_* - \tilde{t}_{r1}) - 0,5\ddot{\psi}(\tilde{t}_{r1})(t_* - \tilde{t}_{r1})^2 \\ \dot{y}_*(t_* - \tilde{t}_{r1}) - \dot{\psi}(\tilde{t}_{r1})(t_* - \tilde{t}_{r1}) - \ddot{\psi}(\tilde{t}_{r1})(t_* - \tilde{t}_{r1})^2 \\ \ddot{y}_*(t_* - \tilde{t}_{r1})^2 - \ddot{\psi}(\tilde{t}_{r1})(t_* - \tilde{t}_{r1})^2 \end{pmatrix}.$$

Функция $\psi_r(t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \psi_r(\tilde{t}_{r1}) = \psi(\tilde{t}_{r1}) + d, & \psi_r(t_*) = y_*, \\ \dot{\psi}_r(\tilde{t}_{r1}) = \dot{\psi}(\tilde{t}_{r1}), & \dot{\psi}_r(t_*) = \dot{y}_*, \\ \ddot{\psi}_r(\tilde{t}_{r1}) = \ddot{\psi}(\tilde{t}_{r1}), & \ddot{\psi}_r(t_*) = \ddot{y}_*. \end{cases} \quad (18)$$

Выполнение условий (18) обеспечивает C^2 -гладкость функции $\psi_d(t)$ и непрерывность программного управления $u(t)$ на отрезке $[\tilde{t}_{r1}; t_*]$.

Если построенная функция $\psi_r(t)$ такова, что

$$h_k(\psi_r(t), \dot{\psi}_r(t)) \leq 0, \quad t \in [\tilde{t}_{r1}; t_*], \quad k = \overline{1, K}, \quad (19)$$

то функция

$$\psi_d(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [0; \tilde{t}_{l1}]; \\ \psi(t) + d\psi_{lr}(t), & t \in [\tilde{t}_{l1}; \tilde{t}_{r1}]; \\ \psi_r(t), & t \in [\tilde{t}_{r1}; t_*], \end{cases}$$

определяет непрерывное управление

$$u(t) = \frac{\ddot{\psi}_d(t) - f(\psi_d(t), \dot{\psi}_d(t))}{g(\psi_d(t), \dot{\psi}_d(t))}, \quad (20)$$

с граничными значениями (4), которое является решением терминальной задачи (3) системы (1) при наличии ограничений на состояние (2).

В случае если условия (19) не выполнены, построение новой функции $\psi_{rd}(t)$ на отрезке $[\tilde{t}_{r1}; t_*]$ происходит в соответствии с изложенной схемой.

4. Пример

В данном разделе представлено решение задачи терминального управления для системы, описывающей колебания математического маятника

$$\ddot{y} = \sin(y) + u. \quad (21)$$

Терминальная задача рассматривается с граничными значениями на состояние

$$\bar{y}_0 = (\pi, 0)^T, \quad \bar{y}_* = (0, 0)^T \quad (22)$$

и управление

$$u_0 = u_* = 0 \quad (23)$$

при $t_* = 5$ с и наличии ограничения на состояния системы

$$|\dot{y}| < 1. \quad (24)$$

Состояния \bar{y}_0, \bar{y}_* являются нижним и верхним положениями равновесия маятника соответственно. Траектория $y = \psi(t), \dot{y} = \dot{\psi}(t)$ системы на отрезке $[t_0; t_*]$, заданная в виде (10), соединяющая начальное положение \bar{y}_0 с конечным \bar{y}_* , такова, что ограничение (24) на отрезке $t \in [1, 8; 3, 2]$ не выполнено. Отрезок $[t_{l1}; t_{r1}] = [1, 8; 3, 2]$ расширен до отрезка $[\tilde{t}_{l1}; \tilde{t}_{r1}] = [1, 7; 3, 305]$ в соответствии со схемой, приведенной в разделе 3, и найдена функция

$$\psi_d(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [0; 1,7]; \\ \psi(t) + d\psi_{lr}(t), & d = 0,377, \quad t \in [1,7; 3,305]; \\ \psi_r(t), & t \in [3,305; 5], \end{cases} \quad (25)$$

которая удовлетворяет условиям

$$|\dot{\psi}_d(t)| < 1, \quad t \in [0; 5].$$

На рис. 1 синим цветом построен график функции $\psi(t)$ на отрезке $t \in [0; 5]$, а на рис. 2 — график производной $\dot{\psi}(t)$. Функция $\psi(t)$ определяет решение терминальной задачи для

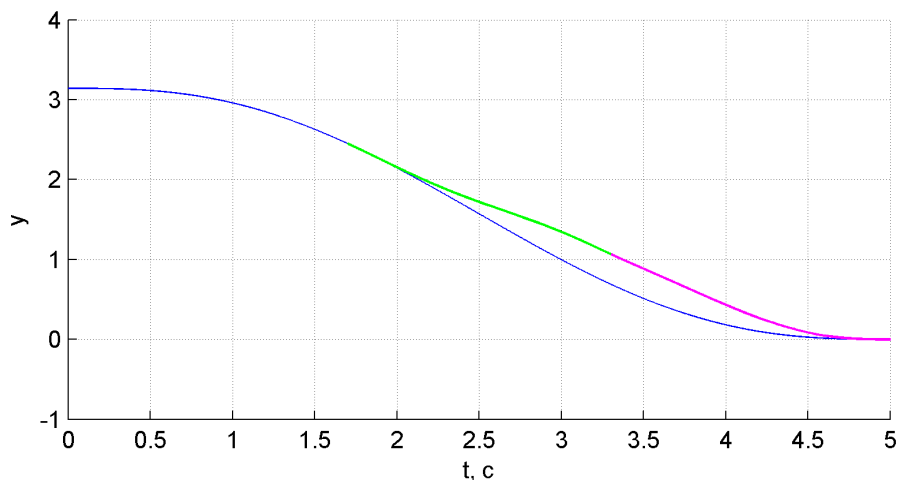


Рис. 1. График функции $\psi_d(t)$ (25)

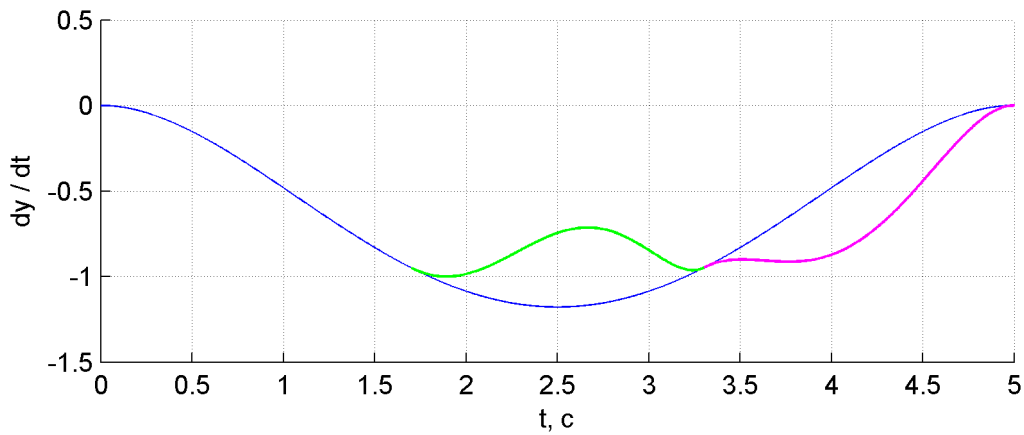


Рис. 2. График производной функции $\psi_d(t)$ (25)

системы (21) без ограничения (24). На рис. 1 зеленым цветом построен график функции $\psi(t) + d\psi_r(t)$ на отрезке $t \in [1, 7; 3, 305]$, малиновым — $\psi_r(t)$ на отрезке $t \in [3, 305; 5]$. На рис. 2 графики производных указанных функций построены с использованием соответствующих цветов. График функции $\psi_d(t)$ (25) приведен на рис. 1 и состоит из трех участков. Первый участок представляет собой часть графика функции $\psi(t)$, построенного синим цветом, на отрезке $t \in [0; 1,7]$, второй участок — график функции $\psi(t) + d\psi_r(t)$ на отрезке $t \in [1,7; 3,305]$, построенный зеленым цветом, третий участок — график функции $\psi_r(t)$ на отрезке $t \in [3,305; 5]$ малинового цвета. На рис. 2 представлен график производной $\dot{\psi}_d(t)$, который состоит из трех соответствующих частей.

На рис. 3 график управления, реализующего траекторию $y = \psi(t)$, $\dot{y} = \dot{\psi}(t)$, построен синим цветом. График управления, реализующего движение по траектории $y = \psi_d(t)$, $\dot{y} = \dot{\psi}_d(t)$, состоит из трех фрагментов: кривая синего цвета на отрезке $t \in [0; 1,7]$, кривая

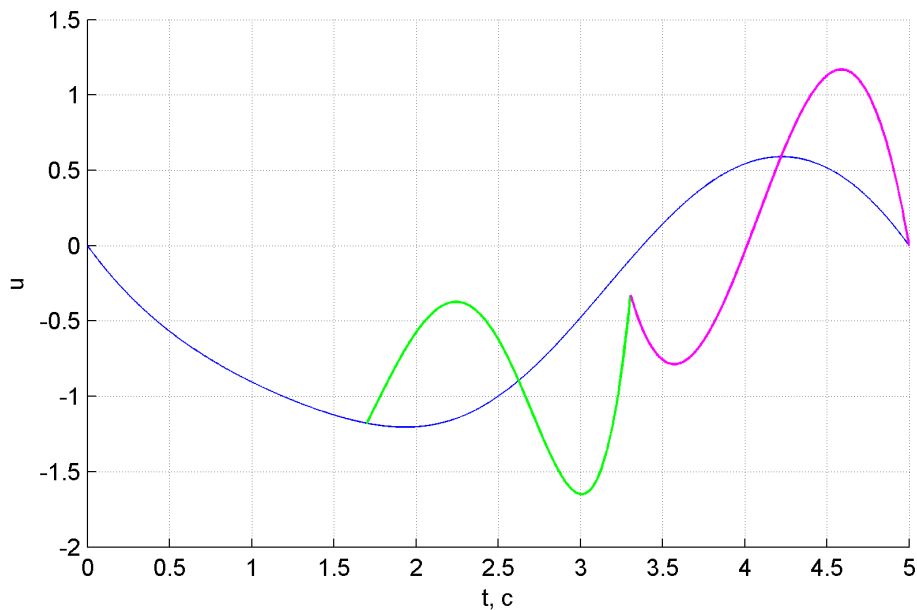


Рис. 3. Управление, реализующее движение по траектории $y = \psi_d(t)$, $\dot{y} = \dot{\psi}_d(t)$

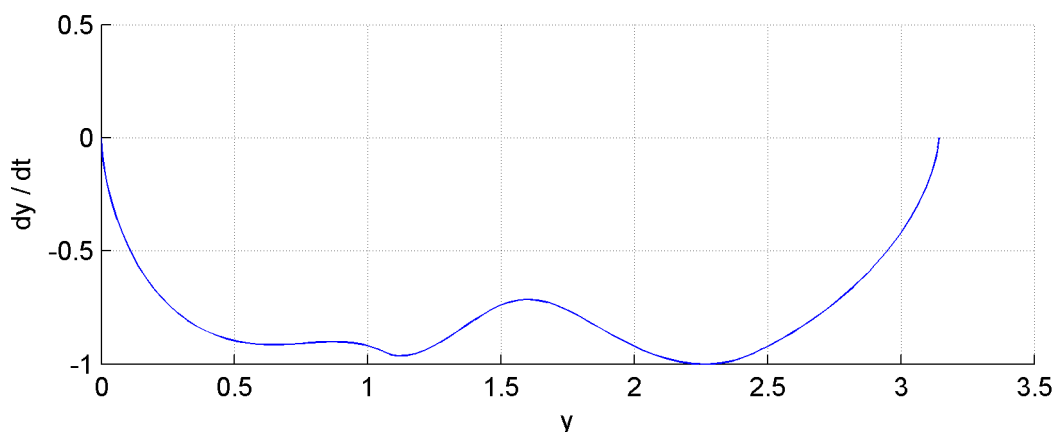


Рис. 4. Фазовая кривая системы (21)

зеленого цвета на отрезке $t \in [1,7; 3,305]$, кривая малинового цвета на отрезке $t \in [3,305; 5]$. На рис. 4 приведен вид фазовой кривой системы (21).

Предположим, что необходимо решить терминальную задачу с теми же граничными условиями (22)–(23) и при том же ограничении (24), но за меньшее время $t_* = 4,7$ с. В этом случае корректирование функции $\psi(t)$ (10) происходит за две итерации. Траектория системы $y = \psi(t)$, $\dot{y} = \dot{\psi}(t)$ такова что, ограничения (24) не выполнены на отрезке $t \in [1,5839; 3,1161]$. Отрезок $[t_{l1}; t_{r1}] = [1,5839; 3,1161]$ расширен до отрезка $[\tilde{t}_{l1}; \tilde{t}_{r1}] = [1,4899; 3,2148]$. Функция $\psi_r(t)$ определенная на отрезке $t \in [3,2148; 4,7]$ не удовлетворяет ограничению (24) на отрезке $[t_{l2}; t_{r2}] = [3,4592; 4,0984]$, который расширяется в обе стороны до отрезка $[\tilde{t}_{l2}; \tilde{t}_{r2}] = [3,3652; 4,1971]$. Итоговая функция $\psi_d(t)$, $t \in [0; 4,7]$, которая удовлетворяет условию $|\psi_d(t)| < 1$ имеет вид

$$\psi_d(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [0; 1,4899]; \\ \psi(t) + d\psi_{lr}(t), & t \in [1,4899; 3,2148]; \\ \psi_r(t), & t \in [3,2148; 3,3652]; \\ \psi_r(t) + d_r\psi_{rlr}(t), & t \in [3,3652; 4,1971]; \\ \psi_{rr}(t), & t \in [4,1971; 4,7], \end{cases} \quad (26)$$

где $d = 0,644$, $d_r = 0,118$.

На рис. 5 синим цветом построен график функции $\psi(t)$ на отрезке $t \in [0; 4,7]$, на рис. 6 — график производной $\dot{\psi}(t)$. График функции $\psi_d(t)$ в виде (26), приведенный на рис. 5, состоит из пяти фрагментов:

- часть графика функции $\psi(t)$ на отрезке $[0; 1,4899]$, построенная синим цветом;
- график функции $\psi(t) + d\psi_{lr}(t)$ на отрезке $[1,4899; 3,2148]$, построенный зеленой сплошной линией;
- часть графика функции $\psi_r(t)$ на отрезке $[3,2148; 3,3652]$, построенная малиновой сплошной линией;

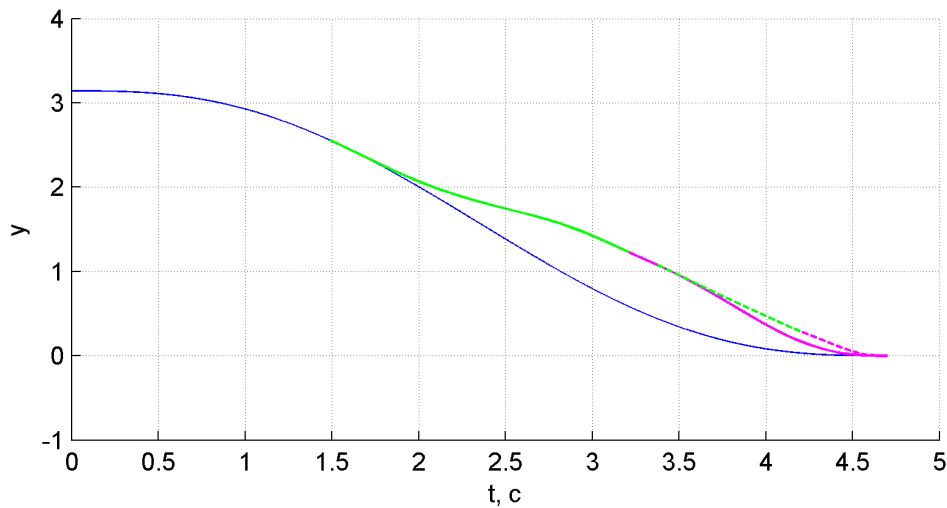


Рис. 5. График функции $\psi_d(t)$, заданной в виде (26)

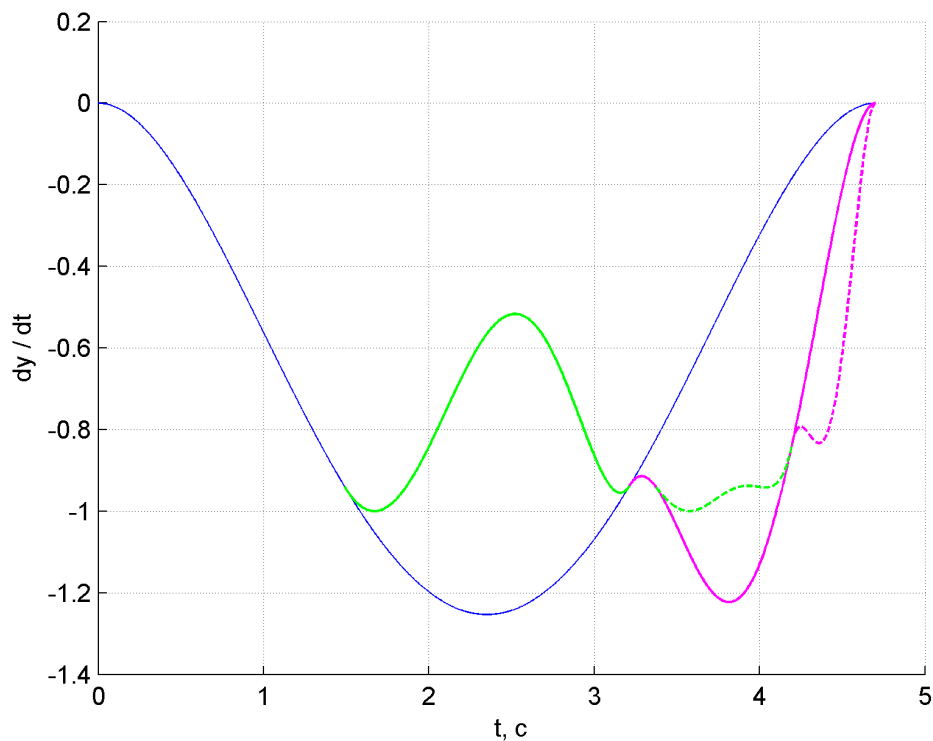


Рис. 6. График производной функции $\psi_d(t)$, заданной в виде (26)

– график функции $\psi(t) + d\psi_{rlr}(t)$ на отрезке $[3,3652; 4,1971]$, построенный зеленой прерывистой линией;

– график функции $\psi_{rr}(t)$ на отрезке $[4,1971; 4,7]$, построенный малиновой прерывистой линией.

На рис. 6 изображен график производной $\dot{\psi}_d(t)$, состоящий из соответствующих фрагментов. На рис. 7 аналогично изображено управление в виде (20), которое является решением задачи терминального управления для системы (21) с граничными условиями (22)–(23) при наличии ограничения (24). На рис. 8 приведен вид фазовой кривой системы (21).

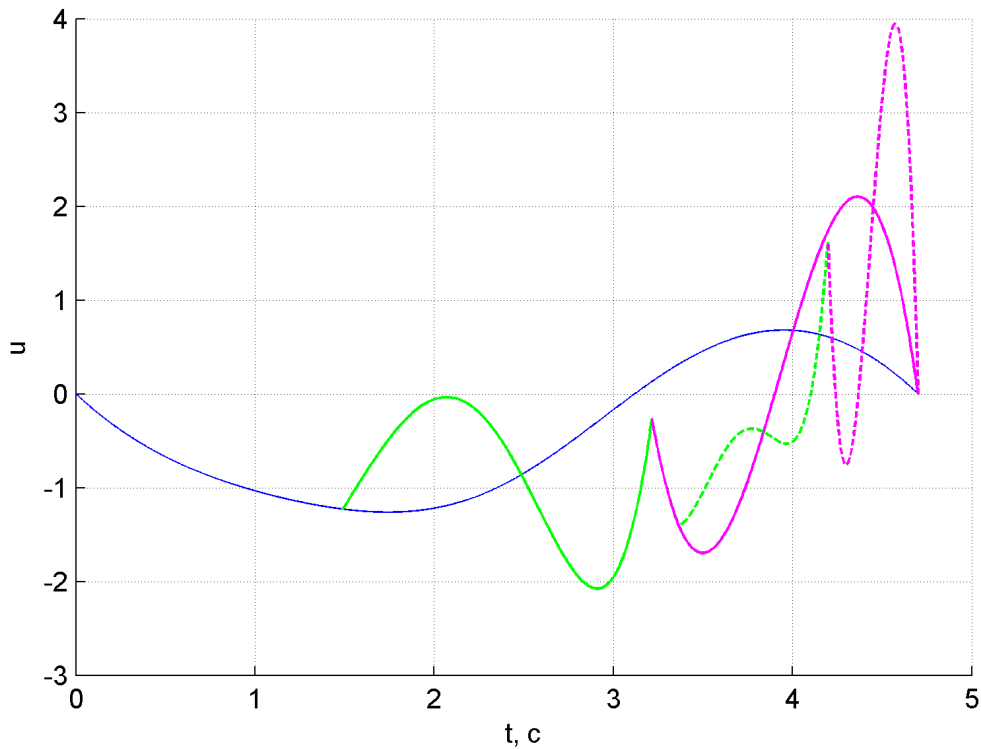


Рис. 7. Управление, реализующее движение по траектории $y = \psi_d(t)$, $\dot{y} = \dot{\psi}_d(t)$

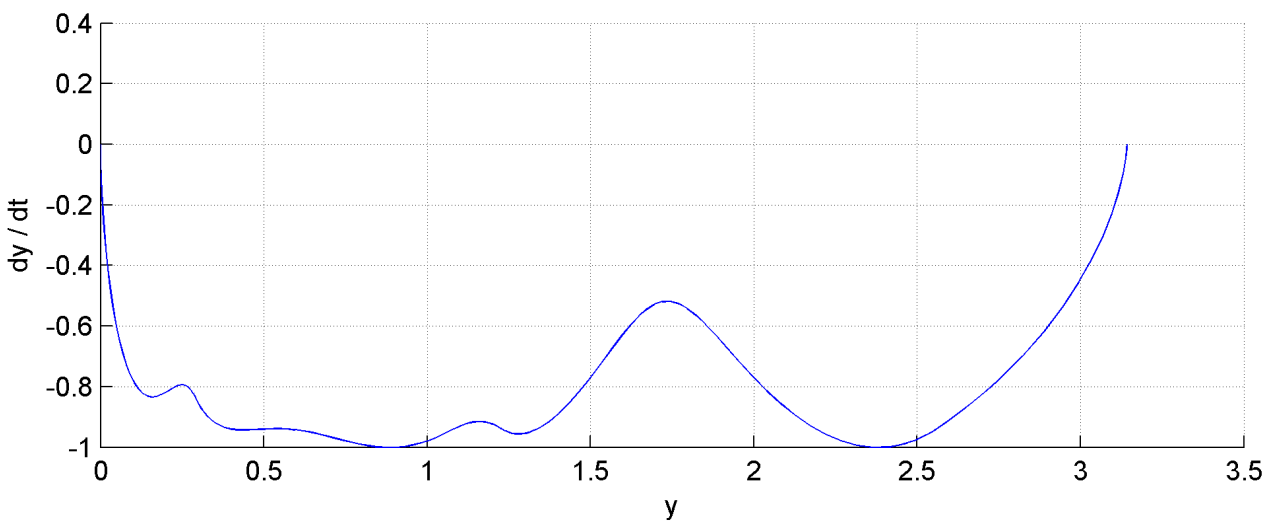


Рис. 8. Фазовая кривая системы (21)

Заключение

Предложен алгоритм решения задач терминального управления с фиксированным временем для систем второго порядка регулярного канонического вида со скалярным управлением при наличии ограничений на состояния. Он применен для решения терминальной задачи с ограничением для системы, описывающей колебания математического маятника. Данная схема может быть обобщена на решение терминальных задач с ограничениями на состояния для систем канонического вида с векторным управлением.

Работа выполнена в рамках выполнения государственной работы «Организация проведения научных исследований» (проект 736) и при поддержке РФФИ (гранты 14-01-00424, 14-07-00813).

Список литературы

1. Levine J., Martin Ph., Rouchon P. Flat systems. Mini-Course // ECC'97 European Control Conference, Brussels, 1-4 July 1997. 54 p.
2. Фетисов Д.А. Решение терминальных задач для аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 123–137. DOI: [10.7463/1013.0604151](https://doi.org/10.7463/1013.0604151)
3. Фетисов Д.А. Об одном методе решения терминальных задач для аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. 383–401. DOI: [10.7463/1113.0622543](https://doi.org/10.7463/1113.0622543)
4. Фетисов Д.А. Решение терминальных задач для многомерных аффинных систем на основе преобразования к квазиканоническому виду // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5. С. 16–31.
5. Фетисов Д.А. Достаточное условие управляемости многомерных аффинных систем. Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 281–294. DOI: [10.7463/1114.0737321](https://doi.org/10.7463/1114.0737321)
6. Фетисов Д.А. Решение терминальных задач для аффинных систем квазиканонического вида на основе орбитальной линеаризации // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 12. С. 1660–1668. DOI: [10.1134/S0374064114120103](https://doi.org/10.1134/S0374064114120103)
7. Голубев А.Е., Крищенко А.П. Решение терминальной задачи управления для аффинной системы при помощи многочленов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. С. 101–115. DOI: [10.7463/0215.0758826](https://doi.org/10.7463/0215.0758826)
8. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н., Ткачев С.Б. Автоматический синтез программного движения вертолета вдоль горизонтальной прямой // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 285–299. DOI: [10.7463/1013.0660675](https://doi.org/10.7463/1013.0660675)
9. Четвериков В.Н. Метод накрытий для решения задач терминального управления // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 2. С. 125–143. DOI: [10.7463/0214.0699730](https://doi.org/10.7463/0214.0699730)
10. Краснощеченко В.И. Простой алгоритм терминального управления пневмоприводом при наличии фазового ограничения и ограничения на управление // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 7. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/it/asu/1253.html> (дата обращения 01.04.2015).

11. Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Терминальное управление процессами в химических реакторах методом орбитальной линеаризации // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 355–372. DOI: [10.7463/1013.0612563](https://doi.org/10.7463/1013.0612563)
12. Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Решение терминальной задачи для систем 3-го порядка методом орбитальной линеаризации // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2014. № 12. С. 781–797. DOI: [10.7463/1214.0742829](https://doi.org/10.7463/1214.0742829)
13. Крищенко А.П. Параметрическое множество решений интегральных уравнений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3. С. 3–10.
14. Черноусько Ф.Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, № 4. С. 749–754.
15. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6, № 2. С. 203–217.
16. Моисеев Н.Н. Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. I // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 3. С. 485–494.

Variations Method to Solve Terminal Problems for the Second Order Systems of Canonical Form with State Constraints

Kasatkina T. S., Krishchenko A. P.

*kasatkina_t_s@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University

Keywords: terminal control, canonical form, state constraints

Terminal control problem with fixed finite time for the second order affine systems with state constraints is considered. A solution of such terminal problem is suggested for the systems with scalar control of regular canonical form.

In this article it is shown that the initial terminal problem is equivalent to the problem of auxiliary function search. This function should satisfy some conditions. Such function design consists of two stages. The first stage includes search of function which corresponds the solution of the terminal control problem without state constraints. This function is designed as polynomial of the fifth power which depends on time variable. Coefficients of the polynomial are defined by boundary conditions. The second stage includes modification of designed function if corresponding to that function trajectory is not satisfied constraints. Modification process is realized by adding to the current function supplementary polynomial. Influence of that polynomial handles by variation of a parameter value. Modification process can include a few iterations. After process termination continuous control is found. This control is the solution of the initial terminal problem.

Using presented scheme the terminal control problem for system, which describes oscillations of the mathematical pendulum, is solved. This approach can be used for the solution of terminal control problems with state constraints for affine systems with multi-dimensional control.

References

1. Levine J., Martin P., Rouchon P. Flat systems. Mini-Course. *ECC'97 European Control Conference*, Brussels, 1-4 July, 1997. 54 p.
2. Fetisov D.A. Solving terminal control problems for affine systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 10, pp. 123–137. DOI: [10.7463/1013.0604151](https://doi.org/10.7463/1013.0604151) (in Russian).

3. Fetisov D.A. A method for solving terminal control problems for affine systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 11, pp. 383–401. DOI: [10.7463/1113.0622543](https://doi.org/10.7463/1113.0622543) (in Russian).
4. Fetisov D.A. Solving of Terminal Problems for Multidimensional Affine Systems Based on Transformation to a Quasicanonical Form. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural sciences*, 2014, no. 5, pp. 16–31. (in Russian).
5. Fetisov D.A. Sufficient Controllability Condition for Multidimensional Affine Systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 11, pp. 281–294. DOI: [10.7463/1114.0737321](https://doi.org/10.7463/1114.0737321) (in Russian).
6. Fetisov D.A. Solution of terminal problems for affine systems in quasicanonical form on the basis of orbital linearization. *Differentsial'nye uravneniya*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1660–1668. (English version of journal: *Differential Equations*, 2014, vol. 50, iss. 12, pp. 1664–1672. DOI: [10.1134/S0012266114120106](https://doi.org/10.1134/S0012266114120106)).
7. Golubev A.E., Krishchenko A.P. Polynomials-Based Terminal Control of Affine Systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2015, no. 2, pp. 101–115. DOI: [10.7463/0215.0758826](https://doi.org/10.7463/0215.0758826) (in Russian).
8. Belinskaya Yu.S., Chetverikov V.N., Tkachev S.B. Automatic synthesis of the helicopter programmed motion along the horizontal line. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 10, pp. 285–299. DOI: [10.7463/1013.0660675](https://doi.org/10.7463/1013.0660675) (in Russian).
9. Chetverikov V.N. The covering method for the solution of terminal control problem. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 2, pp. 125–143. DOI: [10.7463/0214.0699730](https://doi.org/10.7463/0214.0699730) (in Russian).
10. Krasnoshchechenko V.I. Simple algorithm of terminal control of pneumodrive at state and control constraints. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 7. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/it/asu/1253.html>, accessed 01.04.2015. (in Russian).
11. Kasatkina T.S., Krishchenko A.P. Terminal control of processes in chemical reactors using orbital linearization. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 10, pp. 355–372. DOI: [10.7463/1013.0612563](https://doi.org/10.7463/1013.0612563) (in Russian).
12. Kasatkina T.S., Krishchenko A.P. Solving the Terminal Problem for the Third Order Systems Using the Orbital Linearization. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 12, pp. 781–797. DOI: [10.7463/1214.0742829](https://doi.org/10.7463/1214.0742829) (in Russian).
13. Krishchenko A.P. Parametric Sets of Integral Equations Solutions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural sciences*, 2014, no. 3, pp. 3–10. (in Russian).

14. Chernous'ko F.L. A local variation method for the numerical solution of variational problems. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1965, vol. 5, no. 4, pp. 749–754. (English version of journal: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, no. 4, pp. 234–242).
15. Krylov I.A., Chernous'ko F.L. Solution of the problems of optimal control by the method of local variations. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1966, vol. 6, no. 2, pp. 203–217. (English version of journal: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, no. 2, pp. 12–31).
16. Moiseev N.N. Metody dinamicheskogo programmirovaniya v teorii optimal'nykh upravlenii. 1. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1964, vol. 4, no. 3, pp. 485–494. (English version of journal: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, iss. 3, pp. 121–135).