

УДК 629.783

Расчет температурных деформаций и напряжений в композитном обтекателе конической формы

Сарбаев Б. С.^{1,*}

[*bssarbayev@mail.ru](mailto:bssarbayev@mail.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Предлагается аналитический способ расчета температурных деформаций и напряжений в композитном обтекателе конической формы при неравномерном нагреве. Расчетные соотношения получены на основе теории тонких конических ортотропных оболочек при осесимметричном нагружении. Рассматривается вариант неравномерного нагрева обтекателя, при котором температура нелинейно изменяется по длине образующей и по толщине. Получена система разрешающих дифференциальных уравнений. Для композитов с определенным соотношением модулей упругости представлено аналитическое решение. Предлагается вариант частного решения для системы дифференциальных уравнений. Приведен пример расчета. Показано, что для заданного температурного поля существенное значение имеют сжимающие напряжения на внешней поверхности композитного обтекателя.

Ключевые слова: композит, обтекатель, коническая оболочка, неравномерный нагрев, аналитическое решение

Введение

В летательных аппаратах различного назначения применяются конструктивные элементы в виде тонкостенных круговых конических оболочек, изготовленных из композиционных материалов (КМ). В ракетной технике такую форму (или близкую к ней) имеют головные обтекатели, хвостовые отсеки [1,2], раструбы и выдвигаемые насадки сопловых блоков РДТТ [3]. Для головных обтекателей и хвостовых отсеков основной нагрузкой являются внешнее аэродинамическое давление и нагрев, обусловленный движением в плотных слоях атмосферы. Раструбы и выдвигаемые насадки подвержены внешнему и внутреннему давлению, а также тепловому воздействию, вызванному истечением продуктов сгорания.

При проектировании указанных конструктивных элементов необходимо выполнить комплексный расчет, включающий решение газодинамических задач, анализ температурных полей, предельных силовых нагрузок и напряжений. В настоящее время для этой цели широко используются современные конечно-элементные программные

комплексы типа NASTRAN. Такой подход, как правило, является весьма трудоемким. Он предполагает грамотный выбор конечного элемента, рациональное построение конечно-элементной сетки, весьма громоздкий процесс подготовки и ввода исходных данных и, самое главное, тщательный анализ результатов численного расчета. В этой связи уместно подчеркнуть, что по-прежнему не теряют своей актуальности способы расчета, основанные на сравнительно простых расчетных схемах и допускающие аналитическое решение задачи. Расчетные зависимости, полученные в этом случае, могут быть полезными на этапах предварительного проектирования. Чтобы с их помощью оперативно прийти к конкретному численному результату, достаточно располагать, например, такой вычислительной системой, как MathCad.

Расчетная схема и нагрузка

В настоящей работе предлагается аналитический способ расчета температурных деформаций и напряжений в обтекателе конической формы, обусловленных тепловым воздействием внешней среды. Для конструкции обтекателя такой вид нагрузки является одним из наиболее неблагоприятных. Обтекатель представляет собой анизотропную оболочку вращения, изготовленную из КМ, при осесимметричном нагружении. Толщина стенки постоянна. Эскиз обтекателя и расчетная схема приведены на рис.1. Полюсное отверстие малого диаметра закрыто металлическим наконечником. Для соединения со смежным конструктивным элементом на торце большего диаметра предусмотрен металлический шпангоут. Предполагается, что жесткость наконечника и шпангоута существенно превышает жесткость КМ. В расчете применяются уравнения теории тонких конических оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява [4]. Предлагаемый подход может быть развит на случай иных элементов конструкций, упомянутых выше.

Температурное поле считается заданным. При этом оно изменяется как по образующей, так и по толщине стенки оболочки, т.е. $T = T(s, z)$, где $s_1 \leq s \leq s_2, |z| \leq 0,5h$ (см.рис1). Далее принимаем такое аппроксимирующее выражение

$$T(s, z) = T_{max} hc \frac{a^{\frac{s-s_1}{s_2-s_1}}}{b-z}, \quad (1)$$

где

$$a = \frac{T_0}{T_{max}}, \quad b = \frac{h}{2} \cdot \frac{\mu+1}{\mu-1}, \quad c = \frac{1}{\mu-1}, \quad \mu = \frac{T_{max}}{T_{min}}.$$

Здесь $T_{max}=T(s_1, h/2)$ и $T_{min}=T(s_1, -h/2)$ – температуры на внешней и внутренней поверхностях обтекателя в зоне наконечника соответственно; $T_0=T(s_2, h/2)$ – температура на внешней поверхности обтекателя в зоне шпангоута. Характер изменения температуры для случая $\mu=20, a=0,214$ показан на рис.2.

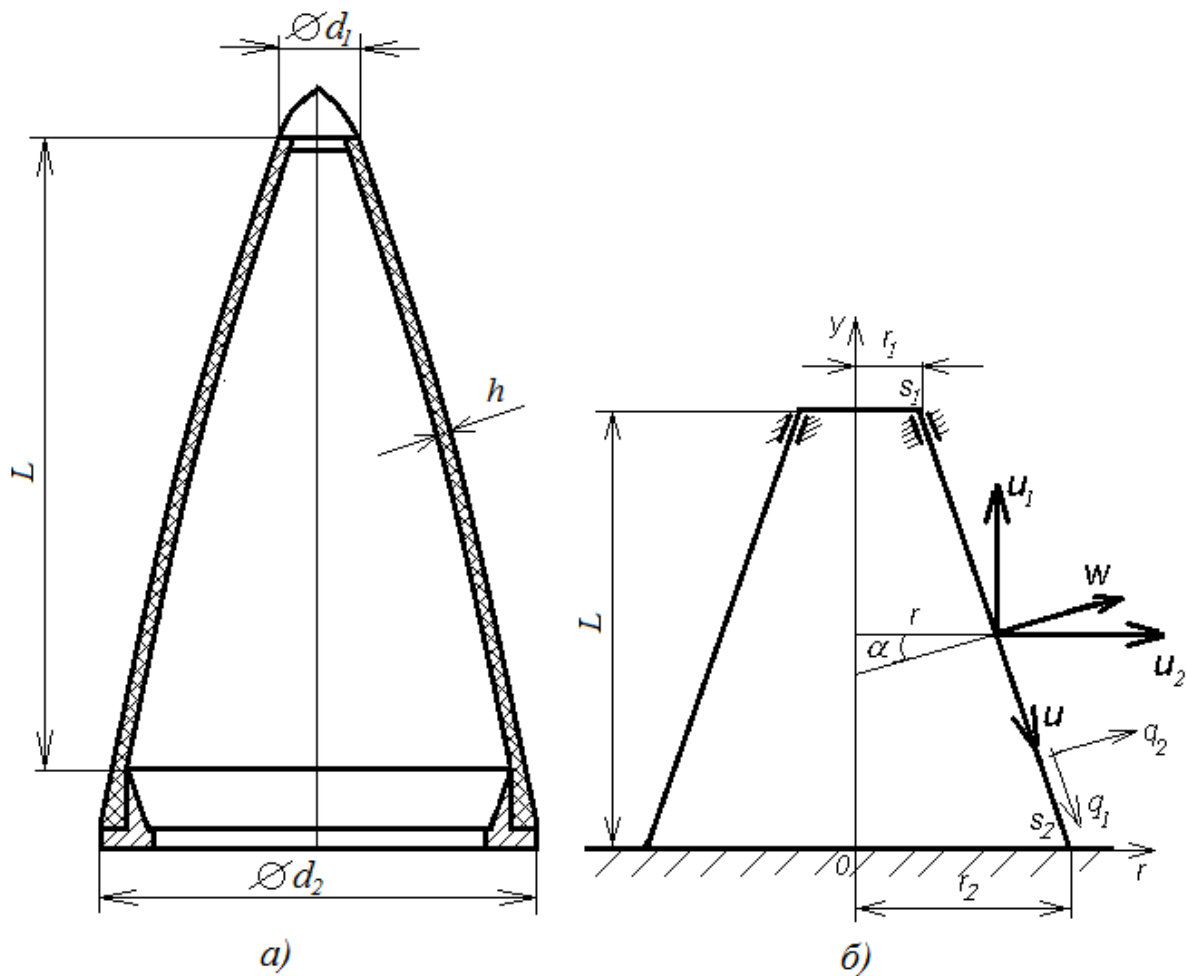


Рис.1. Эскиз и расчетная схема композитного обтекателя

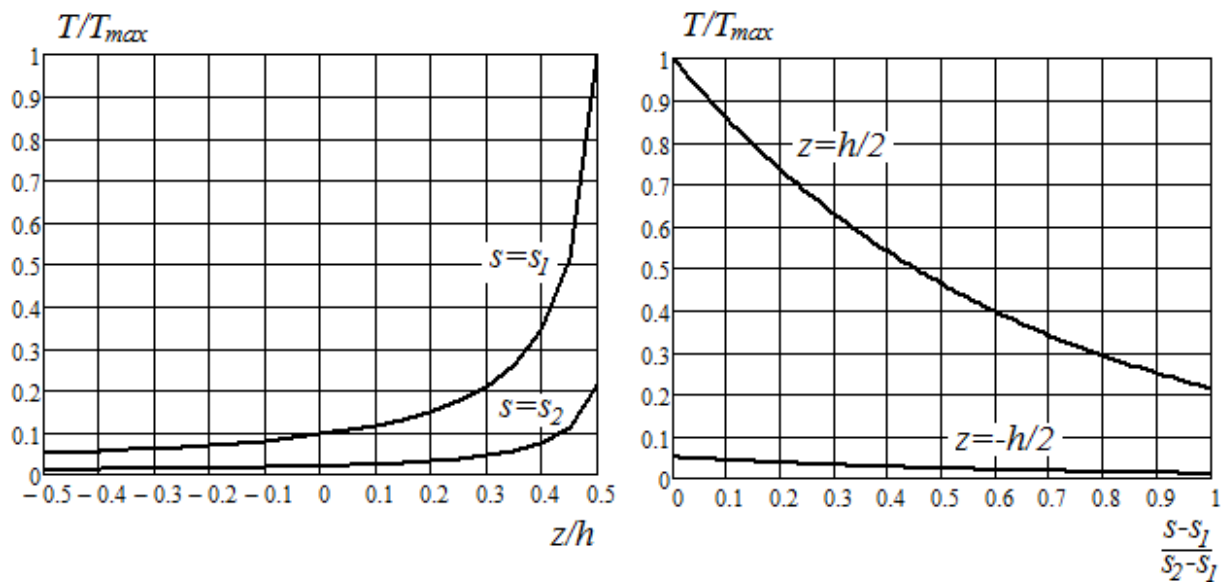


Рис.2. Изменение температуры в обтекателе в соответствии с равенством (1)

В настоящее время для изготовления обтекателей, испытывающих интенсивное тепловое воздействие, помимо керамических материалов, углерод-углеродных композитов применяются КМ на основе кварцевой ткани и неорганического связующего. Такой материал можно рассматривать как ортотропный. Для расчета необходимы модули упругости E_1 и E_2 соответственно вдоль основы и утка, модуль сдвига в плоскости армирования G_{12} , коэффициент Пуассона ν_{12} , коэффициенты линейного температурного расширения (КЛТР) β_{11} и β_{22} соответственно вдоль основы и утка. Далее полагаем, что волокна основы ориентированы вдоль образующей обтекателя.

Математическая модель

Соотношения термоупругости для ортотропной конической оболочки вращения, связывающие меридиональные (T_1 , M_1) и окружные (T_2 , M_2) силовые факторы и параметры деформированного состояния, при осесимметричном нагружении имеют следующий вид

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= B_1 \left(\frac{du}{ds} + \frac{\nu_{21} \cdot u_2}{s \cdot \sin \alpha} \right) - B_{1T} t(s), \\ T_2 &= B_2 \left(\nu_{12} \frac{du}{ds} + \frac{u_2}{s \cdot \sin \alpha} \right) - B_{2T} t(s), \\ M_1 &= D_1 \left(\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\nu_{21} \cdot \vartheta}{s} \right) - B_{1T} m(s), \\ M_2 &= D_2 \left(\nu_{12} \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\vartheta}{s} \right) - B_{2T} m(s), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где ϑ – угол поворота нормали в меридиональном направлении. Здесь приняты такие обозначения

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad B_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\ B_{1T} &= B_1 (\beta_{11} + \nu_{21} \beta_{22}), \quad B_{2T} = B_2 (\nu_{12} \beta_{11} + \beta_{22}), \\ D_1 &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}. \end{aligned}$$

Величины $t(s)$ и $m(s)$ с учетом формулы (1) определяем так

$$\begin{aligned} t(s) &= \int_{-h/2}^{h/2} T(s, z) dz = T_{\max} hca^{\frac{s-s_1}{s_2-s_1}} \ln \mu, \\ m(s) &= \int_{-h/2}^{h/2} T(s, z) z dz = T_{\max} hca^{\frac{s-s_1}{s_2-s_1}} (b \ln \mu - h). \end{aligned} \quad (3)$$

Используя дифференциальные уравнения равновесия [4]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(rT_1)}{ds} - T_2 \sin \alpha &= -rq_1, \\ \frac{d(rQ)}{ds} - T_2 \cos \alpha &= -rq_2, \\ \frac{d(rM_1)}{ds} - M_2 \sin \alpha &= rQ, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

можно получить формулы для погонных сил

$$T_1(s) = \frac{\Phi(s)}{s \cdot \sin \alpha \cos \alpha} + Q(s) \operatorname{tg} \alpha, \quad T_2(s) = \operatorname{tg} \alpha \left[sq_2 + \frac{d(sQ)}{ds} \right], \quad (5)$$

где

$$\Phi(s) = \int_{s_1}^s (q_2 \sin \alpha - q_1 \cos \alpha) r ds + K_1.$$

Здесь Q – поперечная погонная сила, K_1 – постоянная интегрирования, которая для принятой расчетной схемы определяется из силовых граничных условий. Из третьего уравнения системы (4) и выражений для M_1 и M_2 из (2) после преобразований следует такое уравнение

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d \mathcal{G}}{ds} - \frac{n^2}{s^2} \mathcal{G} - \frac{1}{D_1} \left(\frac{dm_{1T}}{ds} + \frac{m_{1T} - m_{2T}}{s} \right) = \frac{Q}{D_1}. \quad (6)$$

Здесь введены обозначения

$$n^2 = \frac{E_2}{E_1}, \quad m_{1T} = B_{1T} m(s), \quad m_{2T} = B_{2T} m(s).$$

Для круговой конической оболочки справедливо уравнение совместности деформаций следующего вида [4]

$$\frac{du_2}{ds} = \varepsilon_1 \sin \alpha - \mathcal{G} \cos \alpha.$$

Из этого уравнения с учетом формул для T_1 и T_2 из (2) и зависимостей (5) после преобразований следует дифференциальное уравнение

$$s^2 \frac{d^2 Q}{ds^2} + 3s \frac{dQ}{ds} + Q = -E_2 h (\mathcal{G} - \mathcal{G}^*) \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad (7)$$

где через \mathcal{G}^* обозначена величина

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^* &= \frac{-\operatorname{tg}^2 \alpha}{E_2 h} \left[\frac{d(s^2 q_2)}{ds} + \nu_{21} s q_1 \operatorname{ctg} \alpha - n^2 \frac{\Phi(s)}{s \cdot \sin^2 \alpha} \right] + \\ &+ s \cdot \operatorname{tg} \alpha \left[\beta_{22} \frac{d}{ds} \left(\frac{t}{h} \right) - \frac{\beta_{11} - \beta_{22}}{s} \frac{t}{h} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично работе [4] можно показать, что величина \mathcal{G}^* – угол поворота нормали в меридиональном направлении в соответствии с безмоментной теорией конической оболочки при осесимметричном нагружении.

Уравнения (6) и (7) образуют систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно угла поворота нормали $\mathcal{G}(s)$ и перерезывающей силы $Q(s)$. Решив эту систему, по формулам (5) можно найти погонные силы T_1 и T_2 . Из формул (2) следуют зависимости для деформаций $\varepsilon_1 = \frac{du}{ds}$ и $\varepsilon_2 = \frac{u_2}{s \cdot \sin \alpha}$, а также величины M_1 и M_2 . Осевое перемещение u_1 получим из равенства

$$u_1(s) = -\int (\varepsilon_1 \cos \alpha + \mathcal{G} \sin \alpha) ds + K_2,$$

где K_2 – константа интегрирования, которую в рассматриваемой расчетной схеме можно определить из геометрических граничных условий. Радиальное перемещение u_2 получим по формуле $u_2 = \varepsilon_2 s \cdot \sin \alpha$.

При расчете обтекателя при тепловом воздействии полагаем, что внешние поверхностные силы отсутствуют, т.е. $q_1(s) = q_2(s) = 0$. Отсюда следует, что $\Phi(s) = 0$. Вводя переменную Мейсснера $V(s)$ по формуле

$$Q(s) = \frac{V(s)}{s} \operatorname{ctg} \alpha,$$

систему уравнений (6) и (7) преобразуем к следующему виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{G}}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\mathcal{G}}{ds} - \frac{n^2}{s^2} \mathcal{G} &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{D_1} \frac{V - V^*}{s}, \\ \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dV}{ds} - \frac{n^2}{s^2} V &= -E_2 h \operatorname{ctg} \alpha \frac{\mathcal{G} - \mathcal{G}^*}{s}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где через V^* и \mathcal{G}^* обозначены величины

$$\begin{aligned} V^* &= -\operatorname{tg} \alpha \left(s \frac{dm_{1T}}{ds} + m_{1T} - m_{2T} \right), \\ \mathcal{G}^* &= -\operatorname{tg} \alpha \left[\beta_{22} s \frac{d}{ds} \left(\frac{t}{h} \right) + (\beta_{22} - \beta_{11}) \frac{t}{h} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Общее решение системы уравнений (8) записываем в следующем виде

$$\mathcal{G}(s) = \bar{\mathcal{G}}(s) + \mathcal{G}_{cp}(s), \quad V(s) = \bar{V}(s) + V_{cp}(s).$$

где $\bar{\mathcal{G}}(s)$, $\bar{V}(s)$ – общее решение однородной системы уравнений, $\mathcal{G}_{cp}(s)$, $V_{cp}(s)$ – частное решение неоднородной системы уравнений. Однородная система уравнений имеет следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{G}}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\mathcal{G}}{ds} - \frac{n^2}{s^2} \mathcal{G} &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{D_1} \frac{V}{s}, \\ \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dV}{ds} - \frac{n^2}{s^2} V &= -E_2 h \operatorname{ctg} \alpha \frac{\mathcal{G}}{s}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Для решения системы уравнений (10) воспользуемся известным приемом [4], основанном на анализе вспомогательной комплексной функции следующего вида

$$\Phi(s) = \mathcal{G}(s) + i \frac{V(s)}{\kappa}, \quad (11)$$

где

$$\kappa = h^2 \sqrt{\frac{E_1 E_2}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}}.$$

Здесь и далее для простоты изложения знак « \leftarrow » над символом опущен. Введем новую переменную z такую, что $z = 2\sqrt{ix}$, где $x = x(s) = \beta\sqrt{s}$. При этом используем обозначение

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{12n^2(1-\nu_{12}\nu_{21})\text{ctg}^2\alpha}{h^2}}.$$

Тогда систему уравнений (10) можно преобразовать к уравнению Бесселя II рода порядка $2n$ относительно комплексной функции $\Phi(z)$, т.е

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\Phi}{dz} + \left(1 - \frac{4n^2}{z^2}\right)\Phi = 0. \quad (12)$$

Заметим, что для изотропной оболочки, т.е. при $n^2=1$, решение уравнения (12) известно. Оно выражается через функции Томсона 2-го порядка [4]. В случае осесимметричного нагружения это решение можно использовать для обтекателя, изготовленного из квазиизотропного композита. Заметим, что такими материалами можно считать некоторые виды термостойких углерод-карбидных КМ со схемой армирования $2D$ [5].

Рассмотрим случай, когда $n^2 \neq 1$. Эксперименты показывают, что для некоторых видов КМ на основе кварцевой ткани, применяемых для изготовления головных обтекателей, имеет место соотношение $n^2 \approx 9/16$. Тогда получим

$$4n^2 \approx 4 \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{4}.$$

Известно, что в этом случае решение уравнения (12) можно записать с помощью элементарных функций [6]. Оно имеет такой вид

$$\Phi(z) = (A_1 + iA_2)\Phi_1(z) + (B_1 + iB_2)\Phi_2(z), \quad (13)$$

где

$$\Phi_1(z) = \frac{\sin z}{z\sqrt{z}} - \frac{\cos z}{\sqrt{z}}, \quad \Phi_2(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{z}} + \frac{\cos z}{z\sqrt{z}}.$$

Действительные величины A_1, A_2, B_1, B_2 являются константами интегрирования. Учитывая, что $z = 2\sqrt{ix}$, функцию (13) можно представить таким образом

$$\Phi(2\sqrt{ix}) = (A_1 + iA_2)[Y_1(x) + i \cdot Y_2(x)] + (B_1 + iB_2)[Z_1(x) + i \cdot Z_2(x)].$$

Отсюда в соответствии с выражением (11) для искомым решений системы (10) получим

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}(s) &= A_1 Y_1(x) - A_2 Y_2(x) + B_1 Z_1(x) - B_2 Z_2(x), \\ \frac{V(s)}{\kappa} &= A_2 Y_1(x) + A_1 Y_2(x) + B_2 Z_1(x) + B_1 Z_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В формулах (14) приняты такие обозначения

$$\left. \begin{aligned}
 Y_1(x) &= \frac{e^{\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}x} \left[\sin(\sqrt{2}x - \varphi) + \frac{\sin(\sqrt{2}x + \varphi)}{2x} \right] + \\
 &+ \frac{e^{-\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}x} \left[-\sin(\sqrt{2}x + \varphi) + \frac{\sin(\sqrt{2}x - \varphi)}{2x} \right], \\
 Y_2(x) &= \frac{e^{\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}x} \left[\cos(\sqrt{2}x - \varphi) + \frac{\cos(\sqrt{2}x + \varphi)}{2x} \right] + \\
 &+ \frac{e^{-\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}x} \left[\cos(\sqrt{2}x + \varphi) - \frac{\cos(\sqrt{2}x - \varphi)}{2x} \right], \\
 Z_1(x) &= \frac{e^{\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}x} \left[\cos(\sqrt{2}x - \varphi) + \frac{\cos(\sqrt{2}x + \varphi)}{2x} \right] + \\
 &+ \frac{e^{-\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}x} \left[-\cos(\sqrt{2}x + \varphi) + \frac{\cos(\sqrt{2}x - \varphi)}{2x} \right], \\
 Z_2(x) &= \frac{e^{\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}x} \left[-\sin(\sqrt{2}x - \varphi) + \frac{\sin(\sqrt{2}x + \varphi)}{2x} \right] + \\
 &+ \frac{e^{-\sqrt{2}x}}{2\sqrt{2}x} \left[-\sin(\sqrt{2}x + \varphi) - \frac{\sin(\sqrt{2}x - \varphi)}{2x} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Здесь $\varphi = 3\pi/8$. Общее решение неоднородной системы уравнений (8) примет такой вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(s) &= A_1 Y_1(x) - A_2 Y_2(x) + B_1 Z_1(x) - B_2 Z_2(x) + \mathcal{G}_{up}(s), \\
 V(s) &= \kappa [A_2 Y_1(x) + A_1 Y_2(x) + B_2 Z_1(x) + B_1 Z_2(x)] + V_{up}(s).
 \end{aligned} \quad (16)$$

Можно показать, что при $x_{\min} = \beta\sqrt{s_1} \geq 1,5$ (для «длинной» оболочки) вместо формул (16) можно использовать приближенные равенства

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(s) &= \frac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{x}} [C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)] + \frac{e^{\sqrt{2}x}}{\sqrt{x}} [C_3 \cos(\sqrt{2}x) + C_4 \sin(\sqrt{2}x)] + \\
 &+ \mathcal{G}_{up}(s), \\
 V(s) &= \kappa \cdot \left\{ \frac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{x}} [C_1 \sin(\sqrt{2}x) - C_2 \cos(\sqrt{2}x)] + \frac{e^{\sqrt{2}x}}{\sqrt{x}} [-C_3 \sin(\sqrt{2}x) + C_4 \cos(\sqrt{2}x)] \right\} + \\
 &+ V_{up}(s).
 \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования.

Рассмотрим задачу определения частного решения системы (8). В работах [4,7,8] при силовом нагружении, которому в системе (8) соответствует равенство $V^*(s)=0$, рекомендуется в качестве частного решения выбирать решение по безмоментной теории оболочек вращения. Следует отметить, что указанный способ нахождения частного решения по сути является приближенным, дающим приемлемые результаты для

«длинных» оболочек при плавно изменяющихся нагрузках и геометрических параметрах оболочки [8].

В случае рассматриваемого теплового воздействия, обобщая указанный подход, принимаем такие равенства

$$\mathcal{G}_{\text{чи}}(s) = \mathcal{G}^*(s), V_{\text{чи}}(s) = V^*(s).$$

С учетом зависимостей (3) и (9) имеем

$$\mathcal{G}^*(s) = cT_{\text{max}} \ln \mu \cdot \text{tg} \alpha \cdot a^{\frac{s-s_1}{s_2-s_1}} \left[(\beta_{11} - \beta_{22}) - \beta_{22} \frac{s}{s_2-s_1} \ln a \right],$$

$$V^*(s) = cT_{\text{max}} h \cdot \text{tg} \alpha \cdot (b \ln \mu - h) a^{\frac{s-s_1}{s_2-s_1}} \left[(B_{2T} - B_{1T}) - B_{1T} \frac{s}{s_2-s_1} \ln a \right].$$

При отсутствии силовой нагрузки погонные силы вычисляем по формулам

$$T_1(s) = \frac{V(s)}{s}, T_2(s) = \frac{dV(s)}{ds}, Q(s) = \frac{V(s)}{s} \text{ctg} \alpha.$$

Окружная деформация следует из соотношения

$$\varepsilon_2(s) = \frac{1}{E_2 h} \left[\frac{dV(s)}{ds} - \nu_{21} \frac{V(s)}{s} \right] + \frac{B_{2T} - \nu_{21} B_{21T}}{E_2 h} t(s). \quad (18)$$

Для расчетной схемы, показанной на рис.1б, граничные условия имеют следующий вид

$$\begin{aligned} s = s_1: & T_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \mathcal{G} = 0; \\ s = s_2: & u_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \mathcal{G} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Поэтому в соответствии с формулой (18) следует, что при $s = s_1$ и $s = s_2$ должны выполняться равенства

$$\mathcal{G} = 0, \quad \frac{dV(s)}{ds} - \nu_{21} \frac{V(s)}{s} = \frac{g(s)}{\kappa}.$$

Здесь введено обозначение $g(s) = (\nu_{21} B_{1T} - B_{2T}) t(s)$.

Из граничных условий (19) и равенств (15), (16) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно констант интегрирования A_1, A_2, B_1, B_2 . В случае длинных оболочек целесообразно использовать зависимости (17). Тогда константы C_1 и C_2 можно определять независимо от констант C_3 и C_4 и наоборот.

Как видно, полученные расчетные зависимости достаточно громоздки. Однако, используя систему MathCad, с их помощью несложно получить численные результаты.

Численный пример

Зададим следующие геометрические параметры обтекателя: $\alpha = 12^\circ$, $s_2/s_1 = 7,14$, $h/s_1 = 0,067$. Для параметров упругости и КЛТР принимаем $E_2/E_1 = 9/16$, $\nu_{12} = 0,07$, $\beta_{11}/\beta_{22} = 1,02$. Характеристики температурного поля приведены выше.

Рассмотрим некоторые результаты расчета. На рис.3 и 4 введены обозначения $\sigma_{11max}=|\sigma_{11}(s_1)|$ и $\sigma_{22max}=|\sigma_{22}(s_1)|$. Как видно из них, на внешней поверхности обтекателя имеют место сжимающие напряжения, причем абсолютная величина принимает наибольшее значение в зоне соединения с металлическим наконечником. Разрушение конструкции может произойти именно от сжимающих напряжений, вызванных неравномерным распределением температуры по толщине стенки. На рис.5 показаны эпюры осевых и радиальных перемещений. Они незначительны и не превышают величину $0,1h$.

Следует заметить, что рассматриваемая задача может быть решена иначе, например, численным способом с применением метода ортогонализации С.К.Годунова [4]. При этом система разрешающих уравнений имеет следующий вид

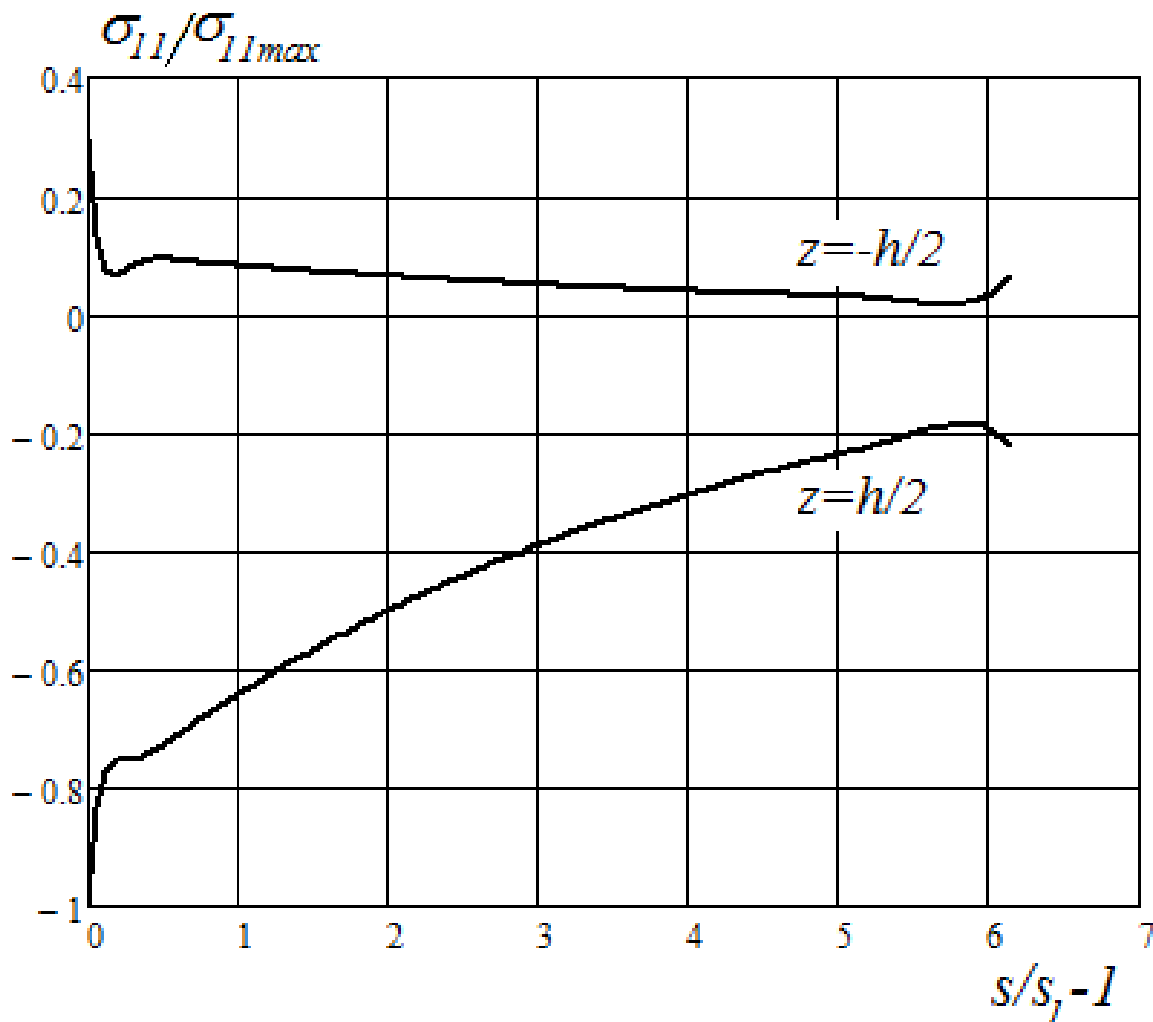


Рис.3. Изменение меридиональных температурных напряжений в композитном обтекателе конической формы

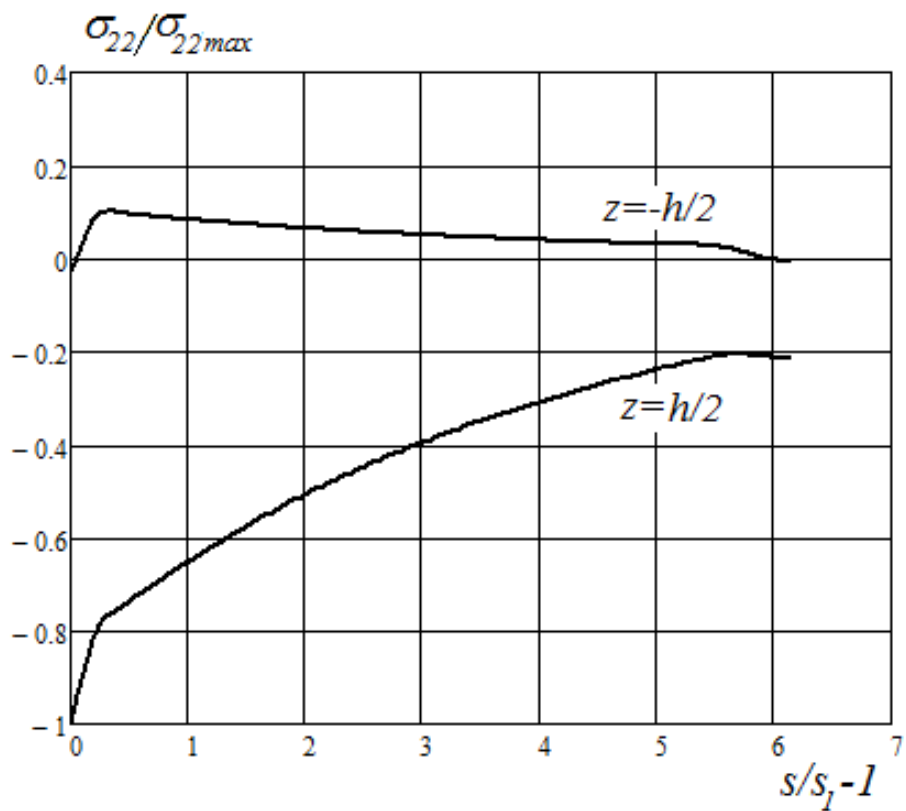


Рис.4. Изменение окружных температурных напряжений в композитном обтекателе конической формы

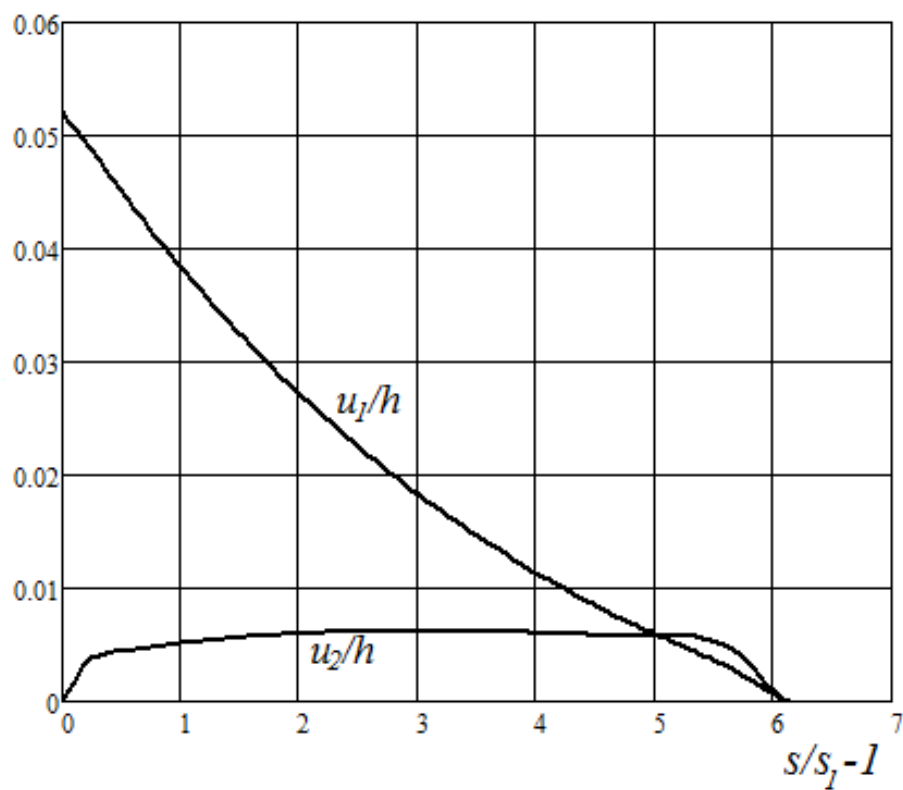


Рис.5. Эпюры осевых (u_1) и радиальных (u_2) перемещений в композитном обтекателе конической формы

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{ds} &= \frac{M_1}{D_1} - \frac{\nu_{21}}{s} \vartheta + \frac{B_{1T}}{D_1} m(s), \\ \frac{du_2}{ds} &= \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21}) \sin^2 \alpha}{E_1 h} N - \frac{\nu_{21}}{s} u_2 - \cos \alpha \cdot \vartheta + \frac{B_{1T}(1-\nu_{12}\nu_{21}) \sin \alpha}{E_1 h} t(s), \\ \frac{dN}{ds} &= \frac{E_2 h}{s^2 \sin^2 \alpha} u_2 - \frac{1-\nu_{21}}{s} N + \frac{\nu_{21} B_{1T} - B_{2T}}{s \cdot \sin \alpha} t(s), \\ \frac{dM_1}{ds} &= \frac{E_2 h^3}{12s^2} \vartheta + \cos \alpha \cdot N - \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{s} M_1 + \frac{\nu_{21} B_{1T} - B_{2T}}{s} m(s). \end{aligned} \right\}$$

Здесь $N = T_1 \sin \alpha + Q \cos \alpha$ - радиальная сила. Граничные условия по-прежнему имеют вид (19). Численное решение, полученное также с помощью системы MathCad, полностью совпало с представленным выше аналитическим решением.

Заключение

1. При расчете температурных деформаций и напряжений в композитных обтекателях конической формы при неравномерном нагреве, изготовленных из материалов с параметрами $\nu = 1; 0,75$, удобно использовать аналитические решения. Для получения численных результатов целесообразно применять систему MathCad.
2. В случае неравномерного нагрева и отсутствия силовой нагрузки при построении частного решения можно использовать выражения для величин V^* и ϑ^* , входящие в правую часть разрешающей системы уравнений (8). При этом численное решение, полученное методом С.К.Годунова, полностью совпадает с представленным аналитическим решением.
3. При неравномерном изменении температуры, задаваемом равенством (1), в обтекателе на внешней поверхности возникают сжимающие напряжения, которые могут стать причиной разрушения композитной конструкции.

Список литературы

1. Бахвалов Ю.О., Бахтин А.Г., Молочев В.П., Петроковский С.А. Корпусные конструкции из композиционных материалов модернизированной ракеты-носителя «Протон-М» и разгонного блока «Бриз-М» //Авиационная промышленность. 2005. № 4. С. 25-31.
2. Ромашин А.Г., Гайдачук В.Е., Я.С.Карпов, Русин М.Ю. Радиопрозрачные обтекатели летательных аппаратов / под общ. ред. М.Ю. Русина. Харьков: Национальный аэрокосмический ун-т «ХАИ», 2003. 239 с.
3. Лавров Л.Н., Болотов А.А., Гапаненко В.Н., Думин О.С., Зиновьев П.А., Панасевич Б.Л., Поломских Н.Л., Соколовский М.И., Щербаков Ю.Н. Конструкции ракетных двигателей на твердом топливе / под общ. ред. Л.Н. Лаврова. М.: Машиностроение, 1993. 215 с.

4. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
5. Бобров А.В., Сарбаев Б.С., Ширшов Ю.Ю. Нелинейное деформирование углерод-карбидного композиционного материала // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 4. С. 42-49.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 5 т. Т. 2. М.: Наука, 1974. 655 с.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. 2-е изд. М.: Наука, 1987. 360 с.
8. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

Calculation of Thermal Strains and Stresses in Composite Conical Fairing

B.S. Sarbaev^{1,*}

[*bssarbayev@mail.ru](mailto:bssarbayev@mail.ru)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: composite, fairing, conical shell, uneven heating, analytical solution

Fairings in the form of thin-walled circular conical shells made from composite materials are a commonly used structural element of the cutting-edge rocketry. In the course of operation they are subjected to intense thermal and force loading. To calculate them the unnecessarily time consuming (laborious) methods using complicated finite element software systems are often applied. The article proposes an analytical method to calculate thermal strains and stresses in composite conically shaped fairing under uneven heating. The proposed method of calculation can be useful at the preliminary stage of design process. The article describes a design model. For its construction the theory of thin orthotropic conical shells under axisymmetric loading, based on the Kirchhoff-Love hypotheses, is used. The article considers uneven heating of the fairing, when the temperature varies nonlinearly along the slant height and across the thickness. The fairing is made from composite material with woven filler. Duhamel-Neumann relations describe thermo-elastic properties of the material. Boundary conditions are formulated. The system of resolving ordinary nonhomogeneous differential equations of the second order with respect to the rotation angle of the normal in the meridian direction and shearing forces is obtained. The system of equations is transformed to the Bessel equation via auxiliary complex function. Its order is determined by the ratio of the elasticity modulus along the weft to the modulus of elasticity along the warp. For the practically important case when this ratio is equal approximately to 0.5, the analytical solution of the homogeneous system of equations is obtained. This solution is expressed by elementary functions. The variant of a particular solution for the nonhomogeneous system of differential equations is proposed. For the "long" conical shell a simplified solution is given. Using the obtained relations for the displacements and internal forces, stress-strain state of composite fairing under uneven heating can be analyzed. It is noted that the numerical solution obtained by S.G. Godunov's method of orthogonalization coincides with the analytical solution. The article considers an example of calculating displacement and stress in the composite fairing. It shows that for a given temperature field, compressive stresses on the outer surface of the composite fairing are of essential value. For the fairing made from composite material with woven

filler they can cause failure. Axial and radial displacements are small as compared to the wall thickness of the fairing.

References

1. Bakhvalov Yu.O., Bakhtin A.G., Molochev V.P., Petrokovskii S.A. Hull construction with composite materials of upgraded carrier rocket "Proton-M" and upper stage "Breeze-M". *Aviatsionnaya promyshlennost' = Aviation industry*, 2005, no. 4, pp. 25-31. (in Russian).
2. Romashin A.G., Gaidachuk V.E., Ya.S.Karpov, Rusin M.Yu. *Radioprozrachnye obtekateli letatel'nykh apparatov* [Radioparent radome for aircrafts]. Kharkiv, NAU "KhAI", 2003. 239 p. (in Russian).
3. Lavrov L.N., Bolotov A.A., Gapanenko V.N., Dumin O.S., Zinov'ev P.A., Panasevich B.L., Polomskikh N.L., Sokolovskii M.I., Shcherbakov Yu.N. *Konstruktsii raketnykh dvigatelei na tverdom toplive* [Design of rocket engines for solid fuels]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1993. 215 p. (in Russian).
4. Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsii. Statika* [Mechanics of thin-walled structures. Statics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 488 p. (in Russian).
5. Bobrov A.V., Sarbaev B.S., Shirshov Yu.Yu. Nonlinear deformation of carbide-derived carbon composite material. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2014, no. 4, pp. 42-49. (English version of journal: *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, iss. 4, pp. 287-293. DOI: [10.3103/S1052618814040025](https://doi.org/10.3103/S1052618814040025)).
6. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki. V 5 t. T. 2* [Course of Higher Mathematics. In 5 vols. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 655 p. (in Russian).
7. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh obolochek* [Theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 360 p. (in Russian).
8. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovskii E.I. *Lineinaya teoriya tonkikh obolochek* [Linear theory of thin shells]. Leningrad, Politekhnik Publ., 1991. 656 p. (in Russian).