

УДК 539.3

Оценка методом самосогласования температурного коэффициента линейного расширения композита с дисперсными включениями

Зарубин В. С.^{1,*}, Кувыркин Г.Н.¹, Савельева И.Ю.¹

* fn2@bmstu.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

С применением метода самосогласования получены расчетные зависимости, устанавливающие связь температурного коэффициента линейного расширения композита, армированного изотропными включениями шаровой формы, с термоупругими характеристиками матрицы и включений и их объемной концентрацией. Проведено сравнение этих зависимостей с известными формулами, полученными с использованием других подходов, и с двусторонними оценками возможных значений этого коэффициента, которые следуют из вариационной формулировки задачи термоупругости. Представленные расчетные зависимости позволяют прогнозировать значение температурного коэффициента линейного расширения композита с дисперсными изотропными включениями, в том числе с наноструктурными элементами.

Ключевые слова: композит; метод самосогласования; двусторонние оценки; изотропные шаровые включения; температурный коэффициент линейного расширения

Введение

Композиты в качестве конструкционных и функциональных материалов находят широкое применение во многих отраслях техники. Среди механических свойств, определяющих конкретные области применения композитов при наличии тепловых воздействий, важное место занимают термоупругие характеристики, в том числе температурный коэффициент линейного расширения. Оценка этого коэффициента по известным свойствам матрицы композита и армирующих включений можно получить, используя различные подходы [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Один из таких подходов, называемый методом самосогласования [8, 9, 10, 11, 12], состоит в учете взаимодействия отдельно взятого элемента неоднородности материала (включения или частицы матрицы композита) с однородной изотропной средой, характеристики которой подлежат определению [13]. Последующее осреднение по представительному объему материала возмущений распределения параметров в этих элементах позволяет получить расчетные зависимости для оценки искомых характеристик рассматриваемого композита.

В технике наряду с использованием композитов, армированных волокнистыми включениями, широко применяют дисперсно упрочненные композиты, в которых включениями являются частицы из высокопрочных и высокомодульных материалов, в том числе наноструктурные элементы [14, 15, 16, 17]. Обычно дисперсные частицы имеют близкие размеры во всех направлениях, что позволяет форму таких частиц в первом приближении считать шаровой [18, 19, 20]. Достаточно широкое распространение получили композиты, называемые сферопластиками [21], которые содержат дисперсные частицы строго шаровой формы, например полые стеклосферы [22, 23, 24].

Близкими по тематике являются работы [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32], посвященные термоупругим свойствам пористых металлов, металлокерамики, полимеров и строительных материалов, так как отдельно взятую пору допустимо рассматривать как абсолютно податливое включение с нулевым температурным коэффициентом линейного расширения. Достоверные оценки теплового расширения композита особенно важны при его использовании в технических устройствах, к которым предъявляются высокие требования по размерной стабильности [33] и в которых используемый материал включает разнородные компоненты [34].

Значительное число публикуемых работ по оценке термоупругих характеристик композитов с дисперсными включениями подтверждает актуальность исследований в этом направлении. Такие исследования требуют комплексного подхода и использования методов компьютерного моделирования, поскольку построение математической модели, описывающей тепловое расширение композита, неразрывно связано с анализом его напряженно-деформированного состояния [35, 36, 37]. В данной работе применение метода самосогласования позволило реализовать такой подход и получить расчетные зависимости, связывающие температурный коэффициент линейного расширения дисперсно упрочненного композита с термоупругими характеристиками матрицы и включений и их объемной концентрацией. Для проверки достоверности этих зависимостей построены двусторонние границы области возможных значений этого коэффициента, основанные на ранее разработанной двойственной вариационной формулировке задачи термоупругости неоднородного твердого тела.

1. Основные соотношения

В случае шаровых включений одинакового размера при их наиболее плотной упаковке, когда в каждом слое центры контактирующих между собой шаров находятся в вершинах правильных треугольников, объемная концентрация C_V таких включений принимает наибольшее значение $C_V^{\circ} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,7405$ [38]. Если не учитывать конкретный размер включений и считать, что их диаметр может принимать значения от некоторого конечного до бесконечно малого, т. е. возможно заполнение всех пустот между крупными включениями, то допустимо рассматривать значения $C_V \in [0, 1]$.

В более общем случае материал включений может быть различным. Примем, что композит армирован включениями из N материалов, причем

$$\sum_{\varsigma=1}^N C_{\varsigma} = C_V \in [0, 1], \quad (1)$$

где C_{ς} — объемная концентрация включений из материала с номером ς . Для каждого материала считаем известными объемный модуль упругости K_{ς} , модуль сдвига G_{ς} и температурный коэффициент линейного расширения α_{ς} , а также соответствующие параметры K_m, G_m и α_m для материала матрицы композита. Расположение включений примем случайным, что позволяет считать композит макроскопически изотропным с объемным модулем упругости K и модулем сдвига G . Через эти модули можно выразить продольный модуль упругости (модуль Юнга) $E = \frac{9KG}{3K+G}$ и коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{2} - \frac{3G}{6K+2G}$ композита [39]. Искомый температурный коэффициент линейного расширения композита обозначим α .

Упругие характеристики включений, матрицы и композита в целом можно представить в одинаковой тензорной форме [1, 40] (на примере характеристик композита)

$$\hat{C} = 3K\hat{V} + 2G\hat{D}, \quad (2)$$

где \hat{C} — тензор четвертого ранга коэффициентов упругости, а \hat{V} и \hat{D} — тензоры четвертого ранга, являющиеся соответственно объемной и девиаторной составляющими единичного тензора четвертого ранга $\hat{I} = \hat{V} + \hat{D}$. Если использовать единичный тензор второго ранга с компонентами δ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то компоненты этих составляющих, определенные в выбранной прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, примут вид

$$V_{ijmn} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}, \quad D_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) - V_{ijmn}, \quad m, n = 1, 2, 3.$$

С учетом этих формул, правила суммирования слагаемых по повторяющимся в сомножителях латинским индексам [41] и равенства $\delta_{ii} = 3$ можно установить, что $V_{ijkl}\delta_{kl} = \delta_{ij}$, $D_{ijkl}\delta_{kl} = 0$, $k, l = 1, 2, 3$, а также [1]

$$V_{ijmn}V_{mnlk} = V_{ijkl}, \quad D_{ijmn}D_{mnlk} = D_{ijkl}, \quad V_{ijmn}D_{mnlk} = 0, \quad (3)$$

Тензоры \hat{V} и \hat{D} и представленный через них в формуле (2) тензор \hat{C} являются изотропными, т. е. их компоненты не зависят от ориентации осей выбранной системы прямоугольных декартовых координат.

2. Метод самосогласования

В процедуре применения метода самосогласования для оценки температурного коэффициента линейного расширения композита можно выделить ряд последовательных этапов. В качестве представительного объема рассматриваемого композита, осредненные параметры

которого отражают свойства этого композита в целом, примем неограниченную область, заполненную линейно упругой средой. В этой среде при исходной однородной по этому объему температуре T_0 первоначально отсутствуют напряжения и связанные с ними деформации.

На первом этапе рассмотрим упругое взаимодействие шарового включения с занимающей неограниченную область окружающей средой из того же линейно упругого изотропного материала с тензором \hat{C} коэффициентов упругости. Если мысленно извлечь включение из окружающей среды и создать в нем однородную деформацию, определяемую тензором \hat{e}'' , то после возвращения включения на прежнее место деформированное состояние этого включения также будет однородным [13], определяемым тензором \hat{e}^* . Этот тензор связан с тензором \hat{e}'' соотношением [1, 13] $\hat{e}'' = \hat{W} \cdot \hat{e}^*$, где

$$\hat{W} = 3 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \hat{V} + \frac{15}{2} \frac{1 - \nu}{4 - 5\nu} \hat{D}. \quad (4)$$

При этом напряженное состояние включения будет характеризовать тензор

$$\hat{s}^* = \hat{C} \cdot (\hat{e}^* - \hat{e}'') = \hat{C} \cdot \hat{e}^* - \hat{C} \cdot \hat{W} \cdot \hat{e}^*. \quad (5)$$

Здесь каждая из точек между сомножителями в произведении тензоров означает свертывание по индексу, одинаковому в обоих сомножителях [41]. В соотношение (5) входит внутреннее произведение изотропных тензоров \hat{C} и \hat{W} . С учетом формул (2)–(4) и представления коэффициента Пуассона через модули K и G получим

$$\hat{C} \cdot \hat{W} = (3K + 4G) \hat{V} + \frac{5}{3} \frac{3K + 4G}{K + 2G} \hat{D}. \quad (6)$$

На втором этапе повысим температуру представительного объема на величину ΔT , что приведет к возникновению однородной по этому объему температурной деформации, определяемой тензором $\hat{e}^{(T)}$ с компонентами $\alpha \Delta T \delta_{ij}$. Поскольку в представительном объеме на данном этапе находится однородный изотропный линейно упругий материал, изменение температуры этого материала не повлияет на напряженное состояние включения, но его полную деформацию теперь будет определять сумма тензоров $\hat{e}_* = \hat{e}^* + \hat{e}^{(T)}$.

На третьем этапе при однородном распределении температуры $T_0 + \Delta T$ в представительном объеме и условии сохранения полной деформации \hat{e}_* проведем замену исходного включения анизотропным шаровым включением из материала с номером $\varsigma = \overline{1, N}$. При этом в силу изменения термоупругих свойств нового включения произойдет изменение и его напряженно-деформированного состояния по сравнению с исходным включением. Теперь деформированное состояние нового включения будет определять тензор $\hat{e}_\varsigma = \hat{e}_* - \hat{e}_\varsigma^{(T)} = \hat{e}^* + \hat{e}^{(T)} - \hat{e}_\varsigma^{(T)}$, где $\hat{e}_\varsigma^{(T)}$ — тензор температурной деформации этого включения с компонентами $\alpha_\varsigma \Delta T \delta_{ij}$, а его однородное напряженное состояние будет характеризовать тензор

$$\hat{s}_\varsigma = \hat{C}_\varsigma \cdot \hat{e}_\varsigma = \hat{C}_\varsigma (\hat{e}^* + \hat{e}^{(T)} - \hat{e}_\varsigma^{(T)}). \quad (7)$$

Эквивалентность замены включений требует не только совпадения их полной деформации, но и совпадения напряженных состояний, т. е. равенства $\hat{s}^* = \hat{s}_\zeta$. Исключая с учетом этого равенства из соотношений (5) и (7) тензор \hat{e}^* , получаем

$$\hat{s}_\zeta = (\hat{C}_\zeta - \hat{C} + \hat{C} \cdot \hat{W})^{-1} \cdot (\hat{C} - \hat{C} \cdot \hat{W}) \cdot \hat{C}_\zeta \cdot (\hat{e}_\zeta^{(T)} - \hat{e}^{(T)}). \quad (8)$$

Форма частиц матрицы, связывающей в композите шаровые включения, при хаотическом расположении включений является неопределенной. Примем в качестве средней статистической форму этих частиц шаровой. Взаимодействие шаровой частицы матрицы с изотропной окружающей средой будут определять соотношения, аналогичные полученным выше для шарового включения, а именно напряженное состояние в частице матрицы будет описывать тензор

$$\hat{s}_m = (\hat{C}_m - \hat{C} + \hat{C} \cdot \hat{W})^{-1} \cdot (\hat{C} - \hat{C} \cdot \hat{W}) \cdot \hat{C}_m \cdot (\hat{e}_m^{(T)} - \hat{e}^{(T)}), \quad (9)$$

где \hat{C}_m — тензор коэффициентов упругости материала матрицы, а $\hat{e}_m^{(T)}$ — тензор ее температурной деформации с компонентами $\alpha_m \Delta T \delta_{ij}$.

Заключительным этапом применения метода самосогласования для получения расчетных зависимостей, определяющих искомый температурный коэффициент линейного расширения α рассматриваемого композита, является осреднение по представительному объему возмущений напряженного состояния во всех включениях и частицах матрицы. Для тензора напряжений как тензора второго ранга такое осреднение эквивалентно вычислению его первого инварианта, т. е. умножению этого тензора на единичный тензор второго ранга \hat{I}_2 [41, 42]. Тогда для включений из материала с номером ζ , учитывая формулы (2), (3), (6) и (8), получаем

$$\hat{s}_\zeta \cdot \hat{I}_2 = \frac{12GK_\zeta(\alpha_\zeta - \alpha)}{3K_\zeta + 4G}.$$

Аналогично, используя формулы (2), (3), (6) и (9), находим

$$\hat{s}_m \cdot \hat{I}_2 = \frac{12GK_m(\alpha_m - \alpha)}{3K_m + 4G}.$$

Итоговый результат осреднения по всем включениям и частицам матрицы в соответствии с методом самосогласования [10] должен быть равен нулю, т. е. с учетом двух последних равенств и формулы (1)

$$12GK_m \frac{\alpha_m - \alpha}{3K_m + 4G} (1 - C_V) + 12G \sum_{\zeta=1}^N K_\zeta \frac{\alpha_\zeta - \alpha}{3K_\zeta + 4G} C_\zeta = 0.$$

Разрешив это равенство относительно искомого температурного коэффициента линейного расширения рассматриваемого композита, запишем

$$\alpha = \left(K_m \frac{1 - C_V}{3K_m + 4G} + \sum_{\zeta=1}^N \frac{K_\zeta C_\zeta}{3K_\zeta + 4G} \right)^{-1} \left(\alpha_m K_m \frac{1 - C_V}{3K_m + 4G} + \sum_{\zeta=1}^N \frac{\alpha_\zeta K_\zeta C_\zeta}{3K_\zeta + 4G} \right). \quad (10)$$

Следует отметить, что к такому же результату приводит осреднение по представительному объему тензоров деформации во всех включениях и частицах матрицы композита.

3. Двусторонние оценки

Для построения двусторонних оценок температурного коэффициента линейного расширения рассматриваемого композита используем двойственную вариационную форму модели линейной термоупругости применительно к неоднородному линейно упругому твердому телу [36, 38]. Эта форма содержит два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), которые на истинных распределениях перемещений и напряжений достигают равных по значению экстремумов.

Рассмотрим представительный объем V композита, заключенный в абсолютно жесткую оболочку, обеспечивающую при однородном приращении температуры композита на величину ΔT отсутствие перемещений на поверхности, ограничивающей этот объем. В этом случае на допустимом для минимизируемого функционала однородном распределении $u(M) = 0$ ($M \in V$) перемещений он примет вид [43]

$$J_1 = \frac{9}{2} \int_V K'(M) (\alpha'(M) \Delta T)^2 dV(M) = \frac{9V}{2} (\Delta T)^2 \left(K_m \alpha_m^2 (1 - C_V) + \sum_{\varsigma=1}^N K_{\varsigma} \alpha_{\varsigma}^2 C_{\varsigma} \right), \quad (11)$$

где $K'(M)$ и $\alpha'(M)$ — зависящие от положения точки $M \in V$ значения объемного модуля упругости и температурного коэффициента линейного расширения в представительном объеме композита.

Для максимизируемого функционала одним из допустимых распределений напряжений является однородное по объему V , определяемое шаровым тензором $\hat{s}' = \sigma \delta_{ij}$, $\sigma = \text{const}$. На таком распределении этот функционал имеет вид [43]

$$J_2 = - \int_V \left(\frac{\sigma^2}{18K'(M)} + \sigma \alpha'(M) \Delta T \right) dV(M).$$

Значение σ найдем из необходимого условия существования экстремума этого функционала

$$\frac{dJ_2}{d\sigma} = - \int_V \left(\frac{\sigma}{9K'(M)} + \alpha'(M) \Delta T \right) dV(M) = 0.$$

Отсюда следует

$$\sigma = -9\Delta T \left(\frac{1 - C_V}{K_m} + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_{\varsigma}}{K_{\varsigma}} \right)^{-1} \left(\alpha_m (1 - C_V) + \sum_{\varsigma=1}^N \alpha_{\varsigma} C_{\varsigma} \right).$$

После подстановки σ в функционал J_2 получим

$$J_2 = \frac{9V}{2} (\Delta T)^2 \left(\frac{1 - C_V}{K_m} + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_{\varsigma}}{K_{\varsigma}} \right)^{-1} \left(\alpha_m (1 - C_V) + \sum_{\varsigma=1}^N \alpha_{\varsigma} C_{\varsigma} \right)^2. \quad (12)$$

Для среды, имеющей искомым температурный коэффициент α линейного расширения рассматриваемого композита, но неоднородной по упругим характеристикам, минимизируемый функционал будет равен

$$J_1^* = \frac{9V}{2} (\alpha \Delta T)^2 \left(K_m (1 - C_V) + \sum_{\varsigma=1}^N K_{\varsigma} C_{\varsigma} \right) = \frac{9V}{2} (\alpha \Delta T)^2 K_V, \quad (13)$$

а максимизируемый функционал на допустимом однородном распределении напряжений

$$\sigma^* = -9\alpha\Delta T \left(\frac{1 - C_V}{K_m} + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_\varsigma}{K_\varsigma} \right)^{-1}$$

примет значение

$$J_2^* = \frac{9V}{2} (\alpha\Delta T)^2 \left(\frac{1 - C_V}{K_m} + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_\varsigma}{K_\varsigma} \right)^{-1} = \frac{9V}{2} (\alpha\Delta T)^2 K_R. \quad (14)$$

Отметим, что из сравнения σ^* с σ и сопоставления формул (14) и (12) можно получить оценку

$$\alpha_* = \alpha_m(1 - C_V) + \sum_{\varsigma=1}^N \alpha_\varsigma C_\varsigma, \quad (15)$$

которая также следует из теории смесей [44].

Из свойств двойственной вариационной формы модели линейной термоупругости для значений альтернативных функционалов на допустимых распределениях перемещений и напряжений следуют не только неравенства $J_1 \geq J_2$, $J_1^* \geq J_2^*$, но и $J_1 \geq J_2^*$, $J_1^* \geq J_2$. Из двух последних неравенств с учетом формул (11)–(15) следуют гарантированные двусторонние оценки

$$\alpha_+ = \frac{1}{\sqrt{K_R}} \left(K_m \alpha_m^2 (1 - C_V) + \sum_{\varsigma=1}^N K_\varsigma \alpha_\varsigma^2 C_\varsigma \right)^{1/2} \geq \alpha \geq \alpha_* \sqrt{\frac{K_R}{K_V}} = \alpha_-. \quad (16)$$

Можно ожидать, что эти оценки будут достаточно грубыми, поскольку при вычислении функционалов были использованы простые и поэтому весьма приближенные допустимые распределения перемещений и напряжений.

4. Результаты расчетов

Количественный анализ полученных расчетных зависимостей проведем для композита, модифицированного включениями лишь из одного материала, т. е. при $\varsigma = N = 1$. Введем безразмерные параметры $\bar{\alpha} = \alpha_1/\alpha_m$, $\tilde{\alpha} = \alpha/\alpha_m$, $\bar{K} = K_1/K_m$ и $\bar{G} = G/K_m$. Тогда из формулы (15) получим

$$\tilde{\alpha}_* = \frac{\alpha_*}{\alpha_m} = 1 - C_V + \bar{\alpha}, \quad (17)$$

из формулы (10) —

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_* + \frac{(\bar{\alpha} - 1)(\bar{K} - 1)C_V(1 - C_V)}{\bar{K}_V + \frac{3\bar{K}}{4\bar{G}}}, \quad (18)$$

где $\bar{K}_V = 1 - C_V + \bar{K}C_V$, а соотношение (16) примет вид

$$\tilde{\alpha}_+ = \sqrt{\frac{1 - C_V + \bar{K}\bar{\alpha}^2 C_V}{\bar{K}_R}} \geq \tilde{\alpha} \geq \tilde{\alpha}_* \sqrt{\frac{\bar{K}_R}{\bar{K}_V}} = \tilde{\alpha}_-, \quad (19)$$

где

$$\bar{K}_R = \frac{1}{1 - C_V + C_V/\bar{K}}.$$

Поскольку $\bar{K}_R/\bar{K}_V \geq 1$ как отношение нижней и верхней оценок объемного модуля упругости композита [39], из соотношения (19) следует, что $\tilde{\alpha}_- \leq \tilde{\alpha}_*$. При одинаковых значениях объемных модулей упругости включений и матрицы ($\bar{K} = 1$) имеем $\bar{K}_R/\bar{K}_V = 1$ и $\tilde{\alpha}_- = \tilde{\alpha}_*$, а верхняя оценка $\tilde{\alpha}_+ = \sqrt{1 - C_V + \bar{\alpha}^2 C_V} > \tilde{\alpha}_*$ при $\bar{\alpha} \neq 1$ и $C_V \in (0, 1)$. В этом случае, согласно формуле (18), $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_*$.

Если совпадают модули сдвига включений и матрицы ($G_1 = G_m = G$), то для объемного модуля упругости K^* такого композита известна точная формула [2]

$$\bar{K}^* = \frac{K^*}{K_m} = \frac{3\bar{K} + 4\bar{G}\bar{K}_V}{3\bar{K} + 4\bar{G}\bar{K}_R}.$$

В этом случае получена и точная формула для температурного коэффициента α^* линейного расширения композита [1, 2]. Эту формулу можно привести к виду

$$\tilde{\alpha}^* = \frac{\alpha^*}{\alpha_m} = \tilde{\alpha}_* + \frac{\bar{\alpha} - 1}{1 - 1/\bar{K}} \left(\frac{1}{\bar{K}_R} - \frac{1}{\bar{K}^*} \right).$$

Поскольку точное значение K^* в общем случае не известно, последнюю формулу можно применить для построения двусторонних оценок. Например, при использовании вместо значения \bar{K}^* его двусторонних оценок \bar{K}_R или \bar{K}_V в первом случае оценка совпадает со значением $\tilde{\alpha}_*$, а во втором случае имеет вид

$$\tilde{\alpha}_0^* = \tilde{\alpha}_* + \frac{\bar{\alpha} - 1}{1 - 1/\bar{K}} \left(\frac{1}{\bar{K}_R} - \frac{1}{\bar{K}_V} \right). \quad (20)$$

Оценка $\tilde{\alpha}_0^*$ будет нижней при $\bar{\alpha} > 1$ и $\bar{K} < 1$ или $\bar{\alpha} < 1$ и $\bar{K} > 1$ и верхней при $\bar{\alpha} > 1$ и $\bar{K} > 1$ или $\bar{\alpha} < 1$ и $\bar{K} < 1$.

На рис. 1 для фиксированного значения $\bar{\alpha} = 2$ представлены построенные по формулам (17) и (19) графики зависимостей $\tilde{\alpha}_*$ (пунктирная прямая), $\tilde{\alpha}_+$ (штрихпунктирные кривые) и $\tilde{\alpha}_-$ (штриховые кривые) от объемной концентрации C_V включений. Кривые для оценок без символов построены при $\bar{K} = 1,9$, а с темными кружками — при $\bar{K} = 0,3$. По формуле (20) рассчитаны зависимости $\tilde{\alpha}_0^*$ от C_V при $\bar{K} = 1,9$ и $\bar{K} = 0,3$ (соответственно штрихпунктирная и штриховая кривые со светлыми кружками). Сплошные кривые соответствуют рассчитанным по формуле (18) зависимостям $\tilde{\alpha}$ от C_V при фиксированном значении $\bar{\alpha} = 2$ и сочетаниях $\bar{K} = 1,9, \bar{G} = 2$ (кривые без символов), $\bar{K} = 1,9, \bar{G} = 0,7$ (кривые с квадратами), $\bar{K} = \bar{G} = 0,3$ (с ромбами), $\bar{K} = 0,3, \bar{G} = 0,1$ (с треугольниками). Видно, что все сплошные кривые расположены в пределах границ, определяемых соответствующими двусторонними оценками. При уменьшении параметра \bar{G} сплошные кривые приближаются к пунктирной прямой. В случае $\bar{K} = 1,9$ область возможных значений $\tilde{\alpha}$ между пунктирной линией и

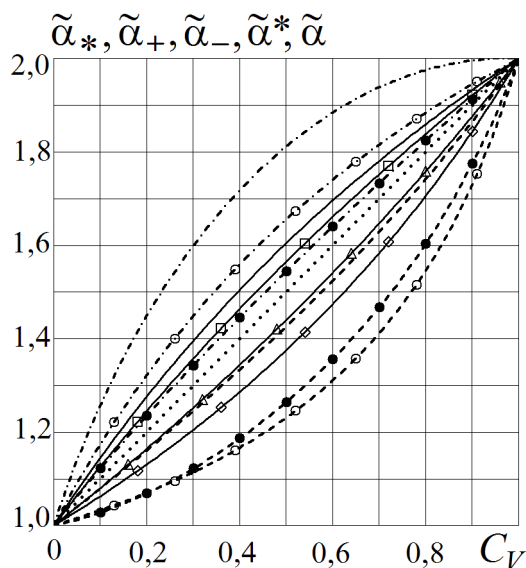


Рис. 1. Зависимости безразмерных оценок температурного коэффициента линейного расширения композита от объемной концентрации C_V включений при $\bar{\alpha} = 2$

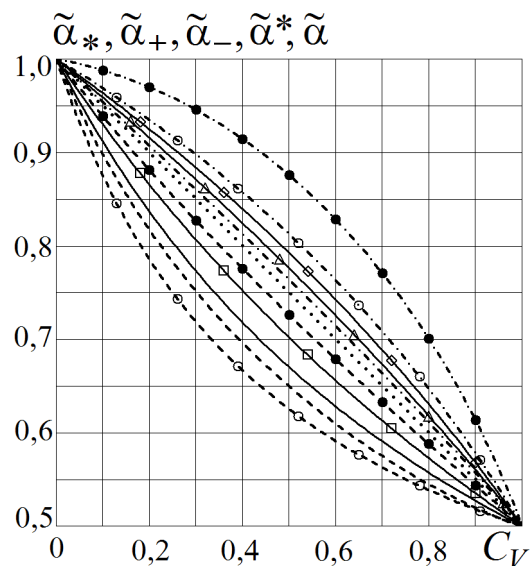


Рис. 2. Зависимости безразмерных оценок температурного коэффициента линейного расширения композита от объемной концентрации C_V включений при $\bar{\alpha} = 0,5$

графиком для верхней оценки $\tilde{\alpha}_0^*$ заметно меньше области, ограниченной оценками, определяемыми соотношением (19). Однако при $\bar{K} = 0,3$ эти области примерно одинаковы, причем первая из них лишь несколько смещена в сторону меньших возможных значений $\tilde{\alpha}$.

На рис. 2 при аналогичных с предыдущим рисунком обозначениях приведены графики тех же зависимостей для фиксированного значения $\bar{\alpha} = 0,5$. Кривые двусторонних оценок без символов построены при $\bar{K} = 3$, а с темными кружками — при $\bar{K} = 0,6$. По формуле (20) рассчитаны зависимости $\tilde{\alpha}_0^*$ от C_V при $\bar{K} = 3$ и $\bar{K} = 0,6$ (соответственно штриховая и штрихпунктирная кривые со светлыми кружками). Построенные по формуле (18) сплошные кривые для $\tilde{\alpha}$ соответствуют сочетаниям $\bar{K} = 3$, $\bar{G} = 2$ (кривые без символов), $\bar{K} = 3$, $\bar{G} = 0,7$ (кривые с квадратами), $\bar{K} = 0,6$, $\bar{G} = 1,2$ (с ромбами), $\bar{K} = 0,6$, $\bar{G} = 0,4$ (с треугольниками). Как и на рис. 1, все сплошные кривые не выходят за пределы границ, определяемых соответствующими двусторонними оценками, а при уменьшении параметра \bar{G} приближаются к пунктирной прямой. Соотношение между областями возможных значений $\tilde{\alpha}$ аналогично рис. 1.

Следует отметить, что по мере увеличении отклонения значений параметров $\bar{\alpha}$ и \bar{K} от единицы область возможных значений $\tilde{\alpha}$, определяемая соотношением (19), увеличивает свои размеры быстрее по сравнению с областью, границы которой определены неравенствами (20). При этом несмотря на выполнение равенств $\tilde{\alpha}_+ = \tilde{\alpha}_+ = 1$ при $C_V = 0$ и $\tilde{\alpha}_+ = \tilde{\alpha}_+ = \bar{\alpha}$ при $C_V = 1$ для промежуточных значений объемной концентрации включений эти оценки могут выходить за пределы промежутка, ограниченного значениями 1 и $\bar{\alpha}$. Поэтому в случае рассматриваемого композита с включениями только из одного материала целесообразно отдать предпочтение оценкам, определяемым неравенствами (20).

В работе [1] полученную на основе сингулярного приближения теории случайных функций формулу, аналогичную по структуре формуле (18), предложено использовать для построения двусторонних оценок путем подбора параметра \bar{G} . Один из вариантов состоит в использовании двух значений $\bar{G}_V = 1 - C_V + \bar{G}_1 C_V$ и $\bar{G}_R = (1 - C_V + C_V/\bar{G}_1)^{-1}$, где $\bar{G}_1 = G_1/G_m$, G_1 и G_m — модули сдвига включений и материала матрицы соответственно. Первое значение является верхней оценкой безразмерного модуля сдвига композита [34] и его использование в формуле вида (18) должно дать верхнюю оценку для $\bar{\alpha}$, а второе значение, будучи нижней оценкой этого модуля, должно привести к нижней оценке для $\bar{\alpha}$. Поскольку второе слагаемое в правой части формулы (18) является строго монотонной функцией параметра \bar{G} , при любом значении $\bar{G} \in (\bar{G}_R, \bar{G}_V)$ результат вычислений по этой формуле будет заключен между указанными двусторонними оценками.

Заключение

Установлено, что результаты вычисления температурного коэффициента линейного расширения композита с изотропными шаровыми включениями по формуле, полученной в данной работе методом самосогласования, не выходят за пределы двусторонних оценок этого коэффициента. Эта формула определяет зависимость указанного коэффициента от объемных концентраций включений из набора различных материалов и их термоупругих свойств, а также от термоупругих характеристик матрицы композита. Представленные в статье расчетные зависимости могут быть использованы для прогноза температурного коэффициента линейного расширения дисперсно армированных композитов.

Работа выполнена по грантам НШ-1432.2014.8 и МК-6573.2015.8 программ Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ и молодых кандидатов наук, а также в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности в части государственного задания № 2014/104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту № 1.2640.2014.

Список литературы

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
2. Механика композиционных материалов: пер. с англ. / под ред. Дж. Сендечки: М.: Мир, 1978. 564 с.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
4. Хорошун Л.П., Солтанов Н.С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. Киев: Наукова думка, 1985. 109 с.
5. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 304 с.

6. Anglin B.S., Lebensohn R.A., Rollett A.D. Validation of a numerical method based on Fast Fourier Transforms for heterogeneous thermoelastic materials by comparison with analytical solutions // Computational Materials Science. 2014. Vol. 87. P. 209-217. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.02.027](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.02.027)
7. Lv J., Yang K., Zhang H., Yang D., Huang Y. A hierarchical multiscale approach for predicting thermo-electro-mechanical behavior of heterogeneous piezoelectric smart materials // Computational Materials Science. 2014. Vol. 87. P. 88–99. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.01.059](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.01.059)
8. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1965. Vol. 13, no. 4. P. 213–222. DOI: [10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4)
9. Паньков А.А. Методы самосогласования механики композитов. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. 253 с.
10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. №9. С. 435–444. DOI: [10.7463/0913.0601512](https://doi.org/10.7463/0913.0601512)
11. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности однонаправленного волокнистого композита методом самосогласования // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. 519–532. DOI: [10.7463/1113.0622927](https://doi.org/10.7463/1113.0622927)
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Оценки упругих свойств композита с анизотропными шаровыми включениями // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 8. С. 237–255. DOI: [10.7463/0814.0720691](https://doi.org/10.7463/0814.0720691)
13. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций: пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.
14. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Оценка эффективных упругих характеристик материалов, модифицированных фуллереном // Композиты и наноструктуры. 2011. № 4. С. 21–31.
15. Лурье С.А., Миронов Ю.М., Нелюб В.А., Бородулин А.С., Чуднов И.В., Буянов И.А., Соляев Ю.О. Моделирование зависимостей физико-механических характеристик от параметров микро- и наноструктуры полимерных композиционных материалов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 6. С. 38–60. DOI: [10.7463/0612.0431339](https://doi.org/10.7463/0612.0431339)
16. Lehmann B., Schlarb A.K., Friedrich K., Zhang M.Q., Rong M.Z. Modelling of mechanical properties of nanoparticle-filled polyethylene // International Journal of Polymeric Materials. 2008. Vol. 57, no. 1. P. 81–100.

17. Ivanisenko Y., Darbandi A., Dasgupta S., Kruk R., Hahn H. Bulk Nanostructured Materials: Non-Mechanical Synthesis // *Advanced Engineering Materials*. 2010. Vol. 12, no. 8. P. 666–676. DOI: [10.1002/adem.201000131](https://doi.org/10.1002/adem.201000131)
18. Лурье С.А., Соляев Ю.О. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями // *Вестник ПГТУ. Механика*. 2010. № 1. С. 80–90.
19. Зайцев А.В., Фукалов А.А. Эффективные модули объемного сжатия дисперсно-упрочненных композитов со сплошными и полыми анизотропными сферическими включениями // *Вестник ПГТУ. Механика*. 2010. № 4. С. 46–54.
20. Prüger S., Mehlhorn L., Mühlich U., Kuna M. Study of Reinforcing Mechanisms in TRIP-Matrix Composites under Compressive Loading by Means of Micromechanical Simulations // *Advanced Engineering Materials*. 2013. Vol. 15, no. 7. P. 542–549. DOI: [10.1002/adem.201200323](https://doi.org/10.1002/adem.201200323)
21. Соколов И.И., Долматовский М.Г. Сферопластики // *Полимерные материалы*. 2005. №9. С. 20–21.
22. Соколов И.И., Долматовский М.Г., Деев И.С., Стеценко В.Я. Влияние физико-механических характеристик полых стеклянных микросфер на свойства сферопластиков // *Пластические массы*. 2005. № 7. С. 16–18.
23. Weise J., Salk N., Jehring U., Baumeister J., Lehnhus D., Bayoumi M.A. Influence of Powder Size on Production Parameters and Properties of Syntactic Invar Foams Produced by Means of Metal Powder Injection Moulding // *Advanced Engineering Materials*. 2013. Vol. 15, no. 3. P. 118–122. DOI: [10.1002/adem.201200129](https://doi.org/10.1002/adem.201200129)
24. Cunha S., Aguiar J.B., Ferreira V.M., Tadeu A. Influence of the Type of Phase Change Materials Microcapsules on the Properties of Lime-Gypsum Thermal Mortars // *Advanced Engineering Materials*. 2014. Vol. 16, no. 4. P. 433–441. DOI: [10.1002/adem.201300278](https://doi.org/10.1002/adem.201300278)
25. Jin H.-J., Weissmüller J. Bulk Nanoporous Metal for Actuation // *Advanced Engineering Materials*. 2010. Vol. 12, no. 8. P. 714–723. DOI: [10.1002/adem.200900329](https://doi.org/10.1002/adem.200900329)
26. Schmidt K., Becker J. Generating Validated 3D Models of Microporous Ceramics // *Advanced Engineering Materials*. 2013. Vol. 15, no. 1–2. P. 40–45. DOI: [10.1002/adem.201200097](https://doi.org/10.1002/adem.201200097)
27. Giraud A., Sevostianov I. Micromechanical modeling of the effective elastic properties of oolitic limestone // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2013. Vol. 62. September. P. 23–27.
28. Cho Y.J., Wook Jin Lee W.J., Park S.K., Park Y.H. Effect of Pore Morphology on Deformation Behaviors in Porous Al by FEM Simulations // *Advanced Engineering Materials*. 2013. Vol. 15, no. 3. P. 166–169. DOI: [10.1002/adem.201200145](https://doi.org/10.1002/adem.201200145)

29. Deqing W. Relation of Cell Uniformity and Mechanical Property of a Close Cell Aluminum Foam // *Advanced Engineering Materials*. 2013. Vol. 15, no. 3. P. 175–179. DOI: [10.1002/adem.201200135](https://doi.org/10.1002/adem.201200135)
30. Montero-Chacón F., Marin-Montin J., Medina F. Mesomechanical characterization of porosity in cementitious composites by means of a voxel-based finite element model // *Computational Materials Science*. 2014. Vol. 90. P. 157–170. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.03.066](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.066)
31. Goehler H., Jehring U., Meinert J., Hauser R., Quadbeck P., Kuemmel K., Stephani G., Kieback B. Functionalized Metallic Hollow Sphere Structures // *Advanced Engineering Materials*. 2014. Vol. 16, no. 3. P. 335–339. DOI: [10.1002/adem.201300057](https://doi.org/10.1002/adem.201300057)
32. Schumacher Th.C., Klein T.Y., Treccani L., Rezwani K. Rapid Sintering of Porous Monoliths Assembled from Microbeads with High Specific Surface Area and Multimodal Porosity // *Advanced Engineering Materials*. 2014. Vol. 16, no. 2. P. 151–155. DOI: [10.1002/adem.201300220](https://doi.org/10.1002/adem.201300220)
33. Шумов А.В., Плахотниченко А.А., Титова М.В. Применение композитных материалов в радиолокационной технике. Отражатель антенного устройства доплеровского метеорологического радиолокатора // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2014. № 12. С. 593–606. DOI: [10.7463/1214.0749463](https://doi.org/10.7463/1214.0749463)
34. Синев Л.С. Оценка механических напряжений в соединенных при повышенной температуре кремнии и стекле // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2014. № 12. С. 951–965. DOI: [10.7463/1214.0745310](https://doi.org/10.7463/1214.0745310)
35. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А. Моделирование термоупругих характеристик композитов на основе алюмо-хромофосфатных связующих // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2013. № 11. С. 497–518. DOI: [10.7463/1113.0623564](https://doi.org/10.7463/1113.0623564)
36. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Беленовская Ю.В., Анискович В.А., Перевислов С.Н. Моделирование микроструктурного разрушения и прочности керамических композитов на основе реакционно-связанного SiC // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2013. № 11. С. 475–496. DOI: [10.7463/1113.0659438](https://doi.org/10.7463/1113.0659438)
37. Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2014. № 7. С. 243–265. DOI: [10.7463/0714.0717805](https://doi.org/10.7463/0714.0717805)
38. Шаскольская М.С. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1976. 392 с.
39. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Изотропные шаровые включения // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2014. № 5. С. 53–69.

40. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Анизотропные шаровые включения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2014. № 6. С. 20–31.
41. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
42. Введение в микромеханику: пер. с япон. / под ред. М. Онами. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
43. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
44. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.

Self-Consistency Method to Evaluate a Linear Expansion Thermal Coefficient of Composite with Dispersed Inclusions

Zarubin V. S.^{1,*}, Kuvyrkin G. N.¹, Savelieva I. Yu.¹

[*fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)

¹Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: composite, method of self-consistency, two-sided estimates, isotropic spherical inclusion, temperature coefficient of linear expansion

The rational use of composites as structural materials, while perceiving the thermal and mechanical loads, to a large extent determined by their thermoelastic properties. From the presented review of works devoted to the analysis of thermoelastic characteristics of composites, it follows that the problem of estimating these characteristics is important. Among the thermoelastic properties of composites occupies an important place its temperature coefficient of linear expansion.

Along with fiber composites are widely used in the technique of dispersion hardening composites, in which the role of inclusions carry particles of high-strength and high-modulus materials, including nanostructured elements. Typically, the dispersed particles have similar dimensions in all directions, which allows the shape of the particles in the first approximation the ball.

In an article for the composite with isotropic spherical inclusions of a plurality of different materials by the self-produced design formulas relating the temperature coefficient of linear expansion with volume concentration of inclusions and their thermoelastic characteristics, as well as the thermoelastic properties of the matrix of the composite. Feature of the method is the self-accountability thermomechanical interaction of a single inclusion or matrix particles with a homogeneous isotropic medium having the desired temperature coefficient of linear expansion. Averaging over the volume of the composite arising from such interaction perturbation strain and stress in the inclusions and the matrix particles and makes it possible to obtain such calculation formulas.

For the validation of the results of calculations of the temperature coefficient of linear expansion of the composite of this type used two-sided estimates that are based on the dual variational formulation of linear thermoelasticity problem in an inhomogeneous solid containing two alternative functional (such as Lagrange and Castigliano). These functionals on the true distribution

of strains and stresses in an inhomogeneous body matching meaningfully reach extremes (minimum and maximum respectively). On the convergence of the distribution of the minimized functional application gives an upper estimate of the desired values of the temperature coefficient of linear expansion of the composite, and maximized use - their lower bound. The difference between these estimates allows to predict the maximum possible error in calculations obtained dependences.

References

1. Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p. (in Russian).
2. Sendetski G., ed. *Kompozitsionnye materialy. V 8 t. T. 2. Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Composite Materials. In 8 vols. Vol. 2. Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Mir Publ., 1978. 564 p. (Russian translation).
3. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley-Interscience publication, 1979. 348 p. (Russ. ed.: Christensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov*. Moscow, Mir Publ., 1982. 334 p.).
4. Khoroshun L.P., Soltanov N.S. *Termouprugost' dvukhkomponentnykh smesei* [Thermoelastic of twocomponent mixtures]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 109 p. (in Russian).
5. Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 304 p. (in Russian).
6. Anglin B.S., Lebensohn R.A., Rollett A.D. Validation of a numerical method based on Fast Fourier Transforms for heterogeneous thermoelastic materials by comparison with analytical solutions. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 87, pp. 209–217. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.02.027](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.02.027)
7. Lv J., Yang K., Zhang H., Yang D., Huang Y. A hierarchical multiscale approach for predicting thermo-electro-mechanical behavior of heterogeneous piezoelectric smart materials. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 87, pp. 88–99. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.01.059](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.01.059)
8. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222. DOI: [10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4)
9. Pan'kov A.A. *Metody samosoglasovaniya mekhaniki kompozitov* [Self-Consistent Methods for Composites]. Perm', PSTU Publ., 2008. 253 p. (in Russian).
10. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of effective thermal conductivity of composites with ball inclusions by the method of self-consistency. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 9, pp. 435–444. DOI: [10.7463/0913.0601512](https://doi.org/10.7463/0913.0601512) (in Russian).
11. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of effective thermal conductivity of unidirectional fiber composites by the method of self-consistency. *Nauka i obrazovanie MGTU*

im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU, 2013, no. 11, pp. 519–532. DOI: [10.7463/1113.0622927](https://doi.org/10.7463/1113.0622927) (in Russian).

12. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Estimating of the Elastic Properties of the Composite with Anisotropic Ball Inclusions. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 8, pp. 237–255. DOI: [10.7463/0814.0720691](https://doi.org/10.7463/0814.0720691) (in Russian).
13. Eshelby J.D. The continuum theory of lattice defects. In: Seitz F., Turnbull D., eds. *Progress in Solid State Physics. Vol. 3*. New York, Academic Press, 1956, pp. 79–144. (Russ. ed.: Eshelby J.D. *Kontinual'naiia teoriia dislokatsii*. Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury, 1963. 248 p.).
14. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Estimation of effective moduli of materials modified by fullerene. *Kompozity i nanostruktury = Composites and Nanostructures*, 2011, no. 4, pp. 21–31. (in Russian).
15. Lur'e S.A., Mironov Yu.M., Nelyub V.A., Borodulin A.S., Chudnov I.V., Buyanov I.A., Solyaev Yu.O. Modeling of dependences of physical-mechanical properties on parameters of micro- and nanostructure polymer composite materials. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 6, pp. 38–60. DOI: [10.7463/0612.0431339](https://doi.org/10.7463/0612.0431339) (in Russian).
16. Lehmann B., Schlarb A.K., Friedrich K., Zhang M.Q., Rong M.Z. Modelling of mechanical properties of nanoparticle-filled polyethylene. *International Journal of Polymeric Materials*, 2008, vol. 57, no. 1, pp. 81–100.
17. Ivanisenko Y., Darbandi A., Dasgupta S., Kruk R., Hahn H. Bulk Nanostructured Materials: Non-Mechanical Synthesis. *Advanced Engineering Materials*, 2010, vol. 12, no. 8, pp. 666–676. DOI: [10.1002/adem.201000131](https://doi.org/10.1002/adem.201000131)
18. Lur'e S.A., Soliaev Iu.O. Modified Eshelby method in the problem of definition of effective properties with spherical micro- and nanoincludes. *Vestnik PGTU. Mekhanika = PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no. 1, pp. 80–90. (in Russian).
19. Zaitsev A.V., Fukalov A.A. Effective Bulk Modules of 3D Matrix-Inclusion Composites with Continuous and Hollow Anisotropic Spherical Particles. *Vestnik PGTU. Mekhanika = PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no. 4, pp. 46–54. (in Russian).
20. Prüger S., Mehlhorn L., Mühlich U., Kuna M. Study of Reinforcing Mechanisms in TRIP-Matrix Composites under Compressive Loading by Means of Micromechanical Simulations. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 7, pp. 542–549. DOI: [10.1002/adem.201200323](https://doi.org/10.1002/adem.201200323)
21. Sokolov I.I., Dolmatovskii M.G. Spheroplasts. *Polimernye materialy*, 2005, no. 9, pp. 20–21. (in Russian).
22. Sokolov I.I., Dolmatovskii M.G., Deev I.S., Stetsenko V.Ia. Influence of the hysicomechanical characteristics of hollow glass microspheres on the properties of sphere-filled plastics. *Plas-*

ticheskie massy, 2005, no. 7, pp. 16–18. (English translation: *International Polymer Science and Technology*, 2006, vol. 33, no. 3, pp. 31–35).

23. Weise J., Salk N., Jehring U., Baumeister J., Lehmus D., Bayoumi M.A. Influence of Powder Size on Production Parameters and Properties of Syntactic Invar Foams Produced by Means of Metal Powder Injection Moulding. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 118–122. DOI: [10.1002/adem.201200129](https://doi.org/10.1002/adem.201200129)
24. Cunha S., Aguiar J.B., Ferreira V.M., Tadeu A. Influence of the Type of Phase Change Materials Microcapsules on the Properties of Lime-Gypsum Thermal Mortars. *Advanced Engineering Materials*, 2014, vol. 16, no. 4, pp. 433–441. DOI: [10.1002/adem.201300278](https://doi.org/10.1002/adem.201300278)
25. Jin H.-J., Weissmüller J. Bulk Nanoporous Metal for Actuation. *Advanced Engineering Materials*, 2010, vol. 12, no. 8, pp. 714–723. DOI: [10.1002/adem.200900329](https://doi.org/10.1002/adem.200900329)
26. Schmidt K., Becker J. Generating Validated 3D Models of Microporous Ceramics. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 1–2, pp. 40–45. DOI: [10.1002/adem.201200097](https://doi.org/10.1002/adem.201200097)
27. Giraud A., Sevostianov I. Micromechanical modeling of the effective elastic properties of oolitic limestone. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2013, vol. 62, September, pp. 23–27.
28. Cho Y.J., Wook Jin Lee W.J., Park S.K., Park Y.H. Effect of Pore Morphology on Deformation Behaviors in Porous Al by FEM Simulations. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 166–169. DOI: [10.1002/adem.201200145](https://doi.org/10.1002/adem.201200145)
29. Deqing W. Relation of Cell Uniformity and Mechanical Property of a Close Cell Aluminum Foam. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 175–179. DOI: [10.1002/adem.201200135](https://doi.org/10.1002/adem.201200135)
30. Montero-Chacón F., Marin-Montin J., Medina F. Mesomechanical characterization of porosity in cementitious composites by means of a voxel-based finite element model. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 90, pp. 157–170. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.03.066](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.066)
31. Goehler H., Jehring U., Meinert J., Hauser R., Quadbeck P., Kuemmel K., Stephani G., Kieback B. Functionalized Metallic Hollow Sphere Structures. *Advanced Engineering Materials*, 2014, vol. 16, no. 3, pp. 335–339. DOI: [10.1002/adem.201300057](https://doi.org/10.1002/adem.201300057)
32. Schumacher Th.C., Klein T.Y., Treccani L., Rezwani K. Rapid Sintering of Porous Monoliths Assembled from Microbeads with High Specific Surface Area and Multimodal Porosity. *Advanced Engineering Materials*, 2014, vol. 16, no. 2, pp. 151–155. DOI: [10.1002/adem.201300220](https://doi.org/10.1002/adem.201300220)
33. Shumov A.V., Plakhotnichenko A.A., Titova M.V. Composite Technology in Radar Equipment. Dopler Meteo Radar Reflector Device. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 12, pp. 593–606. DOI: [10.7463/1214.0749463](https://doi.org/10.7463/1214.0749463) (in Russian).

34. Sinev L.S. Mechanical Stresses Estimation in Silicon and Glass Bonded at Elevated Temperature. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 12, pp. 951–965. DOI: [10.7463/1214.0745310](https://doi.org/10.7463/1214.0745310) (in Russian).
35. Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Egoleva E.S., Matveeva A.A. Modeling of thermoelastic properties of composites with alumino-chromic phosphate matrices. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 11, pp. 497–518. DOI: [10.7463/1113.0623564](https://doi.org/10.7463/1113.0623564) (in Russian).
36. Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Belenovskaya Yu.V., Aniskovich V.A., Perevislov S.N. Modeling microstructural destruction and strength of ceramic composites based on the reaction-bonded SiC. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 11, pp. 475–496. DOI: [10.7463/1113.0659438](https://doi.org/10.7463/1113.0659438) (in Russian).
37. Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Prozorovskii A.A. Multiscale Finite-Element Modeling of Sandwich Honeycomb Composite Structures. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 7, pp. 243–265. DOI: [10.7463/0714.0717805](https://doi.org/10.7463/0714.0717805) (in Russian).
38. Shaskol'skaia M.S. *Kristallografiia* [Crystallography]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1976. 392 p. (in Russian).
39. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Comparative Analysis Estimates of Elastic Moduli for Composite. Isotropic Spherical Inclusions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering*, 2014, no. 5, pp. 53–69. (in Russian).
40. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Comparative Analysis Modulus Elasticity Estimates for Composite Anisotropic Spherical Inclusions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering*, 2014, no. 6, pp. 20–31. (in Russian).
41. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p. (in Russian).
42. Onami M., ed. *Vvedenie v mikromekhaniku* [Introduction to micro-mechanics]. Trans. from Japanese. Moscow, Metallurgiiia Publ., 1987. 280 p. (in Russian).
43. Zarubin V.S., Stankevich I.V. *Raschet teplonapryazhennykh konstruksii* [Calculation of heat-stressed designs]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 352 p. (in Russian).
44. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mixture Models of Composite Mechanics. P. 1. Thermal Mechanics and Thermoelasticity of Multicomponent Mixture. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2009, no. 3, pp. 36–49. (in Russian).