

УДК 621.3

Колебания жидкого топлива непостоянного объёма в сферической ёмкости

Нгуен Х. З.^{1,*}, Темнов А. Н.¹

[*freedom_dh@yahoo.com.vn](mailto:freedom_dh@yahoo.com.vn)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Задача о малых колебаниях несжимаемой идеальной жидкости, частично заполняющей неподвижный бак произвольной формы, рассматривалась многими авторами [1-11], где приведены большие библиографии работ по данной теме. В настоящей статье представлено решение задачи о собственных колебаниях жидкости в сферической ёмкости, с граничными условиями на свободной поверхности и поверхности с сопротивлением – поверхности слива. Особое внимание уделено нахождению собственных значений и частот уравнений колебаний возмущенного движения жидкости с наличием диссипации на граничных поверхностях. В отличие от предыдущих работ [12,18] в рассматриваемой задаче скорость опускания и площадь свободной поверхности при невозмущённом состоянии не остаются постоянными.

Ключевые слова: малые колебания, возмущенное движение, сферический бак, собственные колебания

Введение

В течение длительного времени изучались задачи о колебаниях жидкости в баках. Наиболее полную библиографию работ по этому вопросу можно найти в книгах [1-6]. Впервые исследование колебаний жидкости с учетом вытекания было предложено Кирилловым В.В. [7] и продолжено в работах [8,9,10]. В упомянутых работах рассматривались задачи для жидкости, занимающей часть цилиндрического бака, на дне которого ставилось кинематическое условие вытекания. В работах авторов [11,12,13] приведена постановка модельной задачи о малых движениях идеальной несжимаемой жидкости, вытекающей из топливного бака с заборными устройствами и решения задач для баков в виде цилиндра и конуса. Исследование задач в этих работах показало, что спектр нормальных движений несжимаемой жидкости обладает двумя ветвями собственных значений: дискретного множества вещественных чисел, расположенных на положительной части вещественной оси, и дискретного множества комплексно сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси. Действительным собственным значениям отвечают аperiодические

режимы движения жидкости, происходящие преимущественно вблизи дна топливного отсека, а комплексно сопряженным числам отвечают режимы затухающих колебаний, преобладающих, в основном, на свободной поверхности жидкости.

В настоящей статье приведено решение задачи о движении идеальной несжимаемой жидкости, вытекающей из топливного отсека в виде сфера. При решении вспомогательных краевых задач использовалась вариационная формулировка, реализуемая численно с помощью метода Рунге.

1. Постановка задачи.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость, частично заполняющая неподвижный бак произвольной формы, вытекает через заборное устройство и может совершать малые движения. Рассматриваемая проблема малых движений жидкости может быть описана уравнениями гидродинамики, линеаризованными вблизи невозмущенного состояния.

Предполагая возмущенное движение жидкости потенциальным, введя потенциал скоростей – функцию $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$, сформулируем краевую задачу о колебаниях вытекающей жидкости в виде:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0 \quad \text{в } Q, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } S, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \cdot V_{0\Gamma} + g w_\Gamma &= f_1 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \cdot V_{0\Sigma} - \gamma \dot{w}_\Sigma &= f_2 \quad \text{на } \Sigma, \\ \Phi(x_1, x_2, x_3, 0) &= \Phi^{(0)}, \quad \dot{\Phi}(x_1, x_2, x_3, 0) = \dot{\Phi}^{(0)} \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где Q - область, заполненная жидкостью, S – смачиваемая жидкостью поверхность, Γ_0 - свободная поверхность, Σ - поверхность слива, $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к

поверхности S , $w_\Gamma = \int \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} dt$, $\dot{w}_\Sigma = \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}$ - малые смещения и скорость частиц жидкости на

поверхностях Γ_0 и Σ соответственно, $\gamma = \zeta V_\Sigma = \zeta V_{0\Gamma}$ - обобщенный коэффициент сопротивления поверхности слива, $V_{0\Gamma}$, $V_{0\Sigma}$ - скорость опускания свободной поверхности и скорость вытекания жидкости на поверхности слива в невозмущенном состоянии соответственно, ζ - коэффициент гидравлического сопротивления поверхности слива, g - величина

интенсивности внешнего однородного поля массовых сил, f_1, f_2 - заданные поля внешних воздействий соответственно на поверхностях Γ_0 и Σ . Подробная постановка задачи приведена в работах [11 -13].

Проинтегрировав уравнение неразрывности по объёму, занимаемому жидкостью, для любого момента времени t , получим дополнительное интегральное условие $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Sigma} dS$, которому должны подчиняться поле скоростей и поле смещений в рассматриваемой задаче.

2. Колебания жидкого топлива в сферической ёмкости.

Рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости, вытекающей через заборные устройства из сферической ёмкости с радиусом R_0 при наличии свободной поверхности (рис.1).

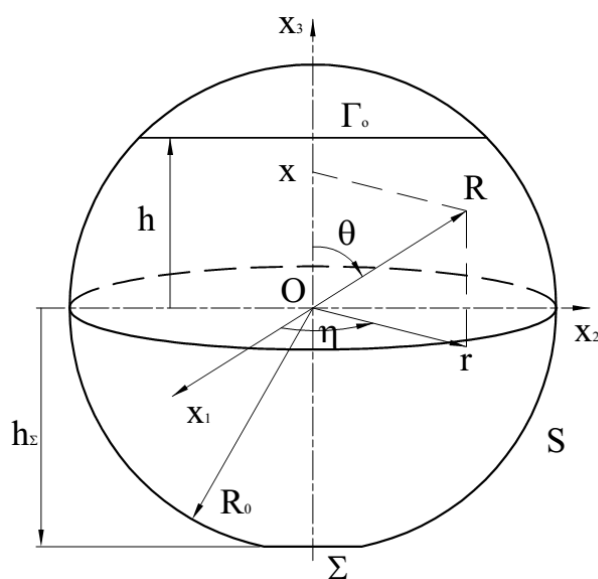


Рис.1. Основные обозначения и системы координаты.

Введем обозначения: h – расстояние от центра бака до свободной поверхности, $r_0 = \sqrt{R_0^2 - h^2}$ - радиус свободной поверхности, h_Σ - расстояние от центра бака до поверхности слива, $r_\Sigma = \sqrt{R_0^2 - h_\Sigma^2}$ - радиус поверхности слива. Используя цилиндрические координаты x, r, η с началом в центре сферы, получим задачу для определения потенциала скоростей $\Phi(x, r, \eta, t)$:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= 0 \text{ в } Q, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} V_{0r} + g \int \frac{\partial\Phi}{\partial x} dt &= 0 \text{ на } \Gamma_0 (x=h), \\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} V_{0\Sigma} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= 0 \text{ на } \Sigma (x=h_\Sigma), \\
\frac{\partial\Phi}{\partial n} &= 0 \text{ на } S (R=R_0), \\
\Phi(x, r, \eta, t) &= \Phi^{(0)} \text{ при } t = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Будем искать функцию $\Phi(x, r, \eta, t)$ в виде

$$\Phi(x, r, \eta, t) = \Phi_1(x, r, \eta, t) + \Phi_2(x, r, \eta, t). \tag{3}$$

Функции $\Phi_1(x, r, \eta, t)$, $\Phi_2(x, r, \eta, t)$ представим в видах

$$\Phi_1(x, r, \eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{1m}(x, r, \eta, t), \quad \Phi_2(x, r, \eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{2m}(x, r, \eta, t), \tag{4}$$

где функция $\Phi_{1m}(x, r, \eta, t)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi_{1m} &= 0 \text{ в } Q, \\
\frac{\partial\Phi_{1m}}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_{1m}}{\partial x} \cdot V_{0r} + g \int \frac{\partial\Phi_{1m}}{\partial x} dt &\neq 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial\Phi_{1m}}{\partial x} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\Phi_{1m}}{\partial n} = 0 \text{ на } S,
\end{aligned} \tag{5}$$

а функция $\Phi_{2m}(x, r, \eta, t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi_{2m} &= 0 \text{ на } Q, \\
\frac{\partial\Phi_{2m}}{\partial x} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial\Phi_{2m}}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_{2m}}{\partial x} \cdot V_{0\Sigma} - \gamma \frac{\partial\Phi_{2m}}{\partial x} &\neq 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\Phi_{2m}}{\partial n} = 0 \text{ на } S.
\end{aligned} \tag{6}$$

Представим функции $\Phi_{1m}(x, r, \eta, t)$, $\Phi_{2m}(x, r, \eta, t)$ в виде

$$\begin{aligned}
\Phi_{1m}(x, r, \eta, t) &= \varphi_{1m}(x, r, \eta) \cdot \dot{S}_m(t) = \varphi_{1m}^*(x, r) \cdot H_m(\eta) \cdot \dot{S}_m(t), \\
\Phi_{2m}(x, r, \eta, t) &= \varphi_{2m}(x, r, \eta) \cdot \dot{\lambda}_m(t) = \varphi_{2m}^*(x, r) \cdot H_m(\eta) \cdot \dot{\lambda}_m(t),
\end{aligned} \tag{7}$$

где $H_m(\eta) = \begin{cases} \sin(m\eta) \\ \cos(m\eta) \end{cases}$, а функции $\varphi_{1m}(x, r, \eta) = \varphi_{1m}^*(x, r) \cdot H_m(\eta)$,

$\varphi_{2m}(x, r, \eta) = \varphi_{2m}^*(x, r) \cdot H_m(\eta)$ есть решения вариационных задач: найти минимум функционалов [8]

$$F_1(\varphi_{1m}) = \int_Q (\nabla \varphi_{1m})^2 dQ - \chi \int_{\Gamma_0} (\varphi_{1m})^2 d\Gamma, \quad F_2(\varphi_{2m}) = \int_Q (\nabla \varphi_{2m})^2 dQ - \chi \int_{\Gamma_0} (\varphi_{2m})^2 d\Gamma. \tag{8}$$

Используя метод Ритца, находим решения поставленных вариационных задач (8)

$$\varphi_{1m}(x, r, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1mn}^*(r, x) \cdot H_m(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N a_{mnk} \frac{U_k(x, r)}{P_k^{(m)}(h/R_0)} \right) \cdot H_m(\eta), \quad (9)$$

$$\varphi_{2m}(x, r, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2mn}^*(r, x) \cdot H_m(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N b_{mnk} \frac{U_k(x, r)}{P_k^{(m)}(h/R_0)} \right) \cdot H_m(\eta), \quad (10)$$

где a_{mnk} , b_{mnk} - коэффициенты, полученные при решении вариационных задач (8),

$U_k(x, r) = R^k P_k^{(m)}(\cos \theta)$ - координатные функции, $P_k^{(m)}(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{d^m(\cos \theta)} P_k(\cos \theta)$

- присоединенные функции Лежандра степени m , $P_k(\cos \theta) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{d(\cos \theta)^k} (\cos^2 \theta - 1)^k$ -

полином Лежандра степени k , N - порядок приближения решений вариационных задач (8).

В таблице №1 представлены решения вариационных задач (8) при $R_0 = 1m$, $r_{\Sigma} = 0,1m$, $m = 1$, $n = 1$, $N = 8$ для различных значений h .

Таблица №1 – Коэффициенты a_{mnk} , b_{mnk} и собственные частоты колебаний жидкости ω_{11}^* в сферической емкости, полученные при решении вариационных задач.

$h = -0,3m$				$h = 0,3m$			
a_{111}	-1,00000	b_{111}	-0,11415	a_{111}	-1,00000	b_{111}	-0,00118
a_{112}	0,40937	b_{112}	-0,25081	a_{112}	-0,53278	b_{112}	-0,24783
a_{113}	0,13142	b_{113}	0,38175	a_{113}	0,26246	b_{113}	-0,24383
a_{114}	-0,06681	b_{114}	1,00000	a_{114}	0,23484	b_{114}	0,95558
a_{115}	0,00173	b_{115}	0,08423	a_{115}	0,00528	b_{115}	-0,07621
a_{116}	0,01563	b_{116}	-0,64764	a_{116}	0,01105	b_{116}	-1,00000
a_{117}	-0,00665	b_{117}	-0,20495	a_{117}	0,01351	b_{117}	0,36173
a_{118}	-0,00139	b_{118}	0,04265	a_{118}	-0,00466	b_{118}	0,26393
$\omega_{11}^* = 3,60414c^{-1}$				$\omega_{11}^* = 4,36084c^{-1}$			

Тогда

$$\Phi_1(x, r, \eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N a_{mnk} \frac{U_k(x, r)}{P_k^{(m)}(h/R_0)} \right) \cdot H_m(\eta) \cdot \dot{S}_{mn}(t), \quad (11)$$

$$\Phi_2(x, r, \eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N a_{mnk} \frac{U_k(x, r)}{P_k^{(m)}(\hbar/R_0)} \right) \cdot H_m(\eta) \cdot \dot{\lambda}_{mn}(t). \quad (12)$$

Поставив (11), (12) во второе и третье уравнения задачи (2), получим

$$\left[\varphi_{1mn}^* \ddot{S}_{mn} - V_{0\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial h} + \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial x} \right) \dot{S}_{mn} + \varphi_{2mn}^* \ddot{\lambda}_{mn} - V_{0\Gamma} \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial h} \dot{\lambda}_{mn} + g \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial x} S_{mn} \right] \cdot H_m(\eta) = 0, \quad (13)$$

$$\left[\varphi_{2mn}^* \ddot{\lambda}_{mn} + \left(-V_{0\Gamma} \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial h} - (V_{0\Sigma} + \gamma) \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial x} \right) \dot{\lambda}_{mn} + \varphi_{1mn}^* \ddot{S}_{mn} - V_{0\Gamma} \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial h} \dot{S}_{mn} \right] \cdot H_m(\eta) = 0. \quad (14)$$

Умножив уравнения (13) на $\varphi_{1mn}^* H_m$, (14) - на $\varphi_{2mn}^* H_m$ и проинтегрировав по поверхностях Γ_0 и Σ соответственно, получим

$$\begin{aligned} \ddot{S}_{mn} + \alpha_{mn}^{(1)} \ddot{\lambda}_{mn} + V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(1)} \dot{\lambda}_{mn} + V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(1)} \dot{S}_{mn} + \omega_{mn}^2 S_{mn} &= 0, \\ \ddot{\lambda}_{mn} + \alpha_{mn}^{(2)} \ddot{S}_{mn} + V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(2)} \dot{S}_{mn} + (V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(2)'} - (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_{mn}) \dot{\lambda}_{mn} &= 0, \\ m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{mn}^{(1)} &= \frac{\int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}{\int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{1mn}^* r dr}, \quad \varepsilon_{mn}^{(1)} = \frac{-\int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial h} r dr}{\int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{1mn}^* r dr}, \quad \omega_{mn}^2 = g \frac{\int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial x} r dr}{\int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{1mn}^* r dr}, \\ \delta_{mn}^{(1)} &= \frac{-\int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial h} r dr - \int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial x} r dr}{\int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{1mn}^* r dr}, \quad \alpha_{mn}^{(2)} = \frac{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{1mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}, \\ \varepsilon_{mn}^{(2)} &= \frac{-\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial h} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}, \quad \varepsilon_m^{(2)'} = \frac{-\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial h} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}, \quad \sigma_{mn} = \frac{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial x} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения собственных частот рассматриваемой механической системы положим $S_{mn} = A_{1mn} e^{\Omega t}$, $\lambda_{mn} = A_{2mn} e^{\Omega t}$. Из уравнений (15) получаем характеристическое уравнение

$$k_{mn}^{(3)} \Omega^3 + k_{mn}^{(2)} \Omega^2 + k_{mn}^{(1)} \Omega + k_{mn}^{(0)} = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
k_{mn}^{(3)} &= 1 + \alpha_{mn}^{(1)} \alpha_{mn}^{(2)}, \quad k_{mn}^{(0)} = \omega_{mn}^2 \left(V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(2)'} - (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_{mn} \right), \\
k_{mn}^{(1)} &= V_{0\Gamma}^2 \left(\delta_{mn}^{(1)} \varepsilon_{mn}^{(2)'} + \varepsilon_m^{(1)} \varepsilon_{mn}^{(2)} \right) - V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(1)} (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_{mn} + \omega_{mn}^2, \\
k_{mn}^{(2)} &= V_{0\Gamma} \left(\alpha_{mn}^{(1)} \varepsilon_{mn}^{(2)} + \alpha_{mn}^{(2)} \varepsilon_{mn}^{(1)} + \delta_{mn}^{(1)} + \varepsilon_{mn}^{(2)'} \right) - (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_{mn}, \\
m &= 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь Ω - комплексный коэффициент затухания волновых движений жидкости.

Уравнение (17) имеет две ветви решений: действительные корни и ветвь комплексно сопряженных корней.

Результаты вычислений корней кубического уравнения (17) при $R_0 = 1\text{ м}$, $r_\Sigma = 0,1\text{ м}$, $m = 1$, $n = 1$, $N = 8$ для различных значений h , $V_{0\Gamma}$, γ приведены в таблице №2.

Таблица №2 - Собственные частоты колебаний жидкости в сферической емкости при перераспределении жидкости из бака

$h, \text{ м}$	$V_{0\Gamma}, \text{ м/с}$	$\gamma, \text{ м/с}$	ω_{11}	Ω_1	$\Omega_{2,3}$
0.3	0	10	4.34952	-48.97461	-0.00009 ± 4.34953i
0.1	0	10	4.03415	-45.97863	-0.00003 ± 4.03415i
0.3	0.02	10	4.34952	-58.09474	-0.02556 ± 4.34949i
0.3	0.04	20	4.34952	-116.18973	-0.05101 ± 4.34926i
0.3	0.04	40	4.34952	-214.13938	-0.05099 ± 4.34924i
0.3	0.04	60	4.34952	-312.08901	-0.05099 ± 4.34923i
0.3	0.04	80	4.34952	-410.03864	-0.05099 ± 4.34920i
0.3	0.04	100	4.34952	-507.98827	-0.05098 ± 4.34923i
0.3	0.06	20	4.34952	-125.30984	-0.07649 ± 4.34890i
-0.3	0.04	20	3.60282	-97.64699	-0.07718 ± 3.60185i
-0.2	0.04	20	3.69414	-102.05484	-0.06553 ± 3.69356i
-0.1	0.04	20	3.79478	-104.25786	-0.06268 ± 3.79427i
0.1	0.04	20	4.03415	-110.27247	-0.06251 ± 4.03365i
0.2	0.04	20	4.17999	-112.15043	-0.06517 ± 4.17950i
0.4	0.04	20	4.55001	-118.82946	-0.02732 ± 4.54984i

Была рассмотрена также задача о собственных движениях жидкости, заполняющей емкость между двумя концентрическими сферами с радиусами R_{01} , R_0 и вытекающей через заборное устройство при наличии свободной поверхности (рис.2).

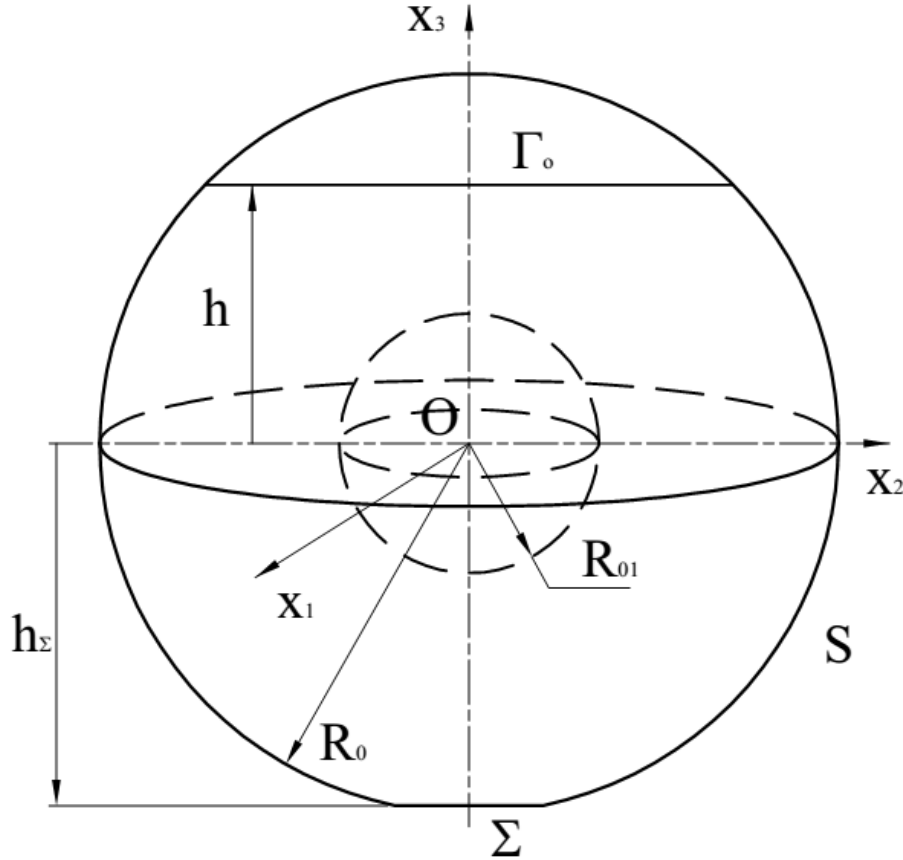


Рис.2. Основные обозначения и системы координаты.

В этом случае кубическое уравнение (17) имеет коэффициенты, определяемые формулами (18), в которых коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 \alpha_{mn}^{(1)} &= \frac{\int_{r_{01}}^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}{\int_{r_{01}}^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{1mn}^* r dr}, \quad \varepsilon_{mn}^{(1)} = \frac{-\int_{r_{01}}^{r_0} \varphi_{1mn}^* \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial h} r dr}{\int_{r_{01}}^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{1mn}^* r dr}, \quad \omega_{mn}^2 = g \frac{\int_{r_{01}}^{r_0} \varphi_{1mn}^* \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial x} r dr}{\int_{r_{01}}^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{1mn}^* r dr}, \\
 \delta_{mn}^{(1)} &= \frac{-\int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial h} r dr - \int_0^{r_0} \varphi_{1mn}^* \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial x} r dr}{\int_{r_{01}}^{r_0} \varphi_{1mn}^* \varphi_{1mn}^* r dr}, \quad \alpha_{mn}^{(2)} = \frac{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{1mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}, \\
 \varepsilon_{mn}^{(2)} &= \frac{-\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \frac{\partial \varphi_{1mn}^*}{\partial h} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}, \quad \varepsilon_m^{(2)'} = \frac{-\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial h} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr}, \quad \sigma_{mn} = \frac{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \frac{\partial \varphi_{2mn}^*}{\partial x} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \varphi_{2mn}^* \varphi_{2mn}^* r dr},
 \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$r_{01} = \begin{cases} \sqrt{R_{01}^2 - h^2} & \text{если } |h| < R_{01} \\ 0 & \text{если } |h| \geq R_{01}. \end{cases} \quad (20)$$

Результаты вычислений корней кубического уравнения (17) с коэффициентами (19) при $R_0 = 1\text{ м}$, $r_2 = 0,2\text{ м}$, $R_{01} = 0,2\text{ м}$, $m = 1$, $n = 1$, $N = 8$ для различных значений h , V_{0r} , γ приведены в таблице (3).

Таблица №3 - Собственные частоты колебаний жидкости между двумя концентрическими сферами при перераспределении жидкости из бака

$h, \text{ м}$	$V_{0r}, \text{ м/с}$	$\gamma, \text{ м/с}$	ω_{11}	Ω_1	$\Omega_{2,3}$
0.3	0	10	4.35488	-50.04955	-0.00014 ± 4.35489i
-0.1	0	10	3.80231	-44.39404	-0.00002 ± 3.80231i
0.3	0.02	10	4.35488	-61.64358	-0.02172 ± 4.35493i
0.3	0.04	20	4.35488	-123.2875	-0.04328 ± 4.35477i
0.3	0.04	40	4.35488	-223.38721	-0.04327 ± 4.35472i
0.3	0.04	60	4.35488	-323.48692	-0.04327 ± 4.35470i
0.3	0.04	80	4.35488	-423.58663	-0.04326 ± 4.35469i
0.3	0.04	100	4.35488	-523.68633	-0.04326 ± 4.35469i
0.3	0.06	40	4.35488	-234.98119	-0.06488 ± 4.35448i
-0.3	0.04	40	3.60096	-188.38302	-0.05667 ± 3.60056i
-0.2	0.04	40	3.69275	-194.97399	-0.06396 ± 3.69219i
-0.1	0.04	40	3.80231	-198.78001	-0.06306 ± 3.80180i
0.1	0.04	40	4.05741	-209.79174	-0.06289 ± 4.05689i
0.2	0.04	40	4.19797	-215.70342	-0.06043 ± 4.19750i
0.4	0.04	40	4.54960	-230.00273	-0.02620 ± 4.54945i

Заключение

В заключение можно отметить, что полученные результаты подтверждают выводы, сформулированные ранее в работах авторов [11,12,13], то есть спектр нормальных движений несжимаемой жидкости обладает двумя ветвями собственных значений: дискретного множества вещественных чисел, и дискретного множества комплексно-сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси. Случаем отрицательных вещественных корней является аperiодическая устойчивость собственных колебаний. Случай отрицательных вещественных составляющих решений является колебательная составляющая устойчивости.

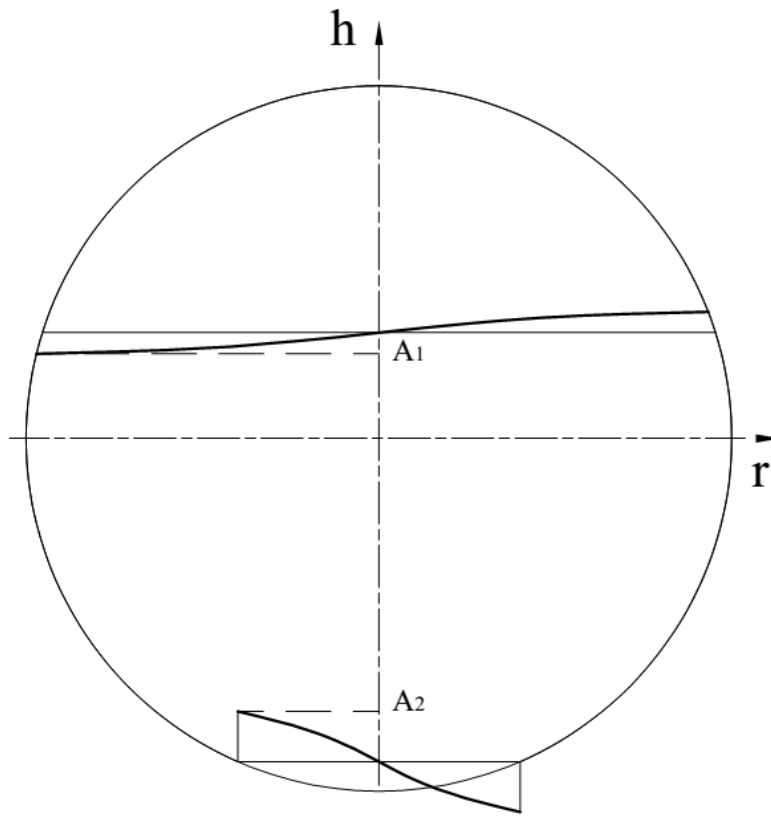


Рис.3. Форма колебаний жидкости в сферическом сосуде при $\Omega = -154.281$, $m = 1$, $n = 1$.

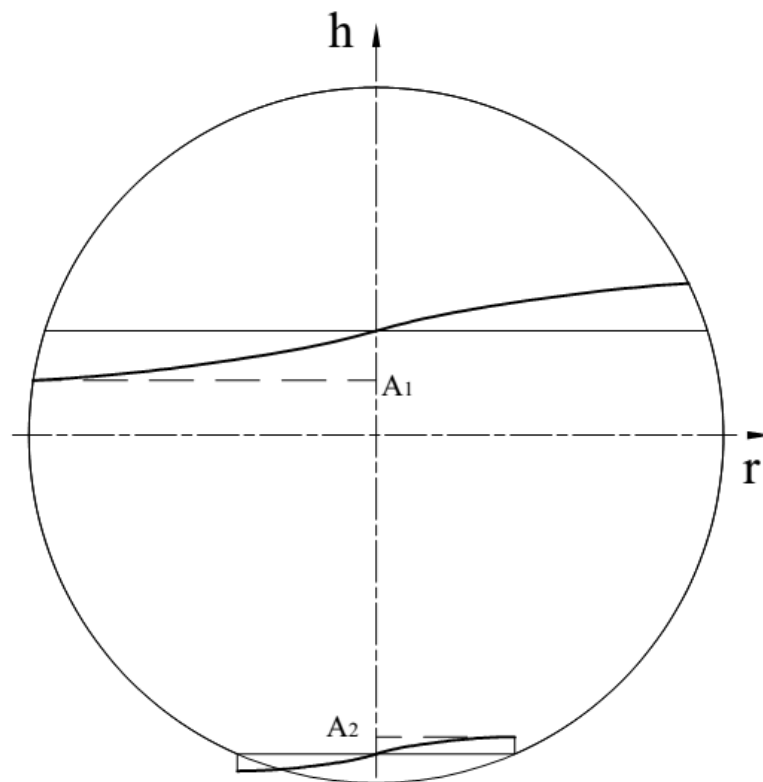


Рис.4. Форма колебаний жидкости в сферическом сосуде при $\Omega = -0.052 + 4.347i$, $m = 1$, $n = 1$.

Список литературы

1. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 500 с.
2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела. Киев: Наукова думка, 1990. 296 с.
3. Моисеев Н.Н. Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
4. Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наукова думка, 1984. 212 с.
5. Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 7. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/285.html> (дата обращения 01.11.2014).
6. Лимарченко О.С., Матараццо Д., Ясинский В.В. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. Киев: ГНОЗИС, 2002. 304 с.
7. Кириллов В.В. Исследование колебаний жидкости в неподвижном сосуде с учётом её вытекания // Труды МФТИ. 1960. Вып. 5. С. 19-25.
8. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчёта собственных частот колебаний ограниченного объёма жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 270 с.
9. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Проблемы динамики перераспределения топлива в крупногабаритных ракетно-космических объектах // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 8. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/457.html> (дата обращения 01.11.2014).
10. Орлов В.В., Темнов А.Н. Малые движения жидкости, вытекающей из бака // Современные методы теории функций и смежные проблемы: тез. докл. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. С. 124.
11. Степанова М.И., Темнов А.Н. Малые движения жидкости с поверхностной диссипацией энергии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 4. С. 99-110.
12. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Собственные колебания жидкого топлива в условиях перераспределения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. № 3. С. 31-38.
13. Дьяченко М.И., Орлов В.В., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических ёмкостях // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.. 2013. № 11. С. 175-192. DOI: [10.7463/1113.0623923](https://doi.org/10.7463/1113.0623923)

Fluid Fuel Fluctuations in the Spherical Tank

H.D. Nguyen^{1,*}, A.N. Temnov¹

*freedom_dh@yahoo.com.vn

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: small fluctuations, fluid draining surface, spherical tank

Many authors tried to solve a task concerning small fluctuations of the incompressible ideal liquid, which partially fills a stationary tank of any shape. There is a long list of references to this subject. The article presents a task solution on own fluctuations of liquid in spherical capacity, with boundary conditions on a free surface and a surface with a resistance – drain surface. Relevance of problem consists in assessment of influence of intra tank devices (measuring, in-taking, damping devices, etc.) on the liquid fuel fluctuations. The special attention is paid to finding the own values and frequencies of the equations of disturbed flow fluctuations with dissipation available on the boundary surfaces. In contrast to the previous examples, the lowering speed and the free surface area at undisturbed state are variable.

The article also considers a variation formulation of the auxiliary boundary tasks. In solution of variation tasks, the attached Legendre's functions were used as coordinate functions. Further, after substitution of the variation tasks solution in the boundary conditions and the subsequent mathematical operations the characteristic equation was obtained. To obtain solutions of the cubic characteristic equation Cardano formulas were used. The article also considers the task on the own motions of liquid filling a capacity between two concentric spheres and flowing out via the intake in case there is a free surface. Reliability of the obtained numerical results is confirmed by comparison with calculation results of frequencies resulting from solutions of a task on the own fluctuations of liquid in the spherical capacity with the constant depth of liquid. All numerical calculations were performed using the Matlab environment.

References

1. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Dynamics of missiles]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 500 p. (in Russian).

2. Lukovskiy I.A. *Vvedenie v nelineynuyu dinamiku tverdogo tela* [Introduction to nonlinear rigid body dynamics]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1990. 296 p. (in Russian).
3. Moiseev N.N., Rummyantsev V.V. *Dinamika tel s polostyami, sodержashchimi zhidkost'* [Dynamics of bodies with cavities containing liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 440 p. (in Russian).
4. Lukovskiy I.A., Barnyak M.Ya., Komarenko A.N. *Priblizhennyye metody resheniya zadach dinamiki ogranichennogo ob'ema zhidkosti* [Approximate methods for solving problems of dynamics of limited liquid volume]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1984. 212 p. (in Russian).
5. Kolesnikov K.S., Pozhalostin A.A., Shkapov P.M. Problems of Hydromechanical Systems Dynamics in Proceedings of the Zhukovsky Theoretical Mechanics Department. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, no. 7. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/285.html> , accessed 01.11.2014. (in Russian).
6. Limarchenko O.S., Mataratstso D., Yasinskiy V.V. *Dinamika vrashchayushchikhsya konstruksiy s zhidkost'yu* [Dynamics of rotating structures with liquid]. Kiev, GNOZIS Publ., 2002. 304 p. (in Russian).
7. Kirillov V.V. Study of oscillations of liquid in stationary vessel taking into account its leakage. *Trudy MFTI*, 1960, iss. 5, pp. 19-25. (in Russian).
8. Moiseev N.N., Petrov A.A. *Chislennyye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo ob'ema zhidkosti* [Numerical methods of calculation of natural frequencies of oscillations of limited volume of fluid]. Moscow, USSR Academy of Sciences Computing Center Publ., 1966. 270 p. (in Russian).
9. D'yachenko M.I., Temnov A.N. Problems of Fuel Redistribution Dynamics in Large-Sized Rocket and Space Objects. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, no. 8. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/457.html> , accessed 01.11.2014. (in Russian).
10. Orlov V.V., Temnov A.N. Small movement of the fluid flowing out of the tank. *Sovremennyye Metody Teorii Funktsiy i Smezhnyye Problemy: tez. dokladov* [Modern Methods of the Theory of Functions and Related Problems: abstracts]. Voronezh, VSU Publ., 1997, p. 124. (in Russian).
11. Stepanova M.I., Temnov A.N. Small motions of liquid with surface energy dissipation. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2011, no. 4, pp. 99-110. (in Russian).

12. D'yachenko M.I., Temnov A.N. Natural oscillations of liquid propellant under redistribution conditions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Mechanical Engineering*, 2012, no. 3, pp. 31-38. (in Russian).
13. D'yachenko M.I., Orlov V.V., Temnov A.N. A problem of propellant oscillations in cylindrical and conical tanks. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 11, pp. 175-192. DOI: [10.7463/1113.0623923](https://doi.org/10.7463/1113.0623923) (in Russian).