

УДК 624

Использование теории комбинированного трения при составлении математической модели криволинейного движения гусеничных машин

Вязников М. В.^{1,*}

[*mv1532@yandex.ru](mailto:mv1532@yandex.ru)

¹ООО «МИКОНТ», Чебоксары, Россия

В статье рассматривается вопрос уточнения аналитических зависимостей, определяющей обобщенные внешние силы сопротивления в системе дифференциальных уравнений движения. Для описания процесса взаимодействия гусеничного движителя с грунтом при криволинейном движении используется модель комбинированного трения, которое возникает, когда поверхность тела совершает одновременно вращательное и поступательное движение. На основе обобщения модели сухого трения первого порядка для круговых площадок контакта на плоское пятно контакта гусеничного движителя с грунтом прямоугольной формы, получены выражения для силы трения и момента сопротивления повороту. Для представления реальных процессов сухого трения, отличающихся от классических кулоновских, используется нелинейная зависимость. Отмечено, что по отношению к скольжению при криволинейном движении трение пока практически исчезает, и любая сколь угодно малая возмущающая сила, действующая параллельно поверхности пятна контакта, приводит к возникновению скольжения. Это позволяет объяснить физические процессы в пятне контакта при частичном или полном боковом заносе гусеничной машины.

Ключевые слова: гусеничные машины, динамика, комбинированное трение, траектория, скольжение, пятно контакта

Одной из фундаментальных проблем при математическом моделировании процесса криволинейного движения гусеничной машины является получение адекватной аналитической зависимости, определяющей обобщенные внешние силы сопротивления в системе дифференциальных уравнений движения. Существующие на сегодня подходы к решению данной проблемы представлены в работах Е.Е. Александрова, А.А. Благонравова, С.Е. Бурцева, В.В. Гуськова, В.Б. Держанского, Н.А. Забавникова, А.М. Кауфмана, В.И. Красенькова, Ф.А. Опейко и других ученых и специалистов в области гусеничных машин [1], [2]. В них представлены модели взаимодействия опорной поверхности гусеничного движителя с грунтом в пятне контакта, полученные с определенными допущениями. При выборе модели взаимодействия определяющим фактором является тип грунта – недеформи-

руемый или деформируемый. Для недеформируемого грунта процессы формирования сил сопротивления в пятне контакта на сегодня достаточно хорошо изучены и описаны эмпирическими зависимостями. Более сложными являются процессы взаимодействия для деформируемого грунта, которые в общем случае являются существенно нелинейными. Существующие на сегодня зависимости определяющие силы (моменты) сопротивления в пятне контакта не учитывают их зависимость от угловой скорости поворота гусеничной машины, что становится существенным фактором при моделировании движения на неустановившихся режимах, включая боковой занос [3]. Поэтому учет кинематических параметров вращательного движения опорной поверхности в выражениях определяющих силы (моменты) сопротивления в пятне контакта является актуальной задачей. Для ее решения необходим новый метод определения обобщенных сил при составлении математической модели криволинейного движения гусеничной машины, который рассматривается ниже.

Для гусеничных машин характерно движение со скольжением гусениц по грунту, что приводит к необходимости учитывать в общем случае буксование (юз) как для определение кинематических связей между производными обобщенных координат, так и при определении обобщенных сил, входящих в систему уравнений движений.

В частности, неголономные кинематические связи между теоретической и действительной скоростями движения гусениц в неподвижной системе координат можно выразить следующими уравнениями, в которые в явном виде входят коэффициенты буксования (юза):

$$\begin{cases} \delta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot r - V_1 \cdot \cos \gamma_1 = 0, \\ \delta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot r - V_2 \cdot \cos \gamma_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $R_1 \cdot \cos \gamma_1$ и $R_2 \cdot \cos \gamma_2$ являются проекциями линейных скоростей геометрических центров гусениц O_1 и O_2 на продольную ось машины, и определяют величины действительных линейных скоростей движения соответствующих гусениц.

Углы между векторами линейных скоростей точек O_1 и O_2 и продольной осью машины определяются системой уравнений [4]

$$\begin{cases} \gamma_1 = \arctg \frac{\dot{x}_1}{\dot{y}_1} + \psi - \frac{\pi}{2}, \\ \gamma_2 = \arctg \frac{\dot{x}_2}{\dot{y}_2} + \psi - \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Математическая модель плоскопараллельного гусеничной машины представляет собой систему дифференциальных уравнений [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{m \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot (R_1 + R_2) + \frac{\cos \psi}{m} \cdot \lambda_1 + \frac{\cos \psi}{m} \cdot \lambda_2, \\ \ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{m \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot (R_1 + R_2) + \frac{\sin \psi}{m} \cdot \lambda_1 + \frac{\sin \psi}{m} \cdot \lambda_2, \\ \ddot{\psi} = -\frac{M}{I_z} - \frac{B}{2 \cdot I_z} \cdot (R_2 - R_1) \cdot \cos \psi - \frac{(0,5 \cdot B + y_1)}{I_z} \cdot \lambda_1 + \frac{(0,5 \cdot B + y_2)}{I_z} \cdot \lambda_2, \\ \ddot{\varphi}_1 = -\frac{c_1}{I_1} \cdot (\varphi_1 - \theta_1) + \frac{1}{I_1} \cdot P_{\text{ек}1} \cdot r_{\text{ек}}, \\ \ddot{\varphi}_2 = -\frac{c_2}{I_2} \cdot (\varphi_2 - \theta_2) + \frac{1}{I_2} \cdot P_{\text{ек}2} \cdot r_{\text{ек}}, \\ \ddot{\theta}_1 = -\frac{c_1}{I_3} \cdot (\theta_1 - \varphi_1) - \frac{1}{I_3} \cdot \lambda_1 \cdot r_{\text{ек}}, \\ \ddot{\theta}_2 = -\frac{c_2}{I_4} \cdot (\theta_2 - \varphi_2) - \frac{1}{I_4} \cdot \lambda_2 \cdot r_{\text{ек}}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Необходимо рассмотреть структуру выражений, определяющих обобщенные силы, входящие в систему уравнений движения (3).

Силы сопротивления движению машины R_1 и R_2 являются суммой сил сопротивления качению R_{kj} и сил трения R_{Tj} . Результирующие указанных сил приложены в точках O_1 и O_2 - геометрических центрах гусениц.

Для моделирования процесса взаимодействия гусениц с грунтом и определения сил сопротивления вертикальная нагрузка представляется в виде сосредоточенных сил G_{ij} ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, 2$), действующих на грунт под отдельными i -ми опорными катками [3]. Оси опорных катков имеют продольную координату l_i относительно середины опорной поверхности.

Силы сопротивления рассматриваются в качестве совокупности сил сопротивления качению гусениц и трению гусениц относительно грунта:

$$R_j = R_{kj} + R_{Tj}, \quad (j = 1, 2). \quad (4)$$

Сила сопротивления качению гусениц пропорциональна нормальной нагрузке, действующей на каждый (i,j) -опорный каток

$$R_{kj} = f \cdot \sum_{i=1}^n G_{ij}, \quad (j = 1, 2) \quad (5)$$

и направлена параллельно продольной оси гусеничной машины.

При взаимодействии движителя с грунтом последний подвергается смятию, сдвигу в разных направлениях, в результате чего в грунте возникают поля нормальных и касательных напряжений. Упрощенно данную модель взаимодействия можно представить обоб-

щенной моделью трения. Силы трения гусениц относительно грунта при классической постановке задачи также пропорциональны нормальной нагрузке

$$R_{Tj} = \mu_j \cdot \sum_{i=1}^n G_{ij}, \quad (j = 1, 2), \quad (6)$$

где μ_j - коэффициент сопротивления трению гусениц относительно грунта.

Силы трения направлены в сторону, противоположную направлению векторов мгновенных скоростей движения геометрических центров гусениц V_1 и V_2 .

Полагаем, что трение между поверхностью и грунтом подчиняется закону Кулона и анизотропно при движении по деформируемому грунту. При этом коэффициент трения μ_j зависит от коэффициента буксования гусениц $\delta_{1,2}$ и определяется выражением

$$\mu_{1,2} = \mu_{\max} (1 - e^{-k\delta_{1,2}}), \quad (6)$$

где μ_{\max} - максимальный коэффициент трения-сцепления,

k - экспериментальная постоянная.

Таким образом, результирующие всех элементарных сил трения гусениц с грунтом R_{Tj} направлены под углом γ_{ij} к продольной оси машины (рис. 1).

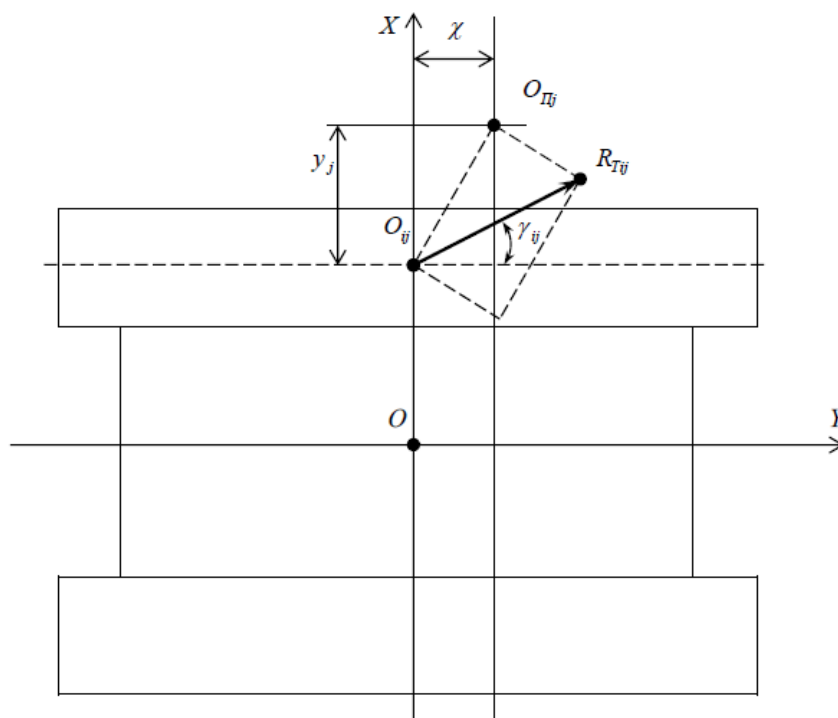


Рис. 1. Направление силы трения в пятне контакта гусеницы с грунтом

R_{Tij} - сила трения гусениц с грунтом под i -м опорным катком; O_{ij} - центр приложения вертикальной нагрузки на i -й опорный каток; γ_{ij} - угол между направлением силы трения и продольной осью машины;

O_{Pi} - полюс поворота j -й гусеницы; χ - продольное смещение полюса поворота; y_j - поперечное сечение полюса поворота.

В связи с этим представляет интерес зависимость продольной и боковой составляющих силы трения от направления равнодействующей. Прежде всего, как показал Опейко Ф.А. [1], принцип суперпозиции не сохраняется в кинематических связях с трением. Наличие скольжения свидетельствует об ограничении результирующей силы по сцеплению, поэтому увеличение боковой составляющей приводит к уменьшению продольной составляющей и изменению направления результирующей силы. То есть, имеет место обратная зависимость. При этом величина сил трения является функцией угла относительно продольной оси $R_{Tj} = f(\gamma_{ij})$ и определяется годографом трения для данного типа грунта и профиля рабочей поверхности гусениц с грунтозацепами. Замкнутая кривая, изображающая годограф трения, определяет предельное по сцеплению значение силы трения. Наличие бокового скольжения при повороте гусеничной машины свидетельствует о том, что равнодействующая сил трения достигла предела по сцеплению. При достижении предела по сцеплению сила скольжения меньше предела по сцеплению.

Возникающие при скольжении в пятне контакта элементарные силы, являются предельными по сцеплению. При мгновенном вращении опорной поверхности гусеницы скорость каждой точки направлена перпендикулярно ее расстоянию до мгновенного центра вращения. При скольжении все элементарные силы достигают максимального по сцеплению значения. Результирующая сила трения R_{Tj} может достигнуть своего предельного значения и при отсутствии момента (т.е. при прямолинейном поступательном движении). Результирующий момент появляется при возникновении плеча составляющей равнодействующей силы относительно полюса поворота.

Силы трения гусениц относительно грунта и силы сопротивления повороту формируются соответствующими проекциями элементарных сил трения в пятне контакта.

Это позволяет определять момент сопротивления повороту M в системе уравнений движения [3] в качестве совокупности моментов, создаваемых проекциями равнодействующих сил трения под каждым опорным катком относительно полюса поворота, на основании геометрических представлений. В этом случае момент сопротивления повороту равен

$$M = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \mu_j \cdot G_{ij} \cdot \sqrt{y_j^2 + (l_{ij} - \chi)^2} \cdot \sin\left(\gamma_{ij} - \arctg \frac{y_j}{l_{ij} - \chi}\right), \quad (7)$$

где y_j - поперечное смещение полюса поворота;

χ - продольное смещение полюса поворота;

γ_{ij} - угол между направлением сил трения под каждым опорным катком

$R_{Tij} = \mu_j \cdot G_{ij}$ и продольной осью машины.

Особенностью выражения (7) является характер коэффициентов трения, которые являются предельными по сцеплению. Таким образом, при повороте гусеничной машины, с увеличением угловой скорости поворота, продольная составляющая силы трения уменьшается, что является геометрическим фактором и определяется годографом трения. Но

имеет место и другой эффект, который в явном виде практически не описан в литературе по теории движения гусеничных машин. Этот эффект заключается в том, что с увеличением угловой скорости поворота коэффициент трения в пятне контакта уменьшается. Это во многом определяет особенность переходных процессов при частичном боковом заносе гусеничной машины. Для описания этого процесса целесообразно использовать современные модели трения.

Данный случай является аналогом так называемого комбинированного трения, которое возникает, когда поверхность тела совершает одновременно вращательное и поступательное движение. В этих условиях реальный закон трения имеет принципиальное отличие от классического закона Кулона.

Одна из первых попыток описать взаимосвязь трения скольжения и верчения в случае неточечного контакта движущихся тел была предпринята П. Контенсу [5]. Дальнейшие исследования в данном направлении привели к созданию Журавлевым В.Ф. комбинированной модели сухого трения первого порядка [6], основанной на прямом построении дробно-линейных аппроксимаций Паде силы и момента сопротивления трению для круговых площадок контакта. Данная модель известна также как теория Контенсу-Журавлева. Для решения задач динамики достаточно использование моделей трения на основе разложения Паде первого порядка. На основе обобщения данной модели на плоское пятно контакта гусеничного движителя с грунтом прямоугольной формы, получены следующие выражения для силы трения и момента сопротивления повороту:

$$R'_{Tj} = R_{Tj} \cdot \frac{V_j}{V_j + b \cdot \psi \cdot \sqrt{y_j^2 + (l_{ij} - \chi)^2}}, \quad (8)$$

$$M' = M \cdot \frac{\psi \cdot \sqrt{y_j^2 + (l_{ij} - \chi)^2}}{\psi \cdot \sqrt{y_j^2 + (l_{ij} - \chi)^2} + a \cdot V_j}, \quad (9)$$

$$R'_{Tj} = R_{Tj} \Big|_{\psi=0}, \quad (10)$$

$$M' = M \Big|_{V_j=0}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\psi}{R_{Tj}} \cdot \frac{\partial R'_{Tj}}{\partial V_j} \Big|_{V_j=0}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{V_j}{M'} \cdot \frac{\partial M'}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0}. \quad (13)$$

Здесь M - момент сил сопротивления трению (7), предельных по сцеплению;

R_{Tj} - сила сопротивления трению (6);

V_j - линейная скорость поступательного движения (скольжения) геометрического центра пятна контакта в неподвижной системе координат;

$\dot{\psi}$ - угловая скорость вращения относительно мгновенного полюса поворота;

$\sqrt{y_j^2 + (l_{ij} - \chi)^2}$ – радиус вращения геометрического центра пятна контакта относительно мгновенного полюса поворота;

a и b - эмпирические коэффициенты.

Отличительной чертой моделей трения (6), (7), (9),... (13) было то, что все они были построены в предположении справедливости закона Кулона в дифференциальной форме для маленького элемента площади внутри пятна контакта. Известные результаты экспериментальных исследования реальных процессов сухого трения [7], отличающихся от классических кулоновских, позволяют представить характеристику силы трения при отличной от нуля скорости скольжения нелинейной зависимостью

$$R_{Tj} = \mu_j \cdot \sum_{i=1}^n G_{ij} \cdot (\text{sign} V_j - \gamma_1 \cdot V_j + \gamma_2 \cdot V_j^3), \quad (14)$$

где γ_1 и γ_2 - эмпирические коэффициенты.

В случае комбинированной кинематики зависимость (14) может использоваться в дифференциальной форме [8]. В этом случае в представлениях для силы и момента трения возникают дополнительные полиномиальные члены. Тогда двумерная модель трения первого порядка (9) - (13) имеет вид

$$R'_{Tj} = R_{Tj} \cdot \left(\frac{V_j}{V_j + b \cdot \dot{\psi} \cdot \sqrt{y_j^2 + (l_{ij} - \chi)^2}} + 2 \cdot \pi \cdot \left((\gamma_1 \cdot V_j^3 - \gamma_2 \cdot V_j) \cdot I_1 + 2 \cdot \gamma_1 \cdot V_j \cdot \dot{\psi}^2 \cdot I_3 \right) \right),$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\dot{\psi}}{R_{Tj}} \cdot \left. \frac{\partial R'_{Tj}}{\partial V_j} \right|_{V_j=0}, \quad (15)$$

$$M' = M \cdot \left(\frac{\dot{\psi} \cdot \sqrt{y_j^2 + (l_{ij} - \chi)^2}}{\dot{\psi} \cdot \sqrt{y_j^2 + (l_{ij} - \chi)^2} + a \cdot V_j} + 2 \cdot \pi \cdot \left((2 \cdot \gamma_1 \cdot V_j^2 - \gamma_2) \cdot \dot{\psi} \cdot I_3 + \gamma_1 \cdot \dot{\psi}^3 \cdot I_5 \right) \right),$$

$$\frac{1}{b} = \frac{V_j}{M'} \cdot \left. \frac{\partial M'}{\partial \dot{\psi}} \right|_{\dot{\psi}=0}.$$

Коэффициенты полиномиальных членов этой модели представляют собой первые моменты распределения нормальных контактных напряжений в контакте [9]. Моменты первого, третьего и пятого порядка определяются следующими выражениями

$$I_1 = \int_0^1 r \sigma(r) dr, \quad (16)$$

$$I_3 = \int_0^1 r^3 \sigma(r) dr, \quad (17)$$

$$I_5 = \int_0^1 r^5 \sigma(r) dr, \quad (18)$$

где $\sigma(r)$ - распределение контактных напряжений внутри пятна контакта;

r - радиус-вектор элементарной площадки внутри пятна контакта.

Значения моментов (16) - (18) определяются законом распределения нормальных контактных напряжений в пятне контакте, который может быть представлен в аналитической форме [10] или путем аппроксимации сеточным множеством.

Количественные отличия поведения сил и моментов сопротивления трению для представленной модели, по сравнению с классическим случаем, представляют интерес для определения границ области устойчивости движения гусеничной машины. В частности, результаты численного моделирования движения быстроходных гусеничных машин массой 22 т и 16,1 т по траектории типа «змейка» в диапазоне скоростей движения 32...38 км/ч показали смещение границы устойчивости движения в область меньших скоростей на 7-10%, по сравнению с традиционным представлением сил и моментов сопротивления. Это также влияет на фазовые частотные характеристики гусеничных машин, определяя запаздывание реакции машины на управляющее воздействие по угловой скорости и курсовому углу, и ограничивая скорость по условию вписываемости в динамический коридор движения, что подтверждается результатами экспериментальных исследований [11].

Для исследования вопросов устойчивости криволинейного движения гусеничных машин представляется интерес возможная интерпретация реальных процессов трения, отличных от классических кулоновских. В частности, аналогом движения машины в режиме полного заноса является процесс трения-скольжения, при котором можно полагать, что мгновенный центр скоростей лежит внутри пятна контакта. В этом случае при любой отличной от нуля угловой скорости вращения объекта сила трения в окрестности малых скоростей скольжения ведет себя как сила вязкого трения [6]. По отношению к скольжению трение покоя практически исчезает, и любая сколь угодно малая возмущающая сила, действующая параллельно поверхности пятна контакта, приводит к возникновению скольжения. В условиях комбинированной кинематики использование классического закона Кулона не корректно. Наиболее близкое приближение к реальной ситуации дает использование двумерной модели первого порядка, которая рассмотрена выше. Отсюда также вытекает давно известный факт наличия буксования (юза) гусениц при повороте. Это объясняется в рамках комбинированной теории трения тем, что при наличии сколь угодно малого вращения, условие отсутствия скольжения в пятне контакта не может быть реализовано.

Рассмотренный выше новый метод определения сил и момента сопротивления при криволинейном движении гусеничной машины на основе комбинированной модели трения первого порядка позволяет уточнить физический смысл процессов нарушения устойчивости движения гусеничной машины. Модель комбинированного трения позволяет существенно дополнить метод оценки условий входа гусеничной машины в занос и выхода из заноса [4], полученный из условия наличия предельного множества для локального интегрального многообразия.

Конечно, представленная модель комбинированного трения упрощает реальные процессы взаимодействия гусеничного движителя с грунтом при повороте, который подвергается также сложному процессу смятия и сдвига в разных направлениях. Тем не менее, определяющим фактором данного процесса является именно скольжение гусеничного движителя относительно грунта. Оно ограничивает реализуемую силу тяги и при этом граничные условия по условиям сцепления гусениц с грунтом в пятне контакта. Интерпретация данных физических процессов, возникающих в пятне контакта, на основе теории комбинированного трения, позволяет использовать данную математическую модель в структуре алгоритма системы автоматического управления движением для решения задачи управляемости при частичном боковом заносе, что позволит в дальнейшем повысить подвижность и маневренные качества гусеничных машин.

Список литературы

1. Опейко Ф.А. Колесный и гусеничный ход. Минск: АН БССР, 1960. 228 с.
2. Красеньков В.И. Основы теории управляемости транспортных гусеничных машин. М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1977. 82 с.
3. Вязников М.В. Исследование криволинейного движения гусеничной машины // Материалы XXIV Российской школы по проблемам науки и технологий. Т. 3. Миасс: УрО РАН, 2004. С. 302-311.
4. Вязников М.В. Методы исследования устойчивости криволинейного движения гусеничной // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 12. С. 63-74. DOI: [10.7463/0113.0517531](https://doi.org/10.7463/0113.0517531)
5. Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la th'eorie de la toupie // Proc. Kreiselpobleme Gyrodynamics: IUTAM Symp. Celerina, 1962. Berlin: Springer, 1963. P. 201-216. [Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии: сб. М.: Мир, 1967. С. 60-77.]
6. Журавлёв В.Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2003. № 4. С. 81-88.
7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. М.: Наука, 1976. 306 с.
8. Киреенков А.А. Обобщенная двумерная модель трения скольжения и верчения // Доклады АН. 2010. Т. 431, № 4. С. 482-486.
9. Киреенков А.А., Семендяев С.В., Филатов В.Ф. Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 192-202.
10. Leine R. I, Glocker Ch. A Set-valued force law for spatial Coulomb–Contensou friction // European J. Mech. 2003. Vol. 22, no. 2. P. 193-216.

11. Вязников М.В. Экспериментальные исследования динамики криволинейного движения гусеничных машин // Российская школа по проблемам науки и технологий: избранные труды к 70-летию Г.П. Вяткина. М: РАН, 2005. С. 501-509.

Using the Theory of Combined Friction when Making Mathematical Models of Curvilinear Motion of Tracked Vehicles

M.V. Vyaznikov^{1,*}

[*mv1532@yandex.ru](mailto:mv1532@yandex.ru)

¹Limited Liability Company “MIKONT”, Cheboksary, Russia

Keywords: caterpillar vehicles, dynamics, combined friction, trajectory, sliding, contact patch

The paper presents study results of the nonlinear interaction processes between the supporting surface of the track Assembly and the ground in the contact patch, using the mathematical models of friction. For the case blaskapelle motion of a caterpillar, when the resultant of the elementary friction forces is limited by the coupling due to the sliding tracks on the ground, it appears that the increase of the lateral component leads to a decrease of the longitudinal component and the change of direction of the resulting force. As a result, with increasing angular velocity of the tracked vehicle a longitudinal component of the friction force decreases, which is the geometric factor and is defined by the locus of friction for a given type of soil. In the development of this well-known model is considered the general case of friction, which describes the effect of reducing the coefficient of friction in the contact patch at increasing the angular velocity of rotation. To describe this process is used the model of the combined friction which occurs when the surface of the body is doing at the same time the rotational and translational motion. The resulting expression for the resultant of forces of friction and the moment of resistance to rotation based on the decomposition of the first order Pade for a flat spot track Assembly with ground of rectangular shape. With combined friction any arbitrarily small perturbation force acting parallel to the surface of the contact spot, leads to slip. The paper considers the possibility of using the model of the combined friction to research a sustainability curvilinear motion of tracked vehicles. The proposed motion of the machine in the mode of skidding on the basis of the friction-slip. The interpretation of the physical processes occurring in the contact area, on the basis of the theory of the combined friction would allow using this mathematical model in the algorithm structure of automatic traffic control for solving the problem of controllability of partial lateral drift that will further improve the mobility and maneuverable quality of tracked vehicles.

References

1. Opeyko F.A. *Kolesnyy i gusenichnyy khod* [Wheeled and crawler movement]. Minsk, AS BSSR Publ., 1960. 228 p. (in Russian).

2. Krasnen'kov V.I. *Osnovy teorii upravlyaemosti transportnykh gusenichnykh mashin* [Fundamentals of the theory of controllability of transport tracked vehicles]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1977. 82 p. (in Russian).
3. Vyaznikov M.V. Study of curvilinear motion of tracked vehicle. In: *Materialy 24-y Rossiyskoy shkoly po problemam nauki i tekhnologii* [Proc. of the 24th Russian School on Science and Technology]. Vol. 3. Miass, Publ. of UB RAS, 2004, pp. 302-311. (in Russian).
4. Vyaznikov M.V. Methods for stability analysis of a tracklaying vehicle's curvilinear motion. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 12, pp. 63-74. DOI: [10.7463/0113.0517531](https://doi.org/10.7463/0113.0517531) (in Russian).
5. Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la th'eorie de la toupie. *Proc. Kriesselprombleme Gyrodynamics: IUTAM Symp.* Celerina, 1962. Berlin, Springer, 1963, pp. 201-216.
6. Zhuravlev V.F. Friction laws in the case of combination of slip and spin. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2003, no. 4, pp. 81-88. (English translation: *Mechanics of Solids*, 2003, vol. 38, no. 4, pp. 52-58.)
7. Panovko Ya.G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and shock]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 306 p. (in Russian).
8. Kireenkov A.A. Generalized Two-Dimensional Model of Sliding and Spinning Friction. *Doklady AN*, 2010, vol. 431, no. 4, pp. 482-486. (English translation: *Doklady Physics*, 2010, vol. 5, no. 4, pp. 186-190. DOI: [10.1134/S1028335810040087](https://doi.org/10.1134/S1028335810040087)).
9. Kireenkov A.A., Semendyaev S.V., Filatov V.F. Experimental Study of Coupled Two-Dimensional Models of Sliding and Spinning Friction. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2010, no. 6, pp. 192-202. (English translation: *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 6, pp. 921-930. DOI: [10.3103/S0025654410060142](https://doi.org/10.3103/S0025654410060142)).
10. Leine R. I, Glocker Ch. A Set-valued force law for spatial Coulomb–Contensou friction. *European J. Mech.*, 2003, vol. 22, no. 2, pp. 193-216.
11. Vyaznikov M.V. Experimental studies of the dynamics of curvilinear motion of tracked vehicles. *Rossiyskaya shkola po problemam nauki i tekhnologii: izbrannye trudy k 70-letiyu G.P. Vyatkina* [Russian School on Science and Technology: Selected works of the 70th anniversary of G.P. Vyatkin]. Moscow, RAS Publ., 2005, pp. 501-509. (in Russian).