Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Электрон. журн. 2014. № 9. С. 75–87.

DOI: 10.7463/0914.0726215

Представлена в редакцию: 26.07.2014
Исправлена: 12.09.2014

УДК 531.38

Колебания криогенной жидкости в неподвижном баке

Ай Мин Вин [1,*]

[*] ayeminwin84@gmail.com

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Актуальность работы связана с проблемой, обусловленной все более возрастающим использованием криогенных жидкостей в ракетной космической технике. Дальнейшее освоение космического пространства невозможно без создания орбитальных криогенных заправочных станций. Отличительной особенностью всех криогенных жидкостей является неоднородное распределение плотности и температуры, наблюдаемые во всех режимах хранения и эксплуатации. Подходящей моделью для исследования движений подобной механической системы является стратифицированная несжимаемая жидкость. Ранее [1-2] были исследованы задачи о движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела. В данной статье рассмотрены задачи определения собственных частот колебаний криогенной жидкости, частично заполняющий цилиндрический резервуар произвольного поперечного сечения. Предполагается, что стратификация жидкости может изменяться по произвольному закону. Для решения подобной задачи был использован метод тригонометрических рядов и метод конечных элементов. Для получения решений методом конечных элементов использовался подход Бубнова-Галёркина.

Ключевые слова: криогенная, стратифицированная, гидродинамика, цилиндрический бак, собственные чистоты и собственные формы колебания.

Введение

В течение длительного времени изучались внутренние волны, возникающие в стратифицированной жидкости, занимающей безграничный объём. Наиболее полную библиографию работ по этому вопросу можно найти в книгах [3-6]. Теоретические вопросы колебаний стратифицированной жидкости содержатся в работах [7-11]. В связи с возрастающим применением криогенной жидкости в ракетно-космической технике последнее время стали актуальны и задачи колебаний стратифицированной жидкости в ограниченном объёме. Теоретические вопросы колебаний стратифицированной жидкости в ограниченном объёме были рассмотрены в работах [12-15]. В данной работе приводится постановка задачи и результаты численного исследования колебаний стратифицированной по произвольному закону идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неподвижный цилиндрический сосуд. Актуальность проблематики обусловлена, прежде всего тем, что внутренние волновые движения пронизывают всю толщу жидкости в баке и играют в связи с этим важную роль во многих гидродинамических процессах. Чтобы численно решить подобную задачу, был использован метод тригонометрических рядов и метод конечных элементов (МКЭ).

1. Постановка задачи.

Пусть криогенная жидкость частично или полностью заполняет неподвижный цилиндрический сосуд и пусть на жидкость действует поле массовых сил, интенсивность которых равна G. Криогенную жидкость будем рассматривать как идеальную несжимаемую жидкость, стратифицированную в направлении поля массовых сил. Рассмотрим малые движения жидкости относительно невозмущенного состояния, характеризуемого полем скоростей $\vec{V}_0(x)=\vec{0}$, $x=\{x_1,x_2,z\}$, полем давлений $p_0(z)$ и полем плотности $\rho_0(z)$, $x\in\Omega$, Ω – область, занятая жидкостью. Положим $\vec{G}=-g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ – орт оси z.

Линеаризованная система уравнений гидродинамики, описывающая малые возмущения стратифицированной идеальной жидкости, в приближении Буссинеска может быть записана в виде [7]

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla p+\rho\vec{G}=0 \qquad (1)\\ &\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\rho_0=0,\quad div\vec{V}=0 \qquad (2)\end{aligned}\right\}в\ \Omega.$$

Здесь $\vec{V}(x,t),\rho(x,t),p(x,t)$ – соответственно поле скоростей, поля плотностей и давлений жидкости в возмущенном движении, ∇ – оператор Гамильтона.

Для полной постановки задачи систему уравнений (1), (2) дополним граничными и начальными условиями

$$\vec{V}\cdot\vec{v}=V_v=0 \quad (на\,S) \tag{3}$$

$$\vec{V}(x,0)=\vec{V}^0(x),\quad \rho(x,0)=\rho^0(x); \tag{4}$$

где S – смачиваемая поверхность сосуда; $\vec{v}=\{v_1,v_2,v_3\}$ – единичный вектор нормали к поверхности S; $\vec{V}^0(x),\rho^0(x)$ – начальные поля скоростей и плотностей жидкости.

В случае частичного заполнения жидкостью полости к уравнениям (1) - (4) необходимо добавить условие на свободной поверхности. При условии, что свободная поверхность Γ является поверхностью равного давления, линеаризованное граничное условие на Γ будет [7]

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0\vec{G}\cdot\vec{V}=0 \tag{5}$$

При исследовании задач гидродинамики малых движений неоднородной жидкости наряду с приближением Буссинеска используют дальнейшее приближение – двойное приближение Буссинеска [12], при котором плотность жидкости считается постоянной $\rho_0(z) = \rho_0^*$ в уравнении движения (1) и граничном условии (5). Уравнения (1) и (5), тогда перепишутся в виде

$$\rho_0^* \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla p + \rho \vec{G} = 0, \quad (в\, \Omega); \tag{6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0^* \vec{G} \cdot \vec{V} = 0, \quad (на\ \Gamma); \tag{7}$$

Отметим, что поставленная задача для стратифицированной жидкости не является единственной. Используя уравнение (1), (2) и (5) можно исключить переменные p, ρ и горизонтальные компоненты скорости $\vec{V}(x,t)$ и поставить задачу для вертикальной компоненты скорости $W(x,t)$. Полученная задача при использовании двойного приближения Буссинеска имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\Delta W] + N^2 \Delta_2 W = 0, \ (в\, \Omega); \tag{8}$$

$$\begin{gathered} W = 0, (z = 0); \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = g\Delta_2 W, \ (z = H); \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0, (x \in S); \quad W(x,0) = W^0(x); \quad \dot{W}(x,0) = W_1^0(x); \end{gathered} \tag{9}$$

где $\Delta = \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_1^2}, \Delta_2 = \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2}$.

В уравнение (8) величина N называется частотой Брента-Вяйсяля [3], или частотой плавучести [13].

$$N^2 = -g\beta(z); \ \beta(z) = \frac{1}{\rho_0^*}\frac{d\rho_0}{dz}.$$

Уравнение (8) имеет примечательную особенность. Структура этого уравнения не зависит от закона распределения плотности.

В работе [12] было доказано, что соответствующая (8),(9) спектральная задача о волновых движениях стратифицированной жидкости, частично заполняющей ограниченный объём, имеет два спектра колебаний: дискретный $(\omega > N)$, отвечающий поверхностным волнам, и точечный, состоящий из чисел, образующих плотное множество на отрезке $(0.0 - N)$ и отвечающий внутренним волнам $(\omega < N)$.

Численные результаты решения задачи о колебаниях стратифицированной жидкости в ограниченном объеме были получены в статье [14] для законов изменения плотности, приводящих дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Ниже рассматривается результаты численного решения подобной задачи для законов изменения плотности, которые приводят к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами.

2. Определение собственных частот для произвольного закона распределения плотности

Метод тригонометрических рядов. Рассмотрим сначала решение задач в случае, отсутствия свободной поверхности жидкости, заполняющей цилиндр высотой H и произвольного поперечного сечения. Рассматриваемая область Ω позволяет отделить в уравнении (8) переменную $V(z)$

$$W(x_1, x_2, z, t) = u(x_1, x_2)V(z)e^{i\omega t}. \qquad (10)$$

Тогда для $u(x_1, x_2)$ приходим к вспомогательной задаче

$$\Delta_2 u + \xi_n^2 u = 0, (x \in \Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, (x \in S); \qquad (11)$$

Можно показать [12], что нетривиальным решениям задачи (11) отвечает дискретный положительный спектр $\left\{\xi_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$. Числа ξ_n, в случае круглого поперечного сечения определяются формулой $\xi_n = k_n r_0$, r_0 - радиус цилиндра, и могут быть найдены из уравнения

$$\frac{dJ_m(kr)}{dr} = 0; \quad r = r_0.$$

где k_n - константа разделения переменных , $J_m(kr)$ - функция Бесселя первого рода m -го порядка, далее принято $m = 1$.

После разделения переменных в уравнении (8), приходим к задаче для определения функции $V(z)$

$$\begin{gathered}\omega^2 \rho_0(z) \frac{d^2 V}{dz^2} + k_n^2 g \frac{d\rho_0(z)}{d\,z} V(z) - k_n^2 \omega^2 \rho_0(z) V(z) = 0; \\ V = 0; \quad z = 0; \quad z = H;\end{gathered} \qquad (12)$$

где $V(z)$ – амплитудная функция вертикальной компоненты скорости.

Получим решение задачи (12) в приближении Буссинеска с помощью тригонометрических рядов. Для этого представим функции $V(z)$ и $\rho_0(z), d\rho_0(z)/d\,z$ в следующем виде

$$V(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \sin\frac{l\pi}{H} z; \quad \rho_0(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l cos\frac{l\pi}{H} z; \quad \rho_0'(z) = d\rho_0(z)/d\,z = \sum_{l=0}^{\infty} a_l cos\frac{l\pi}{H} z; \qquad (13)$$

где c_l - амплитудные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставив представление (13) в уравнении (12), после умножения рядов Фурье [16], получим однородную систему линейных уравнений

$$-\omega^2 \frac{l\pi}{H}\sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{m\pi}{H}\left(b_{l-m}+b_{l+m}\right)+k_n^2 g\sum_{m=1}^{\infty} c_m\left(a_{l-m}-a_{l+m}\right)-k_n^2\omega^2\sum_{l=1}^{\infty} c_m\left(b_{l-m}-b_{l+m}\right)=0; \quad (14)$$

или в сокращенной записи

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m A_{l\,m}=0; \quad l=1,2,3...;$$

где

$$A_{l\,m}=-\omega^2\left[\frac{m\pi}{H}\left(b_{l-m}+b_{l+m}\right)+\frac{H}{l\pi}k_n^2\left(b_{l-m}-b_{l+m}\right)\right]+k_n^2 g\frac{H}{l\pi}\left(a_{l-m}-a_{l+m}\right);$$

$$b_{l-m}=\int_0^H \rho_0(z)\cos\frac{l-m}{H}\pi z dz; \quad b_{l+m}=\int_0^H \rho_0(z)\cos\frac{l+m}{H}\pi z dz;$$

$$a_{l-m}=\int_0^H \rho_0'(z)\cos\frac{l-m}{H}\pi z dz; \quad a_{l+m}=\int_0^H \rho_0'(z)\cos\frac{l+m}{H}\pi z dz;$$

В таблице 1 приведены результаты расчётов квадратов собственных частот $\bar{\omega}_{nl}^2$ для некоторых законов изменения плотности. Для сравнения в таблице 1 приведены также значения квадратов собственных частот в случае экспоненциального распределения плотности, полученные по точной формуле:

$$\bar{\omega}_{n\,l}^2=\frac{\xi_n^2\bar{\beta}_0}{\xi_n^2+\frac{l^2\pi^2}{\bar{H}^2}+\bar{\beta}_0^2/4}; \quad (15)$$

где $\bar{\beta}_0=0.1,\ n=1,\ \xi_1=1.84,\ \bar{H}=1,\ l=1,2...5;$

$\bar{\beta}_0=\beta_0 r_0; \quad \bar{H}=\frac{H}{r_0}; \quad \bar{\omega}_{nl}^2=\omega_{nl}^2\cdot\frac{r_0}{g};$

Таблица 1.

l	**Результат по формуле (15)**	**Численное решение по закону изменения плотности**		
		$\rho_0=\rho_0^* e^{-\beta_0 z}$	$\rho_0=\rho_0^*\left(1-\beta_0 z\right)$	$\rho_0=\rho_0^*\left(1-\beta_0 z^2\right)$
1	0.0255368	0.0255368	0.0269056	0.0282841
2	0.0078980	0.0078979	0.0078319	0.0079655
3	0.0036714	0.0036714	0.0038674	0.0035855
4	0.0020989	0.0020989	0.0022109	0.0019024
5	0.0013535	0.0013534	0.0014235	0.0007456

Метод конечных элементов для определения форм и частот собственных колебаний жидкости в круговом неподвижном цилиндрическом баке со свободной поверхности.

1) постановка задачи

Рассмотрим реализацию метода конечных элементов на примере задачи о собственных колебаниях жидкости со свободной поверхностью в неподвижном цилиндрическом баке.

В этом случае, исследуемую задачу (12) запишем в виде

$$\omega^2\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)+k_n^2V(z)\big(g\beta(z)-\omega^2\big)=0;$$
$$V=0;\quad z=0; \tag{16}$$
$$\frac{dV}{dz}-\frac{gk_n^2}{\omega^2}V(z)=0,\quad z=H;$$

Согласно методу Бубнова-Галёркина в задаче (16) заменим исходную функцию $V(z)$ аппроксимирующей функцией $U_m(z)$

$$V=U_m(z)=\sum U_k\varphi_k^m(z),$$

где U_k – узловые перемещения, а $U_m(z)$ – функция перемещения на элементе, $\varphi_k^m(z)$ - функция формы.

Затем помножим полученное выражение поочерёдно на функцию формы $\varphi_k^m(z)$ и проинтегрируем по безразмерной длине h каждого элемента, учитывая граничные условия. В результате получим интегральное соотношение для каждого элемента, кроме элемента, примыкающего к свободной поверхности.

$$-\bar{\omega}^2\int_0^h\left(\frac{dU_m}{dz}\frac{d\varphi_k^m}{dz}+\xi^2U_m\varphi_k^m\right)d\bar{z}+\xi^2\int_0^h\bar{\beta}(\bar{z})U_m\varphi_k^m d\bar{z}=0 \tag{17}$$

В формуле (17) функции формы имеют вид:

$$\varphi_k^m=1-\frac{z_m}{h};\quad \varphi_{k+1}^m=\frac{z_m}{h};$$
$$m=0,1,2,...;\quad k=1,2,...;$$

После взятия интегралов образуем локальные матрицы жесткости и масс:

$$[K_e]=[K_{e+1}]=\begin{bmatrix}\xi^2\bar{\beta}_0\dfrac{h}{3} & \xi^2\bar{\beta}_0\dfrac{h}{6}\\ \xi^2\bar{\beta}_0\dfrac{h}{6} & \xi^2\bar{\beta}_0\dfrac{h}{3}\end{bmatrix},$$

$$[M_e]=[M_{e+1}]=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{h}+\xi^2\dfrac{h}{3} & -\dfrac{1}{h}+\xi^2\dfrac{h}{6}\\ -\dfrac{1}{h}+\xi^2\dfrac{h}{6} & \dfrac{1}{h}+\xi^2\dfrac{h}{3}\end{bmatrix}.$$

Затем составляем глобальные матрицы [K] и [M], которые в случае разбиения всей высоты $\bar{H}$ на три элемента длиной h имеют вид

$$[K]=\begin{bmatrix} \xi^2\beta_0\frac{h}{3} & \xi^2\beta_0\frac{h}{6} & 0 & 0 \\ \xi^2\beta_0\frac{h}{6} & \xi^2\beta_0\frac{h}{3}+\xi^2\beta_0\frac{h}{3} & \xi^2\beta_0\frac{h}{6} & 0 \\ 0 & \xi^2\beta_0\frac{h}{6} & \xi^2\beta_0\frac{2h}{3} & \xi^2\beta_0\frac{h}{6} \\ 0 & 0 & \xi^2\beta_0\frac{h}{6} & \xi^2\beta_0\frac{h}{3}-\xi^2 \end{bmatrix},$$

$$[M]=\begin{bmatrix} \frac{1}{h}+\xi^2\frac{h}{3} & -\left(\frac{1}{h}-\xi^2\frac{h}{6}\right) & 0 & 0 \\ -\left(\frac{1}{h}-\xi^2\frac{h}{6}\right) & \frac{2}{h}+\xi^2\frac{h}{3}+\xi^2\frac{h}{3} & -\left(\frac{1}{h}-\xi^2\frac{h}{6}\right) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{h}-\xi^2\frac{h}{6}\right) & \frac{2}{h}+\xi^2\frac{h}{3}+\xi^2\frac{h}{3} & -\left(\frac{1}{h}-\xi^2\frac{h}{6}\right) \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{h}-\xi^2\frac{h}{6}\right) & \frac{1}{h}+\xi^2\frac{h}{3} \end{bmatrix}.$$

В результате получаем задачу на собственные значения

$$-\lambda[M]\{U\}+[K]\{U\}=0,$$

где $\{U\}=\{U_1,U_2,U_3,...,U_k,...\}^T$, $\lambda=\omega^2$.

Аналитические выражения для определения собственных чисел $\lambda_{nl}=\bar{\omega}_{nl}^2$, в случае изменения плотности $\rho_0=\rho_0^*(1+\beta_0 z)$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\tan\left(\bar{\mu}\bar{H}\right)=\frac{\bar{\mu}\bar{\beta}_0}{\bar{\mu}^2+\xi_n^2}; \quad \omega^2\le N_0^2; \\ &\bar{\omega}_{nl}^2=\frac{\xi_n^2\bar{\beta}_0}{\bar{\mu}^2+\xi_n^2}; \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где $\xi_n^2=3.39,\ \bar{N}_0^2=\bar{\beta}_0=0.1,$

Результаты расчётов собственных частот для некоторых законов изменения квадрата частоты плавучести β_0 представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Результат из формул (18)	**Численное решение**			
	$\rho_0=\rho_0^*e^{-\beta_0 z}$, $\beta_0=0.1$;			
	N=10	**N=50**	**N=100**	**N=500**
1.791870	1.8416782	1.8401665	1.8395678	1.8390347
0.02528270	0.02472216	0.02489052	0.02489671	0.02489970
0.00787416	0.00755148	0.00781786	0.00782524	0.00782767
0.00366849	0.00335844	0.00364718	0.00365525	0.00365780
0.00209909	0.00179909	0.00208444	0.00209282	0.00209545
0.00135423	0.00107313	0.00134145	0.00134996	0.00135264
0.00094457	0.00069253	0.00093245	0.00094104	0.00094373
0.00069581	0.00048497	0.00068398	0.00069259	0.00069531

где N – число узлов.

Когда функции квадратов частоты плавучести имеют вид $\beta(z)=\dfrac{\beta_0}{1-\beta_0 z}$ и $\beta(z)=A_0+A_1\cos(\alpha\pi z)$, получим следующие результаты расчётов собственных частот, приведенные в таблицах 3 и 4.

Таблица 3.

Численное решение			
$\rho_0=\rho_0^*(1-\beta_0 z)$, $\beta(z)=\dfrac{\beta_0}{1-\beta_0 z}$;			
N=10	**N=50**	**N=100**	**N=500**
1.8413939	1.8401125	1.8395410	1.8390294
0.02485686	0.02491528	0.02490896	0.02490213
0.00759337	0.00782577	0.00782915	0.00782845
0.00337717	0.00365088	0.00365709	0.00365816
0.00180915	0.00208657	0.00209387	0.00209566
0.00107914	0.00134282	0.00135065	0.00135277
0.00069641	0.00093349	0.00094151	0.00094383
0.00048769	0.00068468	0.00069294	0.00069538

Таблица 4.

Численное решение			
$\rho_0=\rho_0^* e^{-(A_0 z+\frac{A_1}{\alpha\pi}\sin(\alpha\pi z))}$, $\beta(z)=A_0+A_1\cos(\alpha\pi z)$; $A_0=0.2,\ A_1=-0.1,\ \alpha=0.5$;			
N=10	**N=50**	**N=100**	**N=500**
1.8414086	1.8401574	1.8395656	1.8390247
0.02484441	0.02489467	0.02489773	0.02489974
0.00758974	0.00781919	0.00782556	0.00782768
0.00337574	0.00364780	0.00365540	0.00365781
0.00180854	0.00208480	0.00209291	0.00209545
0.00107892	0.00134168	0.00135002	0.00135264
0.00069639	0.00093261	0.00094108	0.00094374
0.00048778	0.00068410	0.00069262	0.00069531

Заключение

В статье рассмотрены приближенные методы определения собственных частот колебаний криогенной жидкости, стратификация которой изменяется по произвольному закону. Для решения подобной задачи были использованы метод тригонометрических рядов и метод конечных элементов. Достоверность полученных численных результатов подтверждается совпадением с результатом вычисления частот по аналитическим формулам, получаемых из решений дифференциальных уравнений с постоянной частотой плавучести.

Пользуясь случаем, автор благодарит к.ф.-м.н. А. Н. Темнова за помощь при написании статьи и внимание к работе.

Список литературы

1. Ай Мин Вин, Темнов А.Н. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 7. С. 86-101. Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/291.html (дата обращения 01.08.2014).
2. Ай Мин Вин, Темнов А.Н. О движении твёрдого тела с криогенной жидкостью // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 12. С. 255-276. DOI: 10.7463/1213.0627898
3. Краусс В. Внутренние волны: пер. с нем. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 272 с.
4. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с. [Terner J.S. Buoyancy effects in fluids. Cambridge: University Press, 1973.].
5. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
6. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. М.: Наука, 2005. 195 с.
7. Каменкович В.М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 240 с.
8. Задорожный А.И. Исследование влияния вязкости на поверхности и внутренние гравитационные волны в океане: дис. … канд. техн. наук. Ростов-на-Дону, РТУ, 1980. 185 с.
9. Габов С.А., Свешников А.Г. О некоторых задачах, связанных с колебаниями стратифицированных жидкостей // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. С. 1150-1156.
10. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. 344 с.
11. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Определение собственных частот внутренних волн в существенно неоднородной жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1997. Т. 33, № 6. С. 112-119.
12. Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме: дис… канд. физ.-мат. наук. М., 1984. 192 с.
13. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Колебания идеальной стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при переменной частоте плавучести // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. С. 1784-1796.
14. Темнов А.Н. Колебания идеальной стратифицированной жидкости в неподвижном сосуде // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. № 6. С. 98-106.

15. Копачевский Н.Д., Цветков Д.О. Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29. С. 103-130.
16. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 381 с.

.

Science&Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 9, pp. 75–87.

DOI: **10.7463/0914.0726215**

Received: 26.07.2014
Revised: 12.09.2014

Cryogenic Liquid Fluctuations in a Motionless Tank

Ai Min Vin[1,*]

[*]ayeminwin84@gmail.com

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: hydrodynamics, cryogenic, stratified fluid, cylindrical tank, the eigenvalues and waveforms

The article considers approximate numerical methods to determine own frequencies of cryogenic liquid fluctuations stratification of which changes under any law. The increasing use of cryogenic liquids, liquefied gas, superfluid solutions, and slush liquids in modern mechanical engineering define relevance of a perspective. Interest in the considered problem is also caused by the fact that in cryogenic liquid along with superficial waves there can be internal wave movements penetrating all thickness of liquid in a tank and therefore playing important role in many hydro-dynamic processes.

This article considers problems of determining the own frequencies of cryogenic liquid fluctuations, partially filling cylindrical tank of any cross section. It is supposed that the change of the liquid particles density due to thermal stratification of entire liquid mass can proceed continuously under any law. To solve numerically a similar problem, a method of trigonometric series (MTS) and a method of final elements (MFE) were used. When using the MTS method the unknown solution and variable coefficients of the equation were presented in the form of trigonometric series. Further, after multiplication of series and the subsequent mathematical operations the frequency equation was obtained. Bubnov-Galyorkin's approach was used to obtain solutions by the MFE method. Reliability of received numerical results is confirmed by coincidence with frequency results calculated by analytical formulas of solutions of differential equations with constant frequency of buoyancy.

References

1. Ai Min Vin, Temnov A.N. On the Motion of Stratified Liquid in the Cavity of Movable Solid. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, no. 7. Available at: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/291.html , accessed 01.08.2014. (in Russian).

2. Ai Min Vin, Temnov A.N. On motion of a solid body with a cryogenic liquid. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 12, pp. 255-276. DOI: 10.7463/1213.0627898 (in Russian).
3. Krauss V. *Vnutrennie volny* [Internal waves].Transl. from German. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1968. 272 p. (in Russian).
4. Terner J.S. *Buoyancy effects in fluids*. Sambridge, University Press, 1973. (Russ. ed.: Terner J.S. *Effekty plavuchesti v zhidkostiakh*. Moscow, Mir Publ., 1977. 431 p.).
5. Miropol'skii Iu.Z. *Dinamika vnutrennikh gravitatsionnykh voln v okeane* [Dynamics of internal gravitational waves at the ocean]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1981. 302 p. (in Russian).
6. Bulatov V.V., Vladimirov Iu.V. *Vnutrennie gravitatsionnye volny v neodnorodnykh sredakh* [Internal gravitational waves in non-uniform environments]. Moscow, Nauka Publ., 2005. 195 p. (in Russian).
7. Kamenkovich V.M. *Osnovy dinamiki okeana* [Bases of ocean dynamics]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1973. 240 p. (in Russian).
8. Zadorozhnyi A.I. *Issledovanie vliianiia viazkosti na poverkhnosti i vnutrennie gravitatsionnye volny v okeane. Kand. diss*. [Research of influence of viscosity on surfaces and internal gravitational waves at the ocean. Cand. diss.]. Rostov-on-Don, RTU, 1980. 185 s. (in Russian).
9. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. About some tasks connected with fluctuations of stratified liquids. *Differentsial'nye uravneniia*, 1982, vol. 18, pp. 1150-1156. (in Russian).
10. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. *Lineinye zadachi nestatsionarnykh vnutrennikh voln* [Linear problems of non-stationary internal waves]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 344 p. (in Russian).
11. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Determination of natural frequencies of internal waves in significantly inhomogeneous liquid. *Izvestiia RAN. Fizika atmosfery i okeana*, 1997, vol. 33, no. 6, pp. 112-119. (in Russian).
12. Temnov A.N. *Kolebaniia stratifitsirovannoi zhidkosti v ogranichennom ob"eme. Kand. diss*. [Oscillations of a stratified limited liquid volume. Cand. diss.]. Moscow, 1984. 192 p. (in Russian).
13. Kopachevskii N.D., Temnov A.N. Oscillations of ideal stratified fluid in cylindrical basin with a variable frequency of buoyancy. *Differentsial'nye uravneniia*, 1988, vol. 24, pp. 1784-1796. (in Russian).
14. Temnov A.N. Oscillations of ideal stratified fluid in motionless vessel. *Izvestiia AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1983, no. 6, pp. 98-106. (in Russian).

15. Kopachevskii N.D., Tsvetkov D.O. Oscillations of stratified fluids. *Sovremennaia matematika. Fundamental'nye napravleniia*, 2008, vol. 29, pp. 103-130. (English translation: *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, iss. 4, pp. 574-602. DOI: 10.1007/s10958-010-9764-9).
16. Tolstov G.P. *Riady Fur'e* [Fourier's ranks]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 381 p. (in Russian).