НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Исследование свойств оценки коэффициента ускорения по результатам испытаний с переменной нагрузкой методом Монте-Карло

07, июль 2014

DOI: 10.7463/0714.0718295

Тянникова Н. Д.[1,a], **Тимонин В. И.**[1]

УДК 519.248

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[a]tiannikova@yandex.ru

В теории форсированных испытаний широко применяются испытания в переменном режиме. Они предназначены для определения одинаковых для любых партии однотипных изделий функции пересчёта результатов форсированных испытаний на нормальный режим. В большинстве случаев пересчёт осуществляется с помощью линейной функции. В работе рассматривается метод проведения предварительных исследований, не требующий испытаний в постоянном режиме и, кроме того, испытания в переменном режиме проводятся до отказа лишь части изделий. Для анализа результатов таких испытаний используется предложенный авторами критерий однородности двух выборок типа Реньи.

В настоящей работе методом Монте-Карло исследуются статистические свойства оценки коэффициента ускорения, получаемой минимизацией статистики типа Реньи. Показано, что при увеличении объёма выборки оценка сходится к действительному значению коэффициента ускорения. Для небольших объёмов выборки наблюдается эффект положительного систематического смещения оценки коэффициента ускорения. Для устранения этого эффекта рассчитаны поправочные коэффициенты в случае экспоненциального распределения и распределения Вейбулла.

Ключевые слова: форсированные испытания, статистики типа Реньи, испытания в переменных режимах, непараметрическая статистика, оценки Каплана-Мейера, коэффициент ускорения

Введение

В теории форсированных испытаний испытания с переменной нагрузкой применяются для оценки инвариантной (одинаковой для всех партий) функций пересчёта наработок до отказа в форсированном режиме на нормальный режим [1,2,3,4]. В дальнейшем будем считать, что пересчёт осуществляется с помощью линейной функции $\xi_0 = k \cdot \xi_*$, где ξ_0 – наработка изделия в нормальном режиме, ξ_* – в форсированном режиме, k – коэффициент ускорения испытаний [5,6,7,8]. Ранее в работах [9,10] для оценки параметра k испытания проводились как в переменном $\tilde{\varepsilon}(t)$, так и в постоянном нормальном ε_0 режимах. В работах [11,12] был предложен новый метод проведения и обработки результатов предварительных исследований, который позволял определять функции пересчета только по испытаниям в переменном режиме, что значительно сокращает время на их проведение. Он был основан на применении новой статистики типа Колмогорова – Смирнова. Однако использование этой статистики требовало проводить испытания в переменном режиме до тех пор, пока не откажут все изделия. Это не всегда является возможным. В работе [13] для частного случая была доказана возможность оценивать коэффициент ускорения, не испытывая все изделия до отказа. Оценка основывалась на минимизации статистики критерия типа Реньи. В данной работе обобщен результат работы [13]. Оценка коэффициента ускорения, предложенная в работе, основана также на минимизации статистики критерия типа Реньи. Методами статистического моделирования показано, что она является состоятельной. Для устранения систематического смешения оценки при небольших объёмах выборок рассчитаны поправочные коэффициенты.

Постановка задачи

Рассмотрим сначала общую постановку задачи. Предположим, что наработки изделия связаны соотношением

$$H_0 : \xi_0 = k \cdot \xi_* \tag{1}$$

Пусть $F_0(t) = 1 - P_0(t)$ − функция распределения наработок до отказа в нормальном режиме.

В работе [14] для проверки гипотезы (1) была предложена статистика типа Реньи, позволяющая проверять (1) по цензурированным данным. Для того, чтобы описать метод оценки неизвестного k, введем следующие обозначения.

Изделия в количестве $N = mn$, разбитые случайным образом на n групп по m элементов в каждой, начинают испытываться в режиме ε_0, и при первом отказе одного из m изделий каждой группы оставшиеся $m-1$ изделия переключаются в режим ε_*.

Обозначим $\xi_1^i, \xi_2^i, ..., \xi_m^i$ – гипотетические наработки до отказа в ε_0 изделий i-ой группы, θ_0^i – наработка до отказа i-ой группы в режиме ε_0, $\theta_{*1}^i, ..., \theta_{*(m-1)}^i$ – наработки до отказа изделий i-ой группы в режиме ε_*. Тогда, очевидно, $\theta_0^i = \min\{\xi_1^i, ..., \xi_m^i\}$. Как доказано в [12], при соблюдении некоторых слабых ограничений на распределение наработок ξ_*^i, гипотеза (1) эквивалентна статистической гипотезе о том, что выборка θ_0^i, $\eta_1^i = \theta_0^i + k\theta_{*1}^i$, $\ldots, \eta_{(m-1)}^i = \theta_0^i + k\theta_{*(m-1)}^i$, $i = \overline{1,n}$ извлечена из той же совокупности, что и выборка $\xi_1^i, \xi_2^i, ..., \xi_m^i$ с функцией распределения $F_0(t)$. Назовем η_j^i прогнозными наработками j-го изделия i-й группы в нормальном режиме, $j = \overline{1, m-1}$.

Обозначим через $Q=\left(\theta_0^1,\eta_1^1,...,\eta_{(m-1)}^1,...,\theta_0^n,\eta_1^n,...,\eta_{(m-1)}^n\right)$ объединенную выборку из всех реальных и прогнозных наработок изделий. Пусть $\Theta=\left(\theta_0^1,...,\theta_0^n\right)$ – выборка из наработок изделий до первого отказа каждой группы. Её можно рассматривать как прогрессивно цензурированную выборку [15] из совокупности с $F_0(t)$. Тогда, при справедливости (1) можно оценить функцию надежности $P_0(t)$ по выборкам Q и Θ согласно следующим формулам [16]:

$$\widehat{P}_\theta(t)=\begin{cases}1,\ d_1(t)=0,\\ \prod_{i=1}^{d_1(t)}\left(1-\dfrac{1}{m(n-i+1)}\right),\ 1\le d_1(t)\le(n-1),\\ 0,\ d_1(t)=n,\end{cases}$$

$$\widehat{P}_q(t)=1-\frac{d_2(t)}{mn},$$

где $d_1(t)$, $d_2(t)$ – количество элементов выборок Θ и Q, меньших t. Оценка $\widehat{P}_\theta(t)$ называется оценкой Каплана-Мейера функции $P_0(t)$ по цензурированным данным [16]. Очевидно, что $d_1(t)\le d_2(t)$.

Пусть теперь испытания проводят до тех пор, пока не откажут M изделий. Потребуем, чтобы $M>n$. Обозначим $\mu={M}/{mn}$ – глубина цензурирования испытаний, T – продолжительность испытаний (она является случайной величиной). Пусть r – количество отказов $\theta_0^1<\theta_0^2<...<\theta_0^r<T$ в нормальном режиме ε_0, $r\le n$, ν – количество прогнозируемых наработок до отказа $\eta_j^i=\theta_0^i+k\theta_{*j}^i$, для которых $\eta_j^i<T,\ j=\overline{1,m-1},i=\overline{1,r}$.

Для проверки справедливости (1) в работе [14] предлагалась статистика типа Реньи, которая имеет вид

$$R_\lambda=m\sqrt{\frac{n(1-\lambda)}{\lambda}}\max_{\psi(\widehat{P}_q)>1-\lambda}\frac{\left|\widehat{P}_\theta-\widehat{P}_q\right|}{\widehat{P}_q}=m\sqrt{\frac{n(1-\lambda)}{\lambda}}\max_{\psi(\widehat{P}_q)>1-\lambda}S\,(\widehat{P}_q,\widehat{P}_\theta),\qquad(2)$$

где $\psi(x)=\dfrac{x^m}{1-m\,x^{m-1}(1-x)}$, $\lambda=\dfrac{r+\nu}{m\,n}$, $\lambda\le\mu$.

В данной статье рассматривается обратная задача. Пусть значение коэффициента ускорения k неизвестно. В качестве оценки предлагается значение $\widehat{k}$, которое минимизирует значение статистики (2), $\widehat{k}=\arg\min R_\lambda$. Предварительно уточним, что при изменении k меняется количество прогнозируемых наработок до отказа ν, что приводит к изменению как значения λ в (2), так и области $\psi(\widehat{P}_q)<1-\lambda$, по которой вычисляется статистика (2).

Исследование статистических свойств оценки коэффициента ускорения методом Монте-Карло

Моделирование проводится следующим образом.

1. Моделируются nm одинаково распределенных случайных величин $(\xi_1, ..., \xi_{mn})$ с функцией распределения $F_0(t)$. В качестве $F_0(t)$ рассматривались следующие функции распределения: экспоненциальная (с параметром $\beta = 0.001$) и Вейбулла (с параметрами $\beta = 0.001,\ p = 1.5$). Величины $(\xi_1, ..., \xi_{mn})$ в дальнейшем будем также называть наработками.

2. Наработки $(\xi_1, ..., \xi_{mn})$ случайным образом разбиваются на n групп по m величин в каждой. Элементы i-й группы обозначим $(\xi_1^i, ..., \xi_m^i), i = \overline{1, n}$. Определяются $\theta_i = \min(\xi_1^i, ..., \xi_m^i)$, а $\eta_1^i, ..., \eta_{(m-1)}^i$ – оставшиеся величины.

3. Задается коэффициент ускорения k и вычисляются величины

$$\gamma_1^i = \theta_i + \frac{(\eta_1^i - \theta_i)}{k}, ..., \gamma_{(m-1)}^i = \theta_i + \frac{(\eta_{(m-1)}^i - \theta_i)}{k}$$

— наработки изделий i - ой группы, отказавшие в форсированном режиме.

4. Расположим все наработки $\theta_i, \gamma_j^i, i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m-1}$ в порядке возрастания и в качестве продолжительности испытаний возьмем $\mu \cdot 100\%$ порядковую статистику данного вариационного ряда, обозначим её за T. Определим r – количество отказов $\theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_r < T$ в нормальном режиме ε_0, $r \le n$.

5. Для некоторого значения $\tilde{k},\quad 1 \le \tilde{k} \le K$ определяются

$$\tilde{\gamma}_1^i = \theta_i + \tilde{k}\frac{(\eta_1^i - \theta_i)}{k}, ..., \tilde{\gamma}_{(m-1)}^i = \theta_i + \tilde{k}\frac{(\eta_{(m-1)}^i - \theta_i)}{k},\ i = \overline{1, r}.$$

Находится $\tilde{\nu}$ – количество прогнозируемых наработок до отказа, для которых справедливо неравенство $\tilde{\gamma}_j^i < T,\ j = \overline{1, m-1}$. Вычисляется текущая глубина цензурирования $\tilde{\lambda} = \frac{r + \tilde{\nu}}{mn}$ и оценка функции надежности $\widehat{P}_q = 1 - \frac{\tilde{\nu} + r}{mn} = 1 - \tilde{\lambda}$.

Для минимизации статистики (2) рассмотрим область $\psi(\widehat{P}_q) > 1 - \lambda$. Так как функция $\Psi(\widehat{P}_q) = \frac{\widehat{P}_q^m}{1 - m\widehat{P}_q^{m-1}(1 - \widehat{P}_q)}$ возрастает по $\widehat{P}_q$ (легко показать прямым дифференцированием), получаем, что

$$\frac{\widehat{P}_q^m}{1 - m\widehat{P}_q^{m-1}(1 - \widehat{P}_q)} > \frac{(1 - \tilde{\lambda})^m}{1 - m(1 - \tilde{\lambda})^{m-1}(1 - (1 - \tilde{\lambda}))} = 1 - \lambda$$

Отсюда определяется параметр λ в статистике (2), который равен

$$\lambda = 1 - \frac{(1-\tilde{\lambda})^m}{1 - m(1-\tilde{\lambda})(1-\tilde{\lambda})^{m-1}},$$

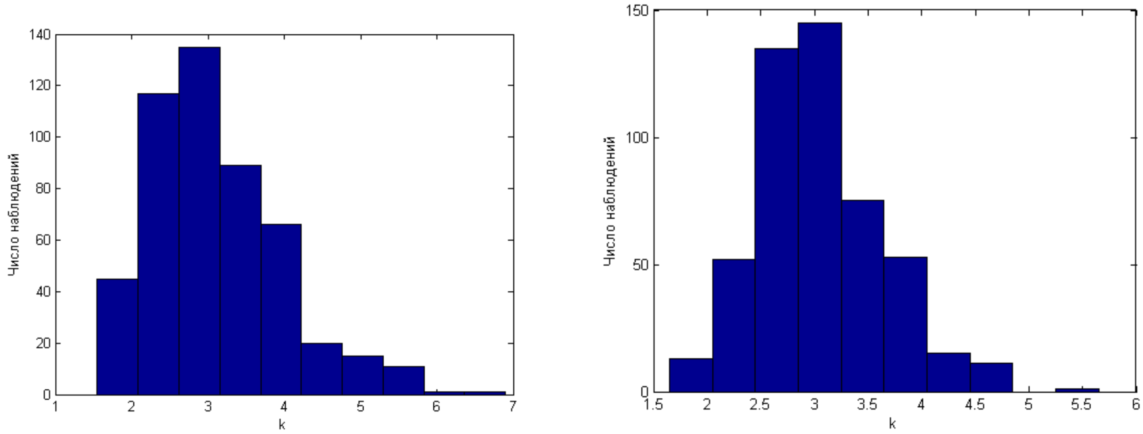
где $\tilde{\lambda} = \dfrac{\tilde{\nu} + r}{mn}$.

Вычисляется значение статистики R_λ.

6. Методом перебора $\tilde{k}$ определяется оценка $\hat{k}$, минимизирующая значение статистики R_λ.

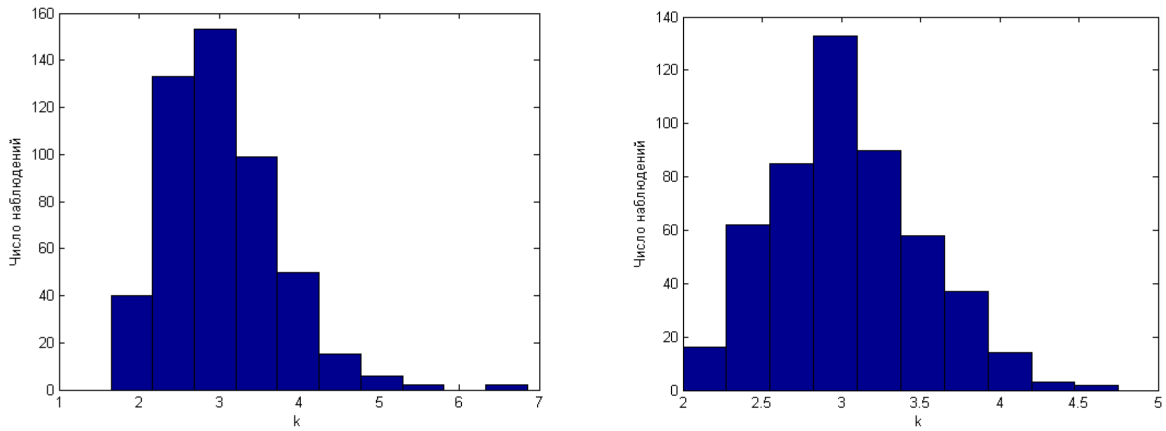
Для определения статистических свойств оценки $\hat{k}$ пункты 1 – 6 необходимо повторить не менее 500 раз. По полученным значениям оценок строится гистограмма этой выборки, а также вычисляются эмпирические среднее $\hat{k}$ и дисперсия S^2.

На рис.1-2 изображены гистограммы полученных оценок $\hat{k}$ для различных наборов параметров моделирования m, n, μ для экспоненциального распределения с параметром $\beta = 0.001$, и для распределения Вейбулла с параметрами $\beta = 0.001$, $p = 1.5$.



а) $m = 2$, $\mu = 0.6$ б) $m = 3$, $\mu = 0.8$

Рис. 1. Гистограммы оценок $\hat{k}$ для экспоненциального распределения при $n = 100, k = 3$



а) $m = 2$, $\mu = 0.6$ б) $m = 3$, $\mu = 0.8$

Рис. 2. Гистограммы оценок $\hat{k}$ для распределения Вейбулла при $n = 100$, $k = 3$

Результаты моделирования для $n = 100$ приведены в табл.1.

Таблица 1. Результаты моделирования оценки коэффициента ускорения для $n = 100$

k	**Экспоненциальное распределение, $\beta = 0.001$**				**Распределение Вейбулла, $\beta = 0.001$, $p = 1.5$**			
	$\mu = 0.6$		$\mu = 0.8$		$\mu = 0.6$		$\mu = 0.8$	
	$\hat{k}$	S^2	$\hat{k}$	S^2	$\hat{k}$	S^2	$\hat{k}$	S^2
$m = 2$								
2	2,0106	0,5142	2,0673	0,4485	2,0228	0,4567	2,0303	0,3768
3	3,1062	0,8672	3,0105	0,6127	3,0221	0,6826	3,0507	0,5984
4	4,0716	1,0883	4,0894	0,9356	4,1493	0,9810	4,0736	0,7789
5	5,0629	1,2514	5,0429	1,0124	5,0336	1,0733	4,9775	0,8722
6	5,7374	1,10582	5,7724	0,9615	5,7559	1,0269	5,9060	0,8496
$m = 3$								
2	2,0352	0,4188	2,0148	0,4079	2,0255	0,3456	1,9905	0,3188
3	3,1329	0,7222	3,0045	0,5689	3,0016	0,5335	3,0184	0,4497
4	4,0610	0,8979	4,0107	0,7330	4,0277	0,7495	3,9986	0,6273
5	5,0412	1,0313	5,1124	0,9429	5,0202	0,9701	5,0857	0,8118
6	5,7669	0,9955	5,875	0,8707	5,9173	0,8701	5,9487	0,7854

Результаты моделирования показывают, что для больших объёма данных эмпирические средние очень незначительно отличаются от теоретических средних, причем дисперсии оценок также малы.

Однако при небольших n наблюдается некоторое положительное систематическое смещение оценки коэффициента ускорения. Поэтому были вычислены поправочные коэффициенты $\hat{k}/k$ для оценки коэффициента ускорения для случая экспоненциального распределения и распределения Вейбулла.

Результаты расчётов приведены в табл.2-3 для параметра $\mu = 0.6$.

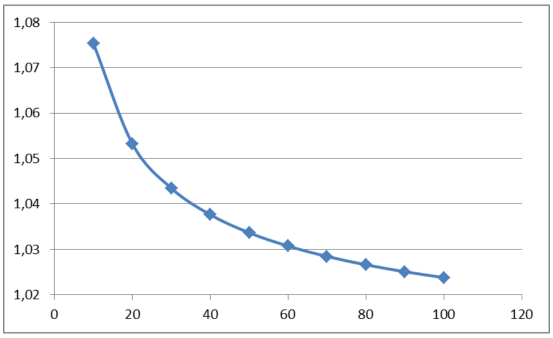
Таблица 2. Поправочные коэффициенты для экспоненциального распределения с параметром $\beta = 0.001$

$m \setminus n$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
2	1,0655	1,1182	1,0627	1,0999	1,0546	1,0615	1,0687	1,0284	1,0521	1,0249
3	1,1205	1,0820	1,0486	1,0549	1,0111	1,0284	1,0409	1,0131	1,0292	1,0236

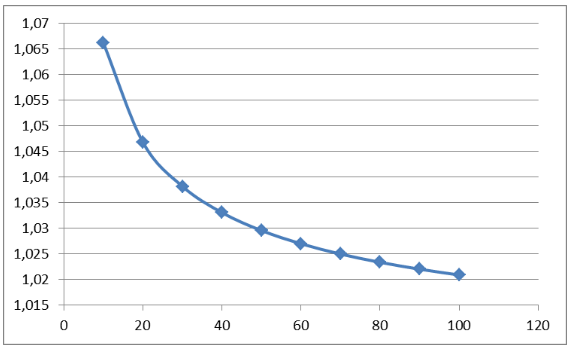
Таблица 3. Поправочные коэффициенты для распределения Вейбулла с параметрами $\beta = 0.001$, $p = 1.5$

$m \setminus n$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
2	1,0823	1,1064	1,0802	1,0595	1,0760	1,0485	1,0521	1,0402	1,0274	1,0373
3	1,1057	1,1001	1,0109	1,0405	1,0529	1,0388	1,0194	1,0154	1,0232	1,0127

На рис.3 представлены сглаженные графики поправочных коэффициентов в зависимости от n для $m=3$, $\mu=0.6$ в случае экспоненциального распределения с параметром $\beta=0.001$, и в случае распределения Вейбулла с параметрами $\beta=0.001$, $p=1.5$.



а) Экпоненциальное распределение, $\beta = 0.001$



б) Распределение Вейбулла, $\beta = 0.001,\ p = 1.5$

Рис. 3.Поправочный кэффициент для $m = 3, \mu = 0.6$

Представленные графики показывают, что с увеличением n поправочный коэффициент стремится к единице, что показывает состоятельность оценки коэффициента ускорения, полученной при помощи статистического моделирования методом Монте-Карло.

Заключение

В работе предложен метод оценки коэффициента ускорения, полученный по результатам испытаний в переменном режиме при наблюдении $\mu \cdot 100\%$ отказавших изделий, $0 < \mu < 1$. Методом Монте-Карло показано, что оценка коэффициента ускорения по таким цензурированным данным, получаемая минимизацией статистики типа Реньи, является состоятельной оценкой, которая имеет некоторое положительное смещение для небольших объёмов данных. Для устранения эффекта смещения рассчитаны поправочные коэффициенты для экспоненциального распределения и распределения Вейбулла.

Список литературы

1. Meeker W.Q., Escobar L.A., Hong Y. Using Accelerated Life Tests Results to Predict Field Reliability // Technometrics. 2009. Vol. 51, no. 2. P. 146-161.
2. Escobar L.A., Meeker W.Q. A Review of Accelerated Test Models // Statistical Science. 2006. Vol. 21, no. 4. P. 552-577.
3. Meeker W.Q., Escobar L.A. Statistical Methods for Reliability Data. New York: Wiley, 1998. 701 p.
4. Ишков А.С. Методы ускоренной оценки показателей надежности интегральных схем на основе форсированных испытаний // Международный симпозиум «Надежность и качество» (Пенза, 2008 г.): труды. Пенза: ПГУ, 2008. Ст. № 204.
5. Elsayed E.A. Accelerated Life Testing // In: Handbook of Reliability Engineering. Springer London, 2003. P. 415-428. DOI: 10.1007/1-85233-841-5_22
6. Nelson W. Accelerated Testing Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. 601 p.

7. Klyatis Lev.M. Accelerated reliability and durability testing technology. New Jersey: John Wiley & Sons, 2012. 414 p.
8. Zhou Rensheng R., Serban N., Gebraeel N. Degradation modeling applied to residual lifetime prediction using functional data analysis // The Annals of Applied Statistics. 2011. Vol. 5, no. 2B. P. 1586-1610. DOI: 10.1214/10-AOAS448
9. Карташов Г.Д. Предварительные исследования в теории форсированных испытаний. М.: Знание, 1980. 51 с.
10. Карташов Г.Д. Установление связей между ненаблюдаемыми одновременно случайными величинами // Применение теории вероятностей и математической статистики: сб. науч. тр. Вильнюс: Ин-т мат. и кибер. АН ЛитССР, 1981. С.18-29.
11. Тимонин В.И. Оптимизация проведения предварительных исследований в теории форсированных испытаний // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2003. № 2. С. 28-41.
12. Тимонин В.И., Ермолаева М.А. Точные распределения статистик типа Колмогорова-Смирнова, применяемых для анализа остаточной надежности резервированных систем // Электромагнитные волны и электронные системы. 2012. Т. 17, № 10. С. 66-72.
13. Тимонин В.И. Аналоги двухвыборочных статистик Реньи для проверки гипотез Лемана // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 4. С. 3-10.
14. Тимонин В.И., Тянникова Н.Д. Модификация критерия Реньи при проверке гипотез о значении коэффициента ускорения в испытаниях с переменной нагрузкой // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. [в печати]
15. Hajek J., Sidak Z. Theory of rank tests. London: Academic Press, 2004. 438 p.
16. Тимонин В. И., Ермолаева М. А. Оценки Каплана-Мейера в статистиках типа Колмогорова-Смирнова при проверке гипотез в испытаниях с переменной нагрузкой // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15, № 7. С. 18-26.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408
electronic scientific and technical journal

Monte Carlo Method to Study Properties of Acceleration Factor Estimation Based on the Test Results with Varying Load

07, July 2014
DOI: 10.7463/0714.0718295

N.D. Tiannikova[1,a], V.I. Timonin[1]

[1]Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, 105005, Russian Federation
[a]tiannikova@yandex.ru

Keywords: accelareted testing, Renyi statistics, testing in alternative modes, Kaplan-Meier estimates, acceleration factor

G.D. Kartashov has developed a technique to determine the rapid testing results scaling functions to the normal mode. Its feature is preliminary tests of products of one sample including tests using the alternating modes. Standard procedure of preliminary tests (researches) is as follows: n groups of products with m elements in each start being tested in normal mode and, after a failure of one of products in the group, the remained products are tested in accelerated mode. In addition to tests in alternating mode, tests in constantly normal mode are conducted as well. The acceleration factor of rapid tests for this type of products, identical to any lots is determined using such testing results of products from the same lot. A drawback of this technique is that tests are to be conducted in alternating mode till the failure of all products. That is not always is possible. To avoid this shortcoming, the Renyi criterion is offered. It allows us to determine scaling functions using the right-censored data thus giving the opportunity to stop testing prior to all failures of products.

In this work a statistical modeling of the acceleration factor estimation owing to Renyi statistics minimization is implemented by the Monte-Carlo method. Results of modeling show that the acceleration factor estimation obtained through Renyi statistics minimization is conceivable for rather large n. But for small sample volumes some systematic bias of acceleration factor estimation, which decreases with growth n is observed for both distributions (exponential and Veybull's distributions). Therefore the paper also presents calculation results of correction factors for a case of exponential distribution and Veybull's distribution.

References

1. Meeker W.Q., Escobar L.A., Hong Y. Using Accelerated Life Tests Results to Predict Field Reliability. *Technometrics*, 2009, vol. 51, no. 2, pp. 146-161.
2. Escobar L.A., Meeker W.Q. A Review of Accelerated Test Models. *Statistical Science*, 2006, vol. 21, no. 4, pp. 552-577.
3. Meeker W.Q., Escobar L.A. Statistical Methods for Reliability Data. New York, Wiley, 1998. 701 p.
4. Ishkov A.S. Methods for rapid assessment of indicators of reliability of integrated circuits based on the forced tests. *Mezhdunarodnyi simpozium "Nadezhnost' i kachestvo": trudy* [Proc. of the International Symposium "Reliability and Quality"]. Penza, 2008. Penza, PSU Publ., 2008, art. no. 204. (in Russian).
5. Elsayed E.A. Accelerated Life Testing. In: *Handbook of Reliability Engineering*. Springer London, 2003, pp. 415-428. DOI: 10.1007/1-85233-841-5_22
6. Nelson W. *Accelerated Testing Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*. New Jersey, John Wiley and Sons, 2004. 601 p.
7. Klyatis Lev.M. *Accelerated reliability and durability testing technology*. New Jersey, John Wiley and Sons, 2012. 414 p.
8. Zhou Rensheng R., Serban N., Gebraeel N. Degradation modeling applied to residual lifetime prediction using functional data analysis. *The Annals of Applied Statistics*, 2011, vol. 5, no. 2B, pp. 1586-1610. DOI: 10.1214/10-AOAS448
9. Kartashov G.D. *Predvaritel'nye issledovaniia v teorii forsirovannykh ispytanii* [Preliminary studies in the theory of forced testing]. Moscow, Znanie Publ., 1980. 51 p. (in Russian).
10. Kartashov G.D. Establishing links between both unobservable random variables. *Primenenie teorii veroiatnostei i matematicheskoi statistiki: sb. nauch. tr*. [Application of the theory of probability and mathematical statistics: collection of scientific papers]. Vil'nius, Institute of Mathematics and Cybernetics, Academy of Sciences of the Lithuanian SSR Publ., 1981, pp.18-29. (in Russian).
11. Timonin V.I. Optimization of Preliminary Studies in Theory of Forced Testing. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2003, no. 2, pp. 28-41. (in Russian).
12. Timonin V.I., Ermolaeva M.A. The exact distributions of Kolmogorov□Smirnov statistics used for residual reliability analysis of redundant systems. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy = Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2012, vol. 17, no. 10, pp. 66-72. (in Russian).

13. Timonin V.I. Analogs of Two Sampled Regnier Statistics for Verification of Lehmann's Hypothesis. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science,* 2004, no. 4, pp. 3-10. (in Russian).
14. Timonin V.I., Tiannikova N.D. Modification of the Renyi criterion in testing the hypotheses about the meaning of acceleration factor in the testing with varying load. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 8. (in Russian, in press).
15. Hajek J., Sidak Z. *Theory of rank tests*. London, Academic Press, 2004. 438 p.
16. Timonin V. I., Ermolaeva M. A. About Kaplan-Meyer Estimators in Statistics Similar to Kolmogorov-Smirnov for Testing the Hypothesis in Variable Load Tests. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy = Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2010, vol. 15, no. 7, pp. 18-26. (in Russian).