

Расчёт пластической конической оболочки при деформировании с преобразованием внутренней поверхности в наружную

01, январь 2014

DOI: 10.7463/0114.0673360

Уваров А.И.

УДК 539.3

Россия,

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

uvrandiv@sandy.ru

Andiv31121950@yandex.ru

Введение

В различных областях техники, в особенности в транспортном машиностроении, используются ударные амортизаторы – устройства, останавливающие движение тел. Торможение осуществляется путём поглощения кинетической энергии [1][2].

К некоторым конструктивным элементам, поглощающим энергию движения различных тел, применима расчётная схема оболочки. При этом эффективное поглощение энергии сопряжено с существенным изменением первоначальной формы.

Большие деформации упругих оболочек с существенным изменением формы рассмотрены в работах А.В. Погорелова [3]. Большие деформации с существенным изменением формы пластической сферической оболочки под действием локальной нагрузки рассмотрены в работе [4], конструктивно-ортотропной пластической цилиндрической оболочки в работе [5].

В данной работе строится аналитическая модель деформирования пластической конической оболочки. В процессе осесимметричного деформирования внутренняя поверхность оболочки становится наружной, а наружная поверхность - внутренней.

В книге [6] описан амортизатор, в котором аналогичной деформацией круглой трубы осуществляется поглощение энергии.

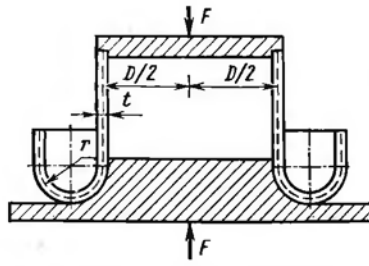


Рис.1 Схема трубчатого амортизатора из книги Дж. Фентона [6].

Недостатком такой конструкции является большая окружная деформация, которую сможет выдержать без разрушения не всякий материал. Устранить данный недостаток можно применением конической деформируемой оболочки, например по схеме, показанной на рис.2. Здесь вертикальное движение верхней недеформируемой оболочки вызывает деформирование нижней конической оболочки с преобразованием внутренней поверхности в наружную. При этом радиальные перемещения меньше, чем цилиндрической оболочки (круглой трубы), следовательно, меньше и кольцевые деформации.

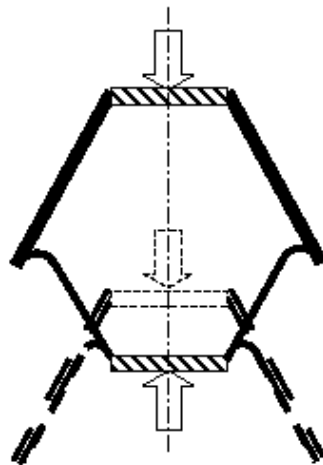


Рис.2 Схема конического амортизатора

Целью данной работы является построение аналитической модели деформирования пластической конической оболочки и применение данной модели для исследования влияния геометрических параметров оболочки на процесс поглощения энергии.

Материал конической оболочки считается жёстко – идеально пластическим. Использована теория предельного равновесия [7], [8]. Связь перемещений и деформаций соответствует теории тонких оболочек, изложенной в монографии [9]. Не деформированная и деформированная срединная поверхность считается осесимметричной.

1 Вывод аналитических зависимостей для расчёта параметров деформирования конической оболочки

Рассмотрим коническую оболочку с углом наклона образующей γ толщины h из жестко - идеальнопластического материала, претерпевшую деформацию под действием продольного осевого усилия $P = q2\pi r_0$, где q - нагрузка, распределённая по окружности радиуса r_0 по краю оболочки. Предположим, что деформированная часть оболочки состоит из торовой части с радиусом образующей окружности ρ и конической части с углом наклона образующей γ (отложен против часовой стрелки на рис. 3).

Полагаем, что наружная деформированная коническая часть двигается поступательно как жёсткое тело, а деформируется только торовая часть. Найдем величину продольного усилия, необходимого для продолжения процесса деформирования, используя кинематический метод.

1.1 Определение энергии деформации оболочки

На рис. 3 вертикальной штрихпунктирной линией показана ось симметрии. Под углом γ по часовой стрелке показана образующая (меридиан) недеформированной конической оболочки. Толстой сплошной линией показана образующая конической оболочки в рассматриваемый момент времени, соответствующий перемещению верхнего края конической оболочки вдоль оси симметрии u .

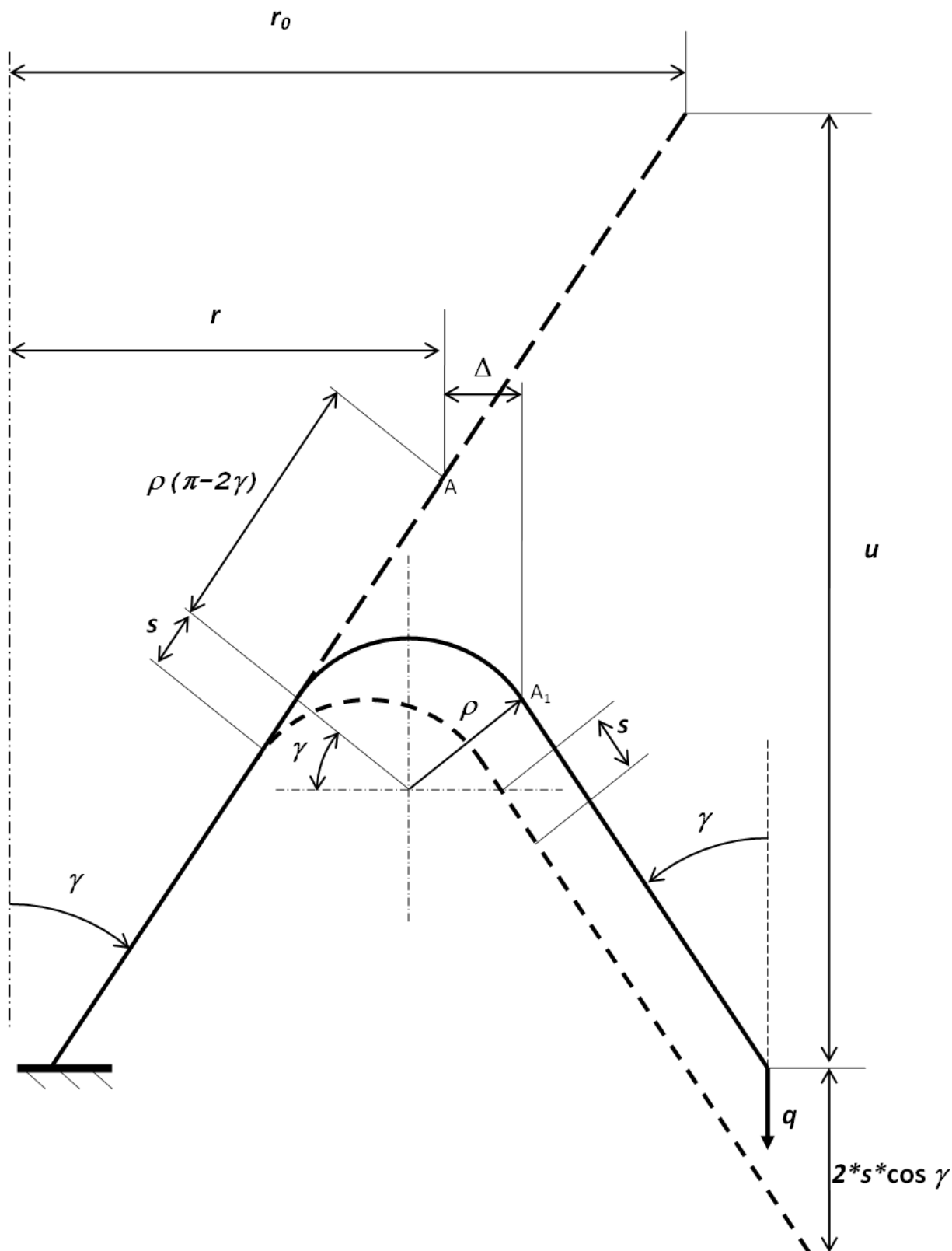


Рис.3 . Схема деформирования образующей конической оболочки

Рассмотрим деформацию конической оболочки при дальнейшем взаимном перемещении её краёв. Считаем, что относительное удлинение образующей равно нулю. Пусть *малая* часть недеформированной оболочки с образующей длиной s сдеформировалась в торовую часть, а

наружная часть торовой оболочки с образующей такой же длины сдеформировалась в наружную коническую оболочку. При этом длина образующей наружной оболочки увеличилась на величину s . Толстой штриховой линией с коротким штрихом показана образующая деформированной конической оболочки после искривления части образующей малой длины s . Вычислим деформации элемента оболочки при деформировании из первоначального положения в положение в наружной недеформируемой конической оболочке. Полагаем, что размеры криволинейной части образующей малы по сравнению с расстоянием от оси симметрии r .

Происходит искривление и распрямление элемента конической оболочки с площадью срединной поверхности $2\pi \cdot s$ в направлении образующей срединной поверхности на величину

кривизны $\kappa_1 = \frac{1}{\rho}$, распрямление и искривление в кольцевом направлении на величину кривизны

$$\kappa_2 = \frac{\cos \gamma}{r}.$$

Также происходит перемещение в направлении, перпендикулярном оси симметрии. Точка A с радиальной координатой r на образующей недеформированной конической оболочки перемещается в положение A_1 на образующей деформированной конической поверхности. Увеличение расстояние от оси симметрии Δ при условии отсутствия линейной деформации образующей равно:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\rho \sin(\pi/2 - \gamma) - \rho(\pi - 2\gamma) \sin \gamma = \\ &= 2\rho \cos \gamma - \rho(\pi - 2\gamma) \sin \gamma = \rho[2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma] \end{aligned}$$

При этом кольцевая цепная деформация равна:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta}{r} = \frac{\rho[2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma]}{r}.$$

Вычислим энергию деформации оболочки, приняв поверхность текучести, описанную относительно точной поверхности текучести:

$$N_1 = N_2 = \sigma_t \cdot h = N_0; \quad M_1 = M_2 = \frac{\sigma_t}{4} h^2 = M_0,$$

где σ_t - предел текучести материала оболочки;

N_1, N_2 – нормальные усилия в нормальных конических сечениях и осевых сечениях соответственно;

M_1, M_2 – изгибающие моменты в нормальных конических сечениях и осевых сечениях соответственно.

Энергия (диссипация), связанная с искривлением и распрямлением образующей конической оболочки (изменением кривизны образующей на величину κ_1):

$$D_{\kappa_1} = M_0 \cdot \kappa_1 \cdot (2 \cdot 2\pi r s) = \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot (2 \cdot 2\pi r s).$$

Энергия (диссипация), связанная с изменением кривизны (на величину κ_2) в кольцевом направлении:

$$D_{\kappa_2} = M_0 \cdot \kappa_2 \cdot (2 \cdot 2\pi r s) = \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot \frac{\cos \gamma}{r} \cdot (2 \cdot 2\pi r s)$$

Энергия (диссипация), связанная с цепными кольцевыми деформациями:

$$D_{\varepsilon_2} = N_0 \cdot \varepsilon_2 \cdot 2\pi r s = \sigma_T h \cdot \frac{\Delta}{r} \cdot 2\pi r s = \sigma_T h \cdot \frac{\rho [2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma]}{r} \cdot 2\pi r s$$

Суммарная диссипация в оболочке:

$$D_{\Sigma} = D_{\kappa_1} + D_{\kappa_2} + D_{\varepsilon_2}$$

$$D_{\Sigma} = \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot \frac{1}{\rho} (2 \cdot 2\pi r s) + \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot 2 \frac{\cos \gamma}{r} \cdot 2\pi r s + \sigma_T h \cdot \frac{\rho [2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma]}{r} \cdot 2\pi r s$$

Считая величину s параметром, определяющим процесс деформирования, найдём суммарную мощность диссипации:

$$\dot{D}_{\Sigma} = \frac{\partial \dot{D}_{\Sigma}}{\partial s} = \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot \frac{1}{\rho} (2 \cdot 2\pi r) + \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot 2 \frac{\cos \gamma}{r} \cdot 2\pi r + \sigma_T h \cdot \frac{\rho [2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma]}{r} \cdot 2\pi r$$

1.2 Определение продольного усилия деформирования

Малое осевое перемещение края деформированной части оболочки при отгибе внутренней

конической оболочки на малую величину s равно $2s \cdot \cos \gamma$ (см. рис. 3). Работа внешней нагрузки

$P = q2\pi r_0$ при этом равна :

$$A = P \cdot 2s \cdot \cos \gamma$$

Мощность внешней нагрузки:

$$\dot{A} = P \cdot 2 \cos \gamma$$

Приравнивая мощность внешней нагрузки суммарной мощности диссипации, найдём величину продольного усилия:

$$P \cdot 2 \cos \gamma = \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot \frac{1}{\rho} (2 \cdot 2\pi r) + \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot 2 \frac{\cos \gamma}{r} \cdot 2\pi r + \sigma_T h \cdot \frac{\rho [2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma]}{r} 2\pi r$$

$$P = \left\{ \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot \frac{1}{\rho} (2 \cdot \pi r) + \frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot 2 \cos \gamma \cdot \pi + \sigma_T h \cdot \rho [2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma] \pi \right\} / \cos \gamma \quad (1)$$

В соответствии с кинематической теоремой теории предельного равновесия [7], [8] определим величину радиуса образующей окружности тора ρ , при которой нагрузка P минимальна:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = 0$$

$$-\frac{\sigma_T h^2}{4} \cdot \frac{1}{\rho^2} (2 \cdot \pi r) + \sigma_T h \cdot [2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma] \pi = 0$$

Откуда находим:

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{r h} \sqrt{\frac{2}{[2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma]}} \quad (2)$$

Обозначим

$$f(\gamma) = \sqrt{\frac{[2 \cos \gamma - (\pi - 2\gamma) \sin \gamma]}{2}} \quad (3)$$

Тогда

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{h}{r}} \cdot f(\gamma) \quad (4)$$

Подставляя ρ в формулу (1) для P , найдём усилие, необходимое для продолжения деформирования:

$$P = 2\pi\sigma_T h \cdot \sqrt{\frac{h}{r}} \cdot \frac{f(\gamma)}{\cos \gamma} + 2\pi \cdot \frac{\sigma_T h^2}{4}$$

$$P = 2\pi\sigma_T h \cdot \left(\sqrt{\frac{h}{r}} \cdot \frac{f(\gamma)}{\cos \gamma} + \frac{h}{4r} \right) \quad (5)$$

Из рисунка 3 определяем величину осевого перемещения точек приложения нагрузки:

$$u = [2 \cdot (r_0 - r) + \rho(\pi - 2\gamma) \cdot \sin \gamma] / \operatorname{tg} \gamma = 2 \cdot [(r_0 - r) + \sqrt{rh} \frac{(\pi - 2\gamma) \cdot \sin \gamma}{4 \cdot f(\gamma)}] / \operatorname{tg} \gamma \quad (6)$$

Таким образом, для каждой величины радиальной координаты r можно вычислить величины перемещения (6) и нагрузки (5), то есть определить зависимость нагрузка – перемещение.

1.3 Случай $\gamma = 0$

Для цилиндрической оболочки радиуса R , полагая в формулах(2),(3),(4),(5) $\gamma = 0$, получим:

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{Rh} \quad (7)$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{h}{R}} \quad (8)$$

$$P = 2\pi R \sigma h \left(\sqrt{\frac{h}{R}} + \frac{h}{4R} \right) \quad (9)$$

2. Анализ влияния геометрических параметров на процесс деформирования с использованием полученных соотношений

1. Размер зоны интенсивного деформирования имеет порядок ширины зоны краевого эффекта в упругих оболочках (см. ф.(2),(7)).

2. Из формул (4) и (8) следует, что кольцевая цепная деформация для конической оболочки уменьшается с увеличением угла конусности, поскольку убывает безразмерная величина $f(\gamma)$.

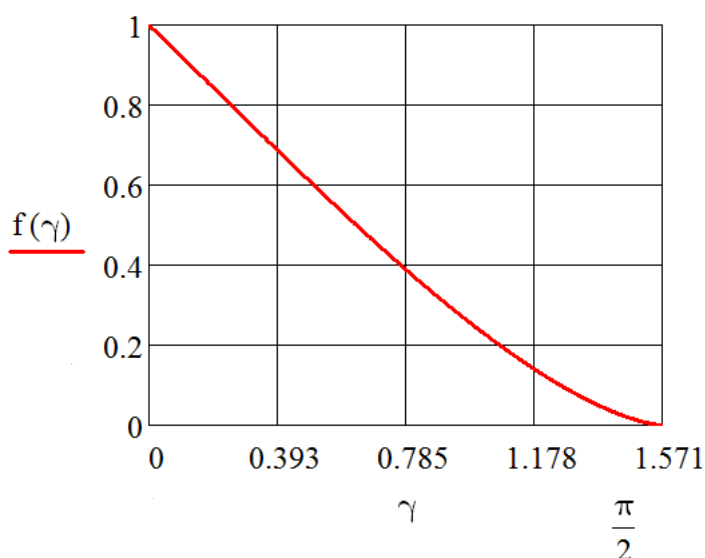


Рис.4. График функции $f(\gamma)$

3. Для цилиндрической оболочки усилие деформирования постоянно (см. ф.(9)), однако деформации достаточно велики, например, для оболочки с $\frac{h}{R} = \frac{1}{16}$ кольцевая деформация равна $\varepsilon_2 = 0,25$, что, видимо, превышает возможности деформирования металлических конструкционных материалов.

4. Для конической оболочки толщины $h = 5 \text{ мм}$ с углом конусности $\gamma = \frac{\pi}{3}$ и радиусами ограничивающих окружностей 200 мм и 100 мм при максимальном перемещении 143 мм максимальная кольцевая деформация не превысит $\varepsilon_2 = 0,048$, а усилие деформирования для материала с пределом текучести 200 Мпа при этом изменится от 94000 Н до 68000 Н. Таким образом, варьируя геометрические параметры оболочки, можно достичь достаточно низкой

величины деформации материала при форме графика нагрузка – перемещение, близкой к оптимальной прямоугольной.

Заключение

Разработана аналитическая модель деформирования конической оболочки, учитывающая геометрическую и физическую нелинейности. Получены зависимости для расчёта продольного усилия и кольцевой деформации в зависимости от геометрических параметров оболочки. С помощью полученных зависимостей установлено, что конические оболочки из металлических сплавов могут быть использованы в качестве энергопоглощающих элементов. Сопоставление расчётов по полученным формулам с результатами численных расчётов для нескольких конических оболочек показало удовлетворительное совпадение, что подтверждает возможность использования полученных соотношений для расчёта и анализа рассмотренного вида деформирования.

Список литературы

1. Марков В.А., Пусев В.И., Селиванов В.В. О вопросах демпфирующих и амортизирующих свойств материалов и конструкций // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 6. DOI: [10.7463/0612.0442023](https://doi.org/10.7463/0612.0442023)
2. Петров Ю.А., Макаров В.П., Колобов А.Ю., Алешин В.Ф. Посадочные устройства космических аппаратов (КА) на основе пенопластов и сотоблоков // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2010. № 4. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/141542.html> (дата обращения 18.08.2013).
3. Погорелов А.В. Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек. М.: Наука, 1986. 96 с.
4. Уваров А.И. Большие осесимметричные прогибы и устойчивость локально нагруженной оболочки вращения // Прикладная механика. 1987. Т. 33, № 3. С. 33-38.
5. Уваров А.И. Пластические деформации оболочечных элементов конструктивной защиты // Судостроительная промышленность: научно-техн. сборник. Сер. Проектирование судов. Вып. 3. Ленинград: ЦНИИ "Румб", 1986. С. 43-48.
6. Фентон Дж. Несущий каркас кузова автомобиля и его расчет: пер. с англ. / под ред. Э.И. Григолюка. М.: Машиностроение, 1984. 200 с. [Fenton J. Vehicle Body Layout and Analysis. London: Mechanical Engineering LTD, 1980.].
7. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
8. Беленький Л.М. Большие деформации судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1973. 208 с.
9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки: пер. с англ. М.: Наука, 1966. 636 с. [Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory Of Plates And Shells. New York, Toronto, London, McGraw Hill Company, Inc., 1959.]

Calculation of plastic deformation of a conical shell with the transformation of inner surface into outer one

01, January 2014

DOI: [10.7463/0114.0673360](https://doi.org/10.7463/0114.0673360)

Uvarov A.I.

Nizhny Novgorod State Technical University, Russian Federation

uvrandiv@sandy.ruAndiv31121950@yandex.ru

An analytical model of plastic deformation of a conical shell with the transformation of internal surface into outer one was developed with a use of the kinematic method. The shell material was assumed to be perfectly plastic. The theory of thin shells and the kinematic theorem of limit equilibrium were utilized in this work. Both geometric and physical nonlinearities were taken into account. Dependences for calculating radius of curvature of the intensive deformation zones, value of chain ring deformation and values of the deforming force as a function of axial displacement were determined. Analysis showed the possibility of using a conical shell to absorb energy with high efficiency. Obtained results could be used for calculation and selection of optimal parameters of the energy-absorbing elements in shock absorbers.

Publications with keywords: [plasticity](#), [shell](#), [large deflection](#), [shock absorber](#)**Publications with words:** [plasticity](#), [shell](#), [large deflection](#), [shock absorber](#)

References

1. Markov V.A., Pusev V.I., Selivanov V.V. O voprosakh dempfirovuyushchikh i amortiziruyushchikh svoystv materialov i konstruktsiy [Issues of damping and absorbing properties of materials and structures]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 6. DOI: [10.7463/0612.0442023](https://doi.org/10.7463/0612.0442023)
2. Petrov Yu.A., Makarov V.P., Kolobov A.Yu., Aleshin V.F. Posadochnye ustroystva kosmicheskikh apparatov (KA) na osnove penoplastov i sotoblokov [Spacecrafts Landing Devices on the Basis of Polyfoams and Cellular Designs]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and

Education of the Bauman MSTU], 2010, no. 4. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/141542.html>, accessed 18.08.2013.

3. Pogorelov A.V. *Izgibaniya poverkhnostey i ustoychivost' obolochek* [Deformation of surfaces and stability of shells]. Moscow, Nauka, 1986. 96 p.
4. Uvarov A.I. Bol'shie osesimmetrichnye progiby i ustoychivost' lokal'no nagruzhennoy obolochki vrashcheniya [Large axisymmetric flexure and stability of locally loaded shell of revolution]. *Prikladnaya mekhanika*, 1987, vol. 33, no. 3, pp. 33-38. (English translation: *Soviet Applied Mechanics*, 1987, vol. 23, is. 3, pp. 234-238. DOI: 10.1007/BF00886597).
5. Uvarov A.I. Plasticheskie deformatsii obolocheknykh elementov konstruktivnoy zashchity [Plastic deformation of the shell elements of structural protection]. *Sudostroitel'naya promyshlennost: nauchno-tekhn. sbornik. Ser. Proektirovanie sudov. Vyp. 3* [Shipbuilding industry: scientific and technical collection. Ser. Ship design. Is. 3]. Leningrad, Publ. of TsNII "Rumb", 1986, pp. 43-48.
6. Fenton J. *Vehicle Body Layout and Analysis*. London, Mechanical Engineering LTD, 1980. (Russ. ed.: Fenton J. *Nesushchiy karkas kuzova avtomobilya i ego raschet*. Moscow, Mashinostroenie, 1984. 200 p.).
7. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 400 p.
8. Belen'kiy L.M. *Bol'shie deformatsii sudovykh konstruktsiy* [Large deformation of ship structures]. Leningrad, Sudostroenie, 1973. 208 p.
9. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York, Toronto, London, McGraw Hill Company, Inc., 1959. (Russ. ed.: Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki*. Moscow, Nauka, 1966. 636 p.).