

Методы синтеза быстрых преобразований Виленкина-Крестенсона

01, январь 2014

DOI: 10.7463/0114.0687462

Сюзев В.В.

УДК 519.216.1/2

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
v.suzev@bmstu.ru

Введение

Существует широкий круг задач цифровой обработки сигналов (ЦОС) (фильтрация, аппроксимация, интерполяция, идентификация, распознавание, имитация, сжатие, кодирование, передача по каналам связи и т.п. [1-5]), при решении которых используется спектральная область их представления. Математическую основу спектрального представления сигналов составляет дискретное преобразование Фурье (ДПФ) в различных ортогональных базисах. Поскольку вычислительная и функциональная эффективность спектральных алгоритмов ЦОС зависит от используемых систем базисных функций, а полных базисных систем существует неограниченное множество, то выбор рационального базиса является важной теоретической и прикладной проблемой.

При ее решении могут оказаться особенно полезными параметрические базисные системы, содержащие в своей структуре один или несколько изменяемых параметров, влияющих на их свойства. Известным и важным примером таких базисов служит класс комплексных экспоненциальных функций Виленкина-Крестенсона (ВКФ) [6, 7], управление свойствами которых осуществляется с помощью вариации основания используемой системы счисления и дополнительного применения различных способов упорядочения базисных функций в системе.

ВКФ являются мультипликативными функциями с базовой операцией мультипликативности в виде поразрядного сложения по модулю, равному основанию системы счисления, используемой при представлении номера и аргумента ВКФ, поэтому для них справедливы все важные для ЦОС теоремы спектрального анализа (теоремы о модуляции, сдвиге, свертке, корреляции, энергетическом спектре и умножении сигналов) и возможно построение

быстрых алгоритмов анализа спектра – быстрых преобразований Виленкина-Крестенсона (БПВК).

Следует, однако, учесть, что все существующие алгоритмы БПВК являются матричными алгоритмами, поскольку используют матричную форму описания ДПФ и основываются на различных способах факторизации матриц значений ВКФ [6-8]. БПВК в этом случае представляются с помощью произведения слабозаполненных матриц и их программирование требует выполнения дополнительного этапа преобразования БПВК в виде рекуррентных алгебраических уравнений, характерных для скалярного подхода к синтезу быстрых преобразований. Кроме того, из матричной записи БПВК не возможно получение БПВК скользящего типа, обладающих дополнительной вычислительной эффективностью при обработке сигналов по методу скользящего окна [9, 10].

В скалярной теории быстрых ортогональных преобразований используется скалярная форма записи ДПФ и декомпозиция многоточечных ДПФ на совокупность последовательно выполняемых малоточечных ДПФ, что осуществляется с помощью различных способов прореживания исходной многомерной выборки входного сигнала. Поскольку процедуры декомпозиции зависят от базовых операций мультипликативности базисных функций, то известные результаты синтеза быстрых преобразований в других базисах (например, Фурье [11], Хартли [12, 13], Уолша [14], Хаара [15], Рейдера [11, 16]), операции мультипликативности которых не совпадают с операцией мультипликативности ВКФ, не могут быть в полной мере использованы при разработке БПВК. В данной работе представляются теоретические основы и прикладные результаты скалярного подхода к синтезу быстрых преобразований Виленкина-Крестенсона, использующие оригинальные процедуры декомпозиции многомерных ДПФ для трех наиболее применяемых на практике способов упорядочения ВКФ – Пэли, Адамара и Хармута.

1. Дискретные функции и преобразования Виленкина-Крестенсона

Пусть p есть произвольное целое положительное число, принятое в качестве основания системы счисления, а целые положительные числа k и i , задающие номер и аргумент ВКФ $Wal(k, i/N)$, определенной на интервале $[0, N=p^n)$ имеют следующую n -разрядную позиционную запись:

$$k = \sum_{m=1}^n k^{(m)} p^{m-1}, \quad i = \sum_{m=1}^n i^{(m)} p^{m-1},$$

где $k^{(m)}$ и $i^{(m)}$ являются m -ми разрядами чисел k и i соответственно и лежат в диапазоне $[0, p-1]$. Тогда ВКФ можно представить следующим выражением [6]:

$$Wal(k, i / N) = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k^{(m)} i^{(m)}), \quad j = \sqrt{-1}. \quad (1)$$

Из него следует, что ВКФ представляет собой не одну базисную функцию заданного номера k , а семейство функций, отличающихся значениями параметров p и n . Так, например, при $p=2$ и $n \neq 1$ функция

$$Wal(k, i / N) = \exp(j\pi \sum_{m=1}^n k^{(m)} i^{(m)}) = \pm 1$$

и переходит в функцию Уолша [6, 14], а при $p=N$ и $n=1$ ВКФ становится дискретной комплексной экспоненциальной функцией (ДЭФ) Фурье $\exp(j2\pi k^{(1)} i^{(1)} / N)$, где $k^{(1)}, i^{(1)} = 0, 1, \dots, N-1$.

Дискретные ВКФ принимают только p различных значений и обладают следующими важными для спектрального анализа свойствами [6]:

- ортонормированности

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Wal(k, i / N) Wal(\lambda, i / N) = \delta_{k,\lambda}$$

(здесь $\delta_{k,\lambda}$ - символ Кронекера);

- периодичности с периодом N

$$Wal(k, (i \pm N) / N) = Wal(k, i / N);$$

- двойственности (симметрии)

$$Wal(k, i / N) = Wal(i, k / N);$$

- двойной мультипликативности с базовой операцией в виде поразрядного сложения по модулю p

$$Wal(k, i / N) = 1 / Wal(k, i / N),$$

$$Wal(k, i / N) Wal(\lambda, i / N) = Wal(q, i / N),$$

$$Wal(i, k / N) Wal(i, \lambda / N) = Wal(i, q / N),$$

где

$$q = k \oplus \lambda$$

и является результатом поразрядного сложения по модулю p p -ичных кодов чисел i и λ . В приведенных выражениях $Wal^*(k, i/N)$ означает комплексно-сопряженную ВКФ, т.е.

$$Wal^*(k, i/N) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k^{(m)} i^{(m)}).$$

Так как на интервале $[0, N)$ можно записать только N дискретных ВКФ, то система из таких ВКФ будет полной, поскольку её нельзя будет дополнить на этом интервале ни одной новой функцией, ортогональной одновременно ко всем остальным функциям системы. Полная дискретная система, образованная из ВКФ (1), получила название системы ВКФ с упорядочением Адамара (ВКФ-Адамара) [6]. Кроме нее в теории и практике ЦОС широко используются еще две системы ВКФ с упорядочениями Пэли и Хармута, получаемые путем замены прямого p -ичного кода номера ВКФ k его инвертированным кодом или обобщенным кодом Грея [6]. С учетом этого полезно каждой системе дать свое обозначение и записать их в следующем виде:

- ВКФ - Адамара

$$Had(k, i/N) = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k^{(m)} i^{(m)}), \quad (2)$$

- ВКФ – Пэли

$$Pal(k, i/N) = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k^{(n+1-m)} i^{(m)}), \quad (3)$$

- ВКФ – Хармута

$$Har(k, i/N) = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n \langle k^{(m)} \rangle i^{(m)}), \quad (4)$$

где $\langle k^{(m)} \rangle$ означает m -й разряд обобщенного кода Грея числа k , вычисляемый по правилу: $\langle k^{(m)} \rangle = (k^{(m)} + k^{(m+1)}) \bmod p$, $m = 1, 2, \dots, n$; при этом $k^{(n+1)} = 0$. Следует иметь в виду, что инвертирование кода k и его кодирование Грея не приводят к изменению самих функций Виленкина-Крестенсона, а только меняют порядок их следования в полной системе. Переупорядочение функций позволяет получить дополнительный способ расширения класса базисных систем на основе ВКФ.

Все полные системы ВКФ вне зависимости от способа их упорядочения могут быть использованы для разложения дискретных сигналов $x(i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ в ряды Фурье. Пара ДПФ в базисе ВКФ имеет следующий вид:

$$x(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \text{Wal}(k, i/N),$$

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \text{Wal}^*(k, i/N) \quad (5)$$

и устанавливает взаимоднозначное математическое соответствие между сигналом $x(i)$ и его спектром $X(k)$. Соотношение (5) является прямым преобразованием Фурье-Вилленкина-Крестенсона и составляет математическую основу спектрального анализа в базисе ВКФ. Для его реализации в общем случае необходимо выполнить

$$M_{\Pi} = N^2, \quad A_{\Pi} = N(N-1) \quad (6)$$

комплексных умножений и сложений, число которых при больших значениях N может быть существенным.

2. Постановка задачи разработки и исследования

С целью сокращения затрат вычислительных операций необходимо преобразовать прямой алгоритм (5) к более эффективной форме его записи. Этого можно добиться путем представления алгоритма многоточечного прямого ДПФ (5) в виде совокупности малоточечных ДПФ. С этой целью необходимо из длинных N -точечных выборок входного сигнала и его спектра сформировать более короткие промежуточные выборки и найти аналитическую связь между ВКФ, определенных на длинных интервалах, и ВКФ, определенных на коротких интервалах дискретного времени.

Можно предложить два способа формирования промежуточных выборок. В первом способе они образуются из отсчетов сигнала или спектра, взятых из N -точечных выборок с шагом, равным p , что реализуется с помощью следующего аналитического представления индексов i и k :

$$i = pi_1 \oplus \lambda_1, \quad \lambda_1 = 0, 1, \dots, p-1; \quad i_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}, \quad (7)$$

$$k = pk_1 \oplus q_1, \quad q_1 = 0, 1, \dots, p-1; \quad k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}. \quad (8)$$

В получаемых при этом промежуточных выборках отсчеты сигнала и спектра будут располагаться в прореженном порядке следования. Во втором способе длинная выборка разбивается на соприкасающиеся более короткие секции, каждая из которых рассматривается в качестве соответствующей промежуточной выборки, причем отсчеты внутри каждой из них располагаются в естественном порядке следования. Математически это достигается следующей записью индексов i и k :

$$i = i_1 \oplus p^{n-1} \lambda_1, \quad (9)$$

$$k = k_1 \oplus p^{n-1} q_1 \quad (10)$$

с теми же диапазонами изменения переменных λ_1 , q_1 , i_1 и k_1 , что и в формулах (7) и (8). Применяя комбинации из приведенных способов декомпозиции выборок к системам Пэли, Хармута и Адамара, можно получить различные типы алгоритмов БПВК.

3. Алгоритмы БПВК Пэли и Хармута с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и естественным порядком следования отсчетов спектра

Применим первый способ формирования промежуточных выборок к N-точечной исходной выборке сигнала и создадим из нее p промежуточных выборок, включив в каждую λ_1 -ю из них $x_{\lambda_1}(i_1)$ отсчеты с номерами $pi_1 \oplus \lambda_1$ (см. формулу (7)), т.е. примем

$$x_{\lambda_1}(i_1) = x(pi_1 \oplus \lambda_1), \lambda_1 = 0, 1, \dots, p-1; i_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1.$$

Спектр этих выборок будет равен

$$X^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) Wal^*(k_1, i_1 / p^{n-1}), \quad k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1. \quad (11)$$

Полный же спектр (5) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) Wal^*(k, pi_1 \oplus \lambda_1 / p^n) = \\ &= \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) Wal^*(k, \lambda_1 / p^n) Wal^*(k, pi_1 / p^n), \end{aligned}$$

где учтено, что в силу свойства мультипликативности ВКФ

$$Wal^*(k, pi_1 \oplus \lambda_1 / p^n) = Wal^*(k, pi_1 / p^n) \cdot Wal^*(k, \lambda_1 / p^n).$$

Рассмотрим теперь все составляющие полного спектра с номерами $k = k_1 \oplus p^{n-1} q_1$ где $q_1 = 0, 1, \dots, p-1$, а $k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1$ (см. формулу (10)). Они с учетом свойств мультипликативности и двойственности ВКФ запишутся так:

$$\begin{aligned}
X(k_1 \oplus p^{n-1}q_1) &= \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} Wal^*(\lambda_1, k_1 / p^n) Wal^*(\lambda_1, p^{n-1}q_1 / p^n) \times \\
&\times \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) Wal^*(k_1, pi_1 / p^n) Wal^*(p^{n-1}q_1, pi_1 / p^n). \quad (12)
\end{aligned}$$

Дальнейшее упрощение этого выражения зависит от значений функций Виленкина-Крестенсона, которые, в свою очередь, зависят от способа упорядочения ВКФ в системе.

Для системы ВКФ-Пэли в соответствии с выражением (3) получим

$$\begin{aligned}
Pal^*(k_1, pi_1 / p^n) &= \exp(-j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k^{(m)} i^{(n+1-m)}) = \\
&= \exp(-j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^{n-1} k_1^{(m)} i_1^{(n+1-m)}) = Pal^*(k_1, i_1 / p^{n-1}), \quad (13)
\end{aligned}$$

$$Pal^*(p^{n-1}q_1, pi_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} k^{(n)} i^{(1)}) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} q_1 \cdot 0) = 1, \quad (14)$$

$$Pal^*(\lambda_1, k_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} \lambda_1 k_1^{(n)}) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} \lambda_1 \cdot 0) = 1, \quad (15)$$

$$Pal^*(\lambda_1, p^{n-1}q_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} \lambda_1 q_1) = W_p^{-\lambda_1 q_1}, \quad (16)$$

где $W_p = \exp(j2\pi/p)$. При записи этих соотношений учтено, что p -ичные коды чисел k_1 имеют нулевое значение в старшем разряде, чисел pi_1 - нулевое значение в младшем разряде, чисел $p^{n-1}q_1$ - нулевые значения во всех разрядах, кроме старшего, а чисел λ_1 - нулевые значения во всех разрядах, кроме младшего.

Для системы ВКФ-Хармута (см. формулу (4)):

$$\begin{aligned}
Har^*(k_1, pi_1 / p^n) &= \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n \langle k^{(m)} \rangle i^{(m)}) = \\
&= \exp(-j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^{n-1} \langle k^{(m)} \rangle i^{(m)}) = Har^*(k_1, i_1 / p^{n-1}), \quad (17)
\end{aligned}$$

$$Har^*(p^{n-1}q_1, pi_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} q_1 i^{(2)}) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} q_1 i_1^{(1)}) = W_p^{-q_1 i_1^{(1)}}, \quad (18)$$

а

$$Har^*(\lambda_1, k_1 / p^n) = Pal^*(\lambda_1, k_1 / p^n) = 1, \quad (19)$$

$$Har^*(\lambda_1, p^{n-1}q_1 / p^n) = Pal^*(\lambda_1, p^{n-1}q_1 / p^n) = W_p^{-\lambda_1 q_1}. \quad (20)$$

При выводе этих формул использовано то, что $\langle k^{(n)} \rangle = k^{(n)} \oplus 0 = k^{(n)}$, обобщенный код Грея значений k при $k^{(n)} = 0$ совпадает с кодом Грея значений k_1 , обобщенный код Грея чисел $q_1 p^{n-1}$ имеет ненулевые значения, равные q_1 , только в двух старших разрядах, обобщенный код Грея числа λ_1 равен самому числу, а второй разряд чисел pi_1 совпадает с первым разрядом чисел i_1 . Кроме того, учтено, что первые p ВКФ в системах Пэли и Хармута совпадают между собой и первые p значений этих функций равны 1 (см. (19), (20) и [6]).

Для системы ВКФ-Адамара из формулы (2) получаем

$$Had^*(k_1, pi_1 / p^{n-1}) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=2}^{n-1} k^{(m)} i^{(m)}) \neq Had^*(k_1, i_1 / p^{n-1}).$$

В этой системе нет простой аналитической связи между малоточечными и многоточечными ВКФ при прореживании сигнала. Ее можно получить в этом случае только при совпадающем законе изменения номера и аргумента базисной функции, а это возможно только при одинаковом порядке следования отсчетов сигнала и спектра.

Таким образом, для систем ВКФ при прореженном порядке следования отсчетов сигнала и естественном порядке следования спектра упрощение прямого алгоритма анализа спектра возможно только для упорядочений Пэли и Хармута. Для системы Пэли, используя формулы (13)÷(16), выражение (12) для полного спектра можно преобразовать к следующему виду:

$$X(k_1 \oplus p^{n-1}q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} W_p^{-\lambda_1 q_1} \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) Pal^*(k_1, i_1 / p^{n-1}).$$

Здесь вторая сумма определяет спектр $X^{(\lambda_1)}(k_1)$ промежуточной выборки $x_{\lambda_1}(i_1)$ (см. зависимость (11)). Поэтому

$$X(k_1 \oplus p^{n-1}q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} W_p^{-\lambda_1 q_1} X^{(\lambda_1)}(k_1)$$

или с учетом того, что $W_p^0 = 1$

$$X(k_1 \oplus p^{n-1}q_1) = X^{(0)}(k_1) + \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} X^{(\lambda_1)}(k_1)W_p^{-\lambda_1q_1}, \quad (21)$$

$$q_1 = 0, 1, \dots, p-1; \quad k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1.$$

Это выражение и задает алгоритм БПВК-Пэли на первом уровне прореживания сигнала. В нем полный спектр сигнала выражается через сумму произведений промежуточных спектров на множители $W_p^{-\lambda_1q_1}$.

При практическом использовании алгоритма (21) операцию сложения по модулю p в выражениях номеров отсчета сигнала $i = pi_1 \oplus \lambda_1$ и спектра $k = k_1 \oplus p^{n-1}q_1$ можно заменить на операцию обычного сложения, если учесть, что p -ичный код числа pi_1 всегда содержит 0 в младшем разряде, а код числа λ_1 имеет нулевое значение во всех разрядах, кроме младшего; подобно этому p -ичный код числа k_1 всегда содержит 0 в старшем n -м разряде, а код числа $p^{n-1}q_1$ имеет нулевые значения во всех разрядах, кроме старшего. Поэтому

$$k_1 \oplus p^{n-1}q_1 = k_1 + p^{n-1}q_1, \quad pi_1 \oplus \lambda_1 = pi_1 + \lambda_1 \quad (22)$$

и

$$X(k_1 + p^{n-1}q_1) = X^{(0)}(k_1) + \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} X^{(\lambda_1)}(k_1)W_p^{-\lambda_1q_1}, \quad (23)$$

$$q_1 = 0, 1, \dots, p-1; \quad k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1.$$

Поскольку p^{n-1} делится на p , то использованную процедуру прореживания можно применить и к промежуточным выборкам сигнала при вычислении промежуточных спектров $X^{(\lambda_1)}(k_1)$. Тем самым будет введен второй уровень прореживания и получено дополнительное упрощение алгоритма ДПФ в базисе ВКФ.

Очевидно, что прореживание можно продолжать до тех пор, пока в промежуточных выборках не останется по p отсчетов. В этом случае будет получен полный алгоритм БПВК-Пэли, содержащий $n-1$ уровней прореживания. На произвольном m -м уровне БПВК-Пэли будет иметь следующий вид записи:

$$X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})}(k_m + p^{n-m} q_m) = X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 0)}(k_m) + \sum_{\lambda_m=1}^{p-1} X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}(k_m) W_p^{-\lambda_m q_m}, \quad (23)$$

$$q_\alpha, \lambda_\alpha = 0, 1, \dots, p-1; \quad \alpha = 1, 2, \dots, m; \quad k_m = 0, 1, \dots, p^{n-m} - 1,$$

где

$$X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}(k_m) = \sum_{i_m=0}^{p^{n-m}-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}(i_m) Pal^*(k_m, i_m / p^{n-m}), \quad (24)$$

а

$$x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}(i_m) = x(p^m i_m + p^{m-1} \lambda_m + \dots + p \lambda_2 + \lambda_1). \quad (25)$$

Изменяя в соотношениях (23)-(25) m от 1 до $n-1$, с их помощью можно описать весь процесс построения алгоритма быстрого анализа спектра ВКФ-Пэли для $(n-1)$ уровней прореживания, получив в итоге полный алгоритм БПВК-Пэли. Промежуточные спектры на $(n-1)$ -м уровне прореживания равны

$$\begin{aligned} X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})}(k_{n-1}) &= \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(i_{n-1}) Pal^*(k_{n-1}, i_{n-1} / p) = \\ &= x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(0) + \sum_{i_{n-1}=1}^{p-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(i_{n-1}) W_p^{-k_{n-1} i_{n-1}} \end{aligned} \quad (26)$$

и вычисляются с помощью p -точечных ДПФ над промежуточными выборками на последнем уровне прореживания

$$x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(i_{n-1}) = x(p^{n-1} i_{n-1} + p^{n-2} \lambda_{n-1} + \dots + p \lambda_2 + \lambda_1). \quad (27)$$

При организации процесса вычисления спектра по БПВК-Пэли (24) необходимо индекс m менять в обратном порядке следования от $n-1$ до 1. В этом случае процесс вычисления по алгоритму (23) будет итерационным с начальными значениями в виде спектров (26) конечных выборок (27).

Подсчитаем количество операций, необходимых для реализации полного алгоритма БПВК-Пэли. Начнем со сложений. На каждом m -м уровне прореживания в общем случае на вычисление одного спектрального коэффициента по уравнению (23) затрачивается $(p-1)$ комплексных сложений. Всего таких коэффициентов p^n , поэтому общее число сложений на m -м уровне равно $(p-1)p^n$. Такое же число сложений необходимо и для вычисления всех начальных спектров на $(n-1)$ -м уровне прореживания. В итоге получаем, что полный алгоритм БПВК-Пэли с $(n-1)$ -м

уровнями прореживания потребует в общем случае затрат

$$A_B = n(p-1)p^n = (p-1)N \log_p N \quad (28)$$

сложений.

Теперь найдем число умножений. При одноразовой реализации уравнения (23) в общем случае затрачивается $(p-1)$ умножений на постоянные множители. Число таких реализаций равно $(p-1)p^{n-1}$, поскольку при $q_m = 0$ умножения становятся тривиальными и их можно не выполнять. Поэтому на m -м уровне прореживания алгоритма потребуется выполнение $(p-1)^2 p^{n-1}$ умножений. Столько же умножений будет затрачено и на вычисление начальных спектров (26). Тогда общее число умножений в БПВК-Пэли будет равно

$$M_B = n(p-1)^2 p^{n-1} = (p-1)^2 \frac{N}{p} \log_p N. \quad (29)$$

Следует иметь в виду, что эта формула дает верхнюю оценку числа умножений в БПВК-Пэли. Для конкретных p и n число умножений можно еще уменьшить, исключив из алгоритма дополнительные тривиальные умножения. На этом основывается идея *оптимизации* алгоритмов БПВК.

Полный БПВК-Пэли удобно представлять графически в виде сигнального графа [11], который в этом случае будет иметь $n+1$ вертикальных уровней по p^n узлов в каждом уровне. В каждом узле, кроме узлов первого (крайнего левого) уровня, осуществляется суммирование p величин, поступающих с узлов предыдущего уровня. Поскольку результат, получаемый в узлах, умножается на различные множители, то на графе эти умножения целесообразно показывать с помощью стрелок в соответствующих ветвях графа, указывая либо не указывая около них сами множители.

Пример 1. Записать полный алгоритм БПВК-Пэли с прореживанием по времени и построить его сигнальный граф для $N=9$.

Решение. Поскольку $9 = 3^2$, то $p = 3$, $n = 2$ и алгоритм полного БПВК-Пэли будет иметь только один уровень прореживания. Поэтому для его описания достаточно выражения (23) при начальных данных (26), (27).

Определение промежуточных выборов.

В этом случае

$$x_{\lambda_1}(i_1) = x(3i_1 + \lambda_1), \lambda_1 = 0, 1, 2; i_1 = 0, 1, 2.$$

Поэтому

$$x_0(i_1) = \{x(0), x(3), x(6)\}; x_1(i_1) = \{x(1), x(4), x(7)\}; x_2(i_1) = \{x(2), x(5), x(8)\}.$$

Расчет промежуточного спектра на первом уровне прореживания.

Так как

$$X^{(\lambda_1)}(k_1) = x_{\lambda_1}(0) + x_{\lambda_1}(1)W_3^{-k_1} + x_{\lambda_1}(2)W_3^{-2k_1}, k_1 = 0, 1, 2,$$

то

$$X^{(0)}(0) = x_0(0) + x_0(1) + x_0(2) = x(0) + x(3) + x(6);$$

$$X^{(0)}(1) = x_0(0) + x_0(1)W_3^{-1} + x_0(2)W_3^{-2} = x(0) + x(3)W_3^{-1} + x(6)W_3^{-2};$$

$$X^{(0)}(2) = x_0(0) + x_0(1)W_3^{-2} + x_0(2)W_3^{-1} = x(0) + x(3)W_3^{-2} + x(6)W_3^{-1};$$

$$X^{(1)}(0) = x_1(0) + x_1(1) + x_1(2) = x(1) + x(4) + x(7);$$

$$X^{(1)}(1) = x_1(0) + x_1(1)W_3^{-1} + x_1(2)W_3^{-2} = x(1) + x(4)W_3^{-1} + x(7)W_3^{-2};$$

$$X^{(1)}(2) = x_1(0) + x_1(1)W_3^{-2} + x_1(2)W_3^{-1} = x(1) + x(4)W_3^{-2} + x(7)W_3^{-1};$$

$$X^{(2)}(0) = x_2(0) + x_2(1) + x_2(2) = x(2) + x(5) + x(8);$$

$$X^{(2)}(1) = x_2(0) + x_2(1)W_3^{-1} + x_2(2)W_3^{-2} = x(2) + x(5)W_3^{-1} + x(8)W_3^{-2};$$

$$X^{(2)}(2) = x_2(0) + x_2(1)W_3^{-2} + x_2(2)W_3^{-1} = x(2) + x(5)W_3^{-2} + x(8)W_3^{-1}.$$

Расчет результирующего спектра.

Поскольку

$$X(k_1 + 3q_1) = X^{(0)}(k_1) + X^{(1)}(k_1)W_3^{-q_1} + X^{(2)}(k_1)W_3^{-2q_1}, q_1, k_1 = 0, 1, 2,$$

то

$$X(0) = X^{(0)}(0) + X^{(1)}(0) + X^{(2)}(0); \quad X(1) = X^{(0)}(1) + X^{(1)}(1) + X^{(2)}(1);$$

$$X(2) = X^{(0)}(2) + X^{(1)}(2) + X^{(2)}(2); \quad X(3) = X^{(0)}(0) + X^{(1)}(0)W_3^{-1} + X^{(2)}(0)W_3^{-2};$$

$$X(4) = X^{(0)}(1) + X^{(1)}(1)W_3^{-1} + X^{(2)}(1)W_3^{-2}; \quad X(5) = X^{(0)}(2) + X^{(1)}(2)W_3^{-1} + X^{(2)}(2)W_3^{-2};$$

$$X(6) = X^{(0)}(0) + X^{(1)}(0)W_3^{-2} + X^{(2)}(0)W_3^{-1}; \quad X(7) = X^{(0)}(1) + X^{(1)}(1)W_3^{-2} + X^{(2)}(1)W_3^{-1};$$

$$X(8) = X^{(0)}(2) + X^{(1)}(2)W_3^{-2} + X^{(2)}(2)W_3^{-1}.$$

Сигнальный граф этого алгоритма представлен на рис. 1а. Для его реализации требуется выполнение 36 сложений и 24 нетривиальных умножений, что соответствует оценкам (28), (29) при $N=9$.

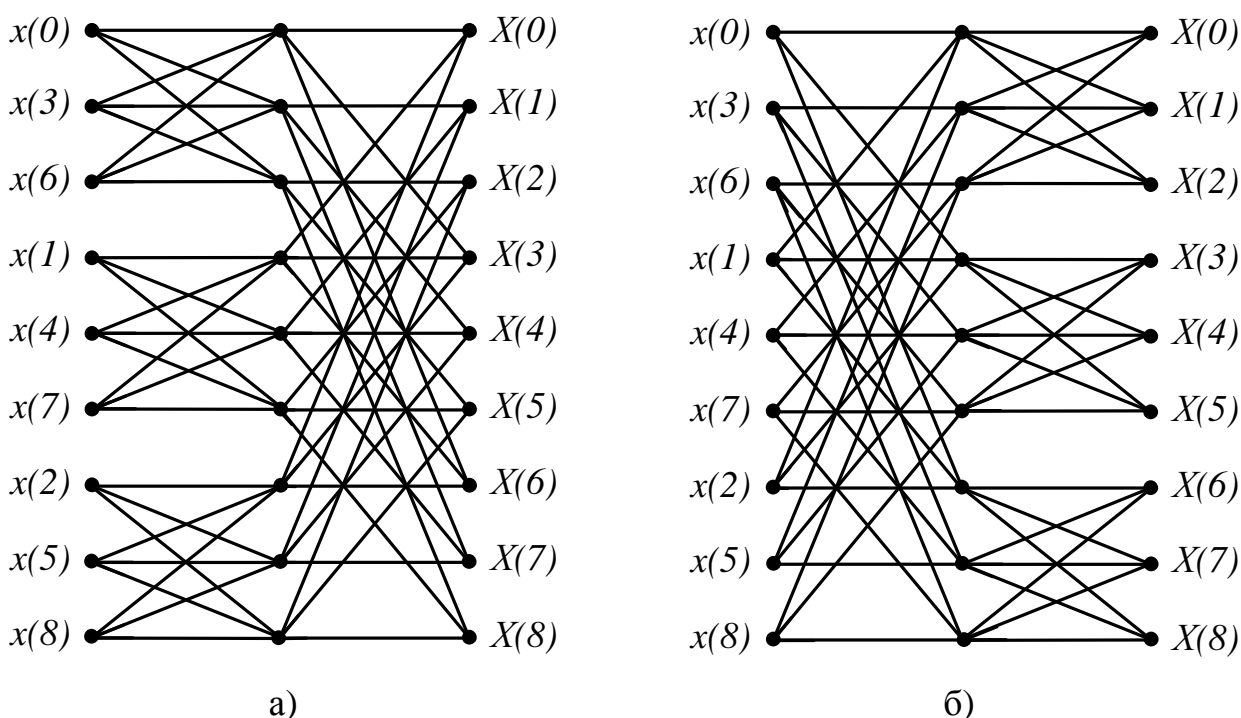


Рис. 1. Сигнальный граф полного БПВК: а) Пэли и б) Хармута

с прореживанием сигнала для $N=9$

Если в общем выражении (12) учесть зависимости (17)÷(20), то после преобразования и учета соотношений (22) получим уравнение для вычисления спектра Виленкина-Крестенсона-Хармута

$$X(k_1 + p^{n-1}q_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} \left[\sum_{\lambda_1=0}^{p-1} x_{\lambda_1}(i_1) W_p^{-(\lambda_1+i_1^{(1)})q_1} \right] Har^*(k_1, i_1 / p^{n-1}).$$

Приняв в нем обозначение

$$x^{(q_1)}(i_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} x_{\lambda_1}(i_1) W_p^{-(\lambda_1+i_1^{(1)})q_1} = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} x(pi_1 + \lambda_1) W_p^{-(\lambda_1+i_1^{(1)})q_1}, \quad (30)$$

его можно переписать в более простом виде

$$X(k_1 + p^{n-1}q_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x^{(q_1)}(i_1) Har^*(k_1, i_1 / p^{n-1}), \quad (31)$$

$$q_1 = 0, 1, \dots, p-1; k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1.$$

Зависимости (30) и (31) представляют собой аналитическое описание алгоритма БПВК-Хармута на первом уровне прореживания сигнала. В этом алгоритме искомый спектр не выражается через спектры промежуточных выборок, однако наличие однотипных вычислительных процедур делает его в реализации проще прямого алгоритма (5).

Процедуру прореживания сигнала можно применить и для вычисления ДПФ (31), введя второй уровень прореживания, а затем третий и т.д. до $(n-1)$ -го уровня, получив в итоге полный алгоритм БПВК-Хармута. На произвольном m -м уровне быстрый алгоритм имеет следующее описание:

$$X(k_m + p^{n-m}q_m + \dots + p^{n-2}q_2 + p^{n-1}q_1) = \sum_{i_m=0}^{p^{n-m}-1} x^{(q_1, q_2, \dots, q_m)}(i_m) Har^*(k_m, i_m / p^{n-m}), \quad (32)$$

$$q_\alpha = 0, 1, \dots, p-1; \alpha = 1, 2, \dots, m; k_m = 0, 1, \dots, p^{n-m}-1,$$

где

$$x^{(q_1, q_2, \dots, q_m)}(i_m) = \sum_{\lambda_m=0}^{p-1} x^{(q_1, q_2, \dots, q_{m-1})}(pi_m + \lambda_m) W_p^{-(\lambda_m+i_m^{(1)})q_m}. \quad (33)$$

В последнем выражении величина $i_m^{(1)}$ означает первый разряд p -ичного кода числа i_m .

В предельном случае при $m = n-1$ для полного алгоритма получаем

$$\begin{aligned} X(k_{n-1} + pq_{n-1} + \dots + p^{n-2}q_2 + p^{n-1}q_1) &= x^{(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}(0) + \sum_{i_{n-1}=1}^{p-1} x^{(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}(i_{n-1}) Har^*(k_{n-1}, i_{n-1} / p) = \\ &= x^{(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}(0) + \sum_{i_{n-1}=1}^{p-1} x^{(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}(i_{n-1}) W_p^{-k_{n-1} i_{n-1}}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$q_\alpha = 0, 1, \dots, p-1; \alpha = 1, 2, \dots, n-1; k_{n-1} = 0, 1, \dots, p-1,$$

где

$$x^{(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}(i_{n-1}) = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{p-1} x^{(q_1, q_2, \dots, q_{n-2})}(pi_{n-1} + \lambda_{n-1}) W_p^{-(\lambda_{n-1} + i_{n-1}^{(1)})q_{n-1}}. \quad (35)$$

Таким образом, в полном алгоритме БПВК-Хармута по уравнению (33) рекуррентно вычисляются все промежуточные величины $x^{(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}(i_{n-1})$ при начальных условиях (30), а затем с помощью p -ичного ДПФ (34) находятся все составляющие искомого спектра сигнала.

Полному БПВК-Хармута будет соответствовать сигнальный граф, отличающийся по структуре от графа БПВК-Пэли, но имеющий такое же число уровней, узлов и ветвей, содержащих умножения на постоянные множители. Поэтому по сложности БПВК-Хармута идентичны БПВК-Пэли и их вычислительные показатели также можно оценить по формулам (28) и (29).

Пример 2. Записать полный алгоритм БПВК-Хармута с прореживанием сигнала и построить его сигнальный граф для $N=9$.

Решение. Как и в предыдущем примере, здесь для вычисления спектра по полному алгоритму понадобится только один уровень прореживания ($m=1$). Поэтому промежуточные величины задаются выражением

$$x^{(q_1)}(i_1) = x(3i_1)W_3^{-qi_1^{(1)}} + x(3i_1+1)W_3^{-(1+i_1^{(1)})q_1} + x(3i_1+2)W_3^{-(2+i_1^{(1)})q_1}; \quad q_1, i_1 = 0, 1, 2;$$

и равны:

$$x^{(0)}(0) = x(0) + x(1) + x(2); \quad x^{(0)}(1) = x(3) + x(4) + x(5); \quad x^{(0)}(2) = x(6) + x(7) + x(8);$$

$$x^{(1)}(0) = x(0) + x(1)W_3^{-1} + x(2)W_3^{-2}; \quad x^{(1)}(1) = x(3)W_3^{-1} + x(4)W_3^{-2} + x(5); \quad x^{(1)}(2) = x(6)W_3^{-2} +$$

$$+ x(7) + x(8)W_3^{-1}; \quad x^{(2)}(0) = x(0) + x(1)W_3^{-2} + x(2)W_3^{-1}; \quad x^{(2)}(1) = x(3)W_3^{-2} + x(4)W_3^{-1} + x(5);$$

$$x^{(2)}(2) = x(6)W_3^{-1} + x(7) + x(8)W_3^{-2}; \quad \text{а результирующий спектр определяется уравнением}$$

$$X(k_1 + 3q_1) = x^{(q_1)}(0) + x^{(q_1)}(1)W_3^{-k_1} + x^{(q_1)}(2)W_3^{-2k_1}; \quad k_1 = 0, 1, 2$$

и равен:

$$X(0) = x^{(0)}(0) + x^{(0)}(1) + x^{(0)}(2); \quad X(1) = x^{(0)}(0) + x^{(0)}(1)W_3^{-1} + x^{(0)}(2)W_3^{-2}; \quad X(2) = x^{(0)}(0) +$$

$$\begin{aligned}
&+x^{(0)}(1)W_3^{-2} + x^{(0)}(2)W_3^{-1}; X(3) = x^{(1)}(0) + x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2); X(4) = x^{(1)}(0) + x^{(1)}(1)W_3^{-1} + \\
&+x^{(1)}(2)W_3^{-2}; X(5) = x^{(1)}(0) + x^{(1)}(1)W_3^{-2} + x^{(1)}(2)W_3^{-1}; X(6) = x^{(2)}(0) + x^{(2)}(1) + x^{(2)}(2); \\
&X(7) = x^{(2)}(0) + x^{(2)}(1)W_3^{-1} + x^{(2)}(2)W_3^{-2}; X(8) = x^{(2)}(0) + x^{(2)}(1)W_3^{-2} + x^{(2)}(2)W_3^{-1}.
\end{aligned}$$

Сигнальный граф этого алгоритма приведен на рис. 1б. Число сложений и умножений в нем такое же, что и в графе БПВК-Пэли рис. 1а.

_____ . _____

4. Алгоритм БПВК Пэли и Хармута с естественным порядком следования отсчетов сигнала и прореженным порядком следования отсчетов спектра

Используем второй способ формирования промежуточных выборок и разделим всю N —точечную выборку сигнала $x(i)$ на p промежуточных выборок $x_{\lambda_1}(i_1)$, $\lambda_1 = 0, 1, \dots, p-1$; $i_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1$, состоящих из отсчетов с номерами $i = i_1 \oplus p^{n-1}\lambda_1$ (т.е. $x_{\lambda_1}(i_1) = x(i_1 \oplus p^{n-1}\lambda_1)$), спектры которых определяются выражением (11). Тогда полный спектр (5) можно представить как

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)Wal^*(k, (i_1 + p^{n-1}\lambda_1) / p^n) = \\
&= \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)Wal^*(k, i_1 / p^n)Wal^*(k, p^{n-1}\lambda_1 / p^n). \quad (36)
\end{aligned}$$

При этом использовано свойство мультипликативности ВКФ и соотношение $i_1 \oplus p^{n-1}\lambda_1 = i_1 + p^{n-1}\lambda_1$ (см. формулы (22)). Запишем теперь с помощью этого уравнения спектральные составляющие с номерами $pk_1 + q_1 = pk_1 \oplus q_1$, $q_1 = 0, 1, \dots, p-1$; $k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1$. С учетом мультипликативности ВКФ они будут равны

$$\begin{aligned}
X(pk_1 + q_1) &= \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} Wal^*(pk_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n)Wal^*(q_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n) \times \\
&\times \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)Wal^*(pk_1, i_1 / p^n)Wal^*(q_1, i_1 / p^n). \quad (37)
\end{aligned}$$

Для систем Пэли и Хармута, используя соотношения (13)÷(20) и свойство двойственности ВКФ,

получим:

$$Pal^*(pk_1, i_1 / p^n) = Pal^*(k_1, i_1 / p^{n-1}); \quad (38)$$

$$Har^*(pk_1, i_1 / p^n) = Har^*(k_1, i_1 / p^{n-1}); \quad (39)$$

$$Pal^*(q_1, i_1 / p^n) = Har^*(q_1, i_1 / p^n) = 1, \quad (40)$$

$$Pal^*(pk_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n) = Pal^*(p^{n-1}\lambda_1, pk_1 / p^n) = 1, \quad (41)$$

$$Har^*(pk_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n) = Har^*(p^{n-1}\lambda_1, pk_1 / p^n) = W_p^{-\lambda_1 k_1^{(1)}}, \quad (42)$$

$$Pal^*(q_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n) = Har^*(q_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n) = W_p^{-q_1 \lambda_1}. \quad (43)$$

В формуле (42) $k_1^{(1)}$ обозначает первый разряд p -ичного кода числа k_1 . Используя соотношения (38)–(43) в уравнении (37) для системы Пэли получаем

$$X(pk_1 + q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} W_p^{-q_1 \lambda_1} \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) Pal^*(k_1, i_1 / p^{n-1}).$$

Здесь часть выражения, стоящая под знаком второй суммы, описывает спектр Пэли промежуточной выборки (см. (11)) и поэтому

$$X(pk_1 + q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} X^{(\lambda_1)}(k_1) W_p^{-q_1 \lambda_1} = X^{(0)}(k_1) + \sum_{\lambda_1=1}^{p-1} X^{(\lambda_1)}(k_1) W_p^{-q_1 \lambda_1}, \quad (44)$$

$$q_1 = 0, 1, \dots, p-1; \quad k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1} - 1.$$

Это и есть алгоритм БПВК-Пэли на первом уровне прореживания спектра. В этом алгоритме, как и в БПВК-Пэли с прореживанием сигнала, искомый спектр выражается через сумму промежуточных спектров, умноженных на соответствующие постоянные множители.

Рекурсивно продолжая процедуру прореживания, на m -уровне получим

$$X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})}(pk_m + q_m) = X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 0)}(k_m) + \sum_{\lambda_1=1}^{p-1} X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}(k_m) W_p^{-\lambda_m q_m}, \quad (45)$$

$$q_\alpha = 0, 1, \dots, p-1; \quad \alpha = 1, 2, \dots, m; \quad k_m = 0, 1, \dots, p^{n-m} - 1,$$

где

$$X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}(k_m) = \sum_{i_m=0}^{p^{n-m}-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}(i_m) Pal^*(k_m, i_m / 2^{n-m}), \quad (46)$$

а

$$x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}(i_m) = x(i_m + p^{n-m}\lambda_m + \dots + p^{n-2}\lambda_2 + p^{n-1}\lambda_1). \quad (47)$$

Изменяя m от 1 до $n-1$, можно с помощью соотношений (45)÷(47) описать полный алгоритм БПВК-Пэли с прореживанием спектра. При этом промежуточный спектр на последнем $(n-1)$ -м уровне прореживания вычисляется с помощью p -точечного ДПФ

$$\begin{aligned} X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})}(k_{n-1}) &= x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(0) + \sum_{i_{n-1}=1}^{p-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(i_{n-1}) Pal^*(k_{n-1}, i_{n-1} / p) = \\ &= x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(0) + \sum_{i_{n-1}=1}^{p-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(i_{n-1}) W_p^{-k_{n-1} i_{n-1}} \end{aligned} \quad (48)$$

над выборками

$$x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(i_{n-1}) = x(i_{n-1} + p\lambda_{n-1} + \dots + p^{n-2}\lambda_2 + p^{n-1}\lambda_1). \quad (49)$$

Как и в случае с БПВК-Пэли с прореживанием сигнала, в БПВК-Пэли с прореживанием спектра при вычислении спектра по полному алгоритму параметр m следует менять в обратном порядке от $n-1$ до 1, реализуя соотношение (45) при исходных данных (48), (49).

Полному алгоритму БПВК-Пэли с прореживанием спектра будет соответствовать сигнальный граф со структурой, близкой к структуре графа с прореживанием сигнала. Сложностные характеристики этих графов совпадают, поэтому количество операций в алгоритме с прореживанием спектра также можно оценить по формулам (28) и (29).

Пример 3. Записать полный алгоритм БПВК-Пэли с прореживанием спектра и построить его сигнальный граф для $N=9$.

Решение. В этом случае полный быстрый алгоритм имеет один уровень прореживания, промежуточные выборки на котором будут равны: $x_{\lambda_1}(i_1) = x(i_1 + 3\lambda_1)$, $\lambda_1, i_1 = 0, 1, 2$. Поэтому $x_0(i_1) = \{x(0), x(1), x(2)\}$; $x_1(i_1) = \{x(3), x(4), x(5)\}$;

$x_2(i_1) = \{x(6), x(7), x(8)\}$. Спектры этих выборок в соответствии с общим уравнением (48) имеют вид

$$X^{(\lambda_1)}(k_1) = x_{\lambda_1}(0) + x_{\lambda_1}(1)W_3^{-k_1} + x_{\lambda_1}(2)W_3^{-2k_1}, \quad k_1 = 0, 1, 2$$

и равны:

$$X^{(0)}(0) = x_0(0) + x_0(1) + x_0(2) = x(0) + x(1) + x(2);$$

$$X^{(0)}(1) = x_0(0) + x_0(1)W_3^{-1} + x_0(2)W_3^{-2} = x(0) + x(1)W_3^{-1} + x(2)W_3^{-2};$$

$$X^{(0)}(2) = x_0(0) + x_0(1)W_3^{-2} + x_0(2)W_3^{-1} = x(0) + x(1)W_3^{-2} + x(2)W_3^{-1};$$

$$X^{(1)}(0) = x_1(0) + x_1(1) + x_1(2) = x(3) + x(4) + x(5);$$

$$X^{(1)}(1) = x_1(0) + x_1(1)W_3^{-1} + x_1(2)W_3^{-2} = x(3) + x(4)W_3^{-1} + x(5)W_3^{-2};$$

$$X^{(1)}(2) = x_1(0) + x_1(1)W_3^{-2} + x_1(2)W_3^{-1} = x(3) + x(4)W_3^{-2} + x(5)W_3^{-1};$$

$$X^{(2)}(0) = x_2(0) + x_2(1) + x_2(2) = x(6) + x(7) + x(8);$$

$$X^{(2)}(1) = x_2(0) + x_2(1)W_3^{-1} + x_2(2)W_3^{-2} = x(6) + x(7)W_3^{-1} + x(8)W_3^{-2};$$

$$X^{(2)}(2) = x_2(0) + x_2(1)W_3^{-2} + x_2(2)W_3^{-1} = x(6) + x(7)W_3^{-2} + x(8)W_3^{-1}.$$

Искомый полный спектр на основании уравнения (44) записывается в этом случае так:

$$X(3k_1 + q_1) = X^{(0)}(k_1) + X^{(1)}(k_1)W_3^{-q_1} + X^{(2)}(k_1)W_3^{-2q_1}, \quad q_1, k_1 = 0, 1, 2$$

и равен:

$$X(0) = X^{(0)}(0) + X^{(1)}(0) + X^{(2)}(0); \quad X(3) = X^{(0)}(1) + X^{(1)}(1) + X^{(2)}(1);$$

$$X(6) = X^{(0)}(2) + X^{(1)}(2) + X^{(2)}(2); \quad X(1) = X^{(0)}(0) + X^{(1)}(0)W_3^{-1} + X^{(2)}(0)W_3^{-2};$$

$$X(4) = X^{(0)}(1) + X^{(1)}(1)W_3^{-1} + X^{(2)}(1)W_3^{-2}; \quad X(7) = X^{(0)}(2) + X^{(1)}(2)W_3^{-1} + X^{(2)}(2)W_3^{-2};$$

$$X(2) = X^{(0)}(0) + X^{(1)}(0)W_3^{-2} + X^{(2)}(0)W_3^{-1}; \quad X(5) = X^{(0)}(1) + X^{(1)}(1)W_3^{-2} + X^{(2)}(1)W_3^{-1};$$

$$X(8) = X^{(0)}(2) + X^{(1)}(2)W_3^{-2} + X^{(2)}(2)W_3^{-1}.$$

Сигнальный граф, иллюстрирующий этот алгоритм, представлен на рис. 2а. Он имеет такие же вычислительные характеристики, как и графы, приведенные на рис. 1а, б.

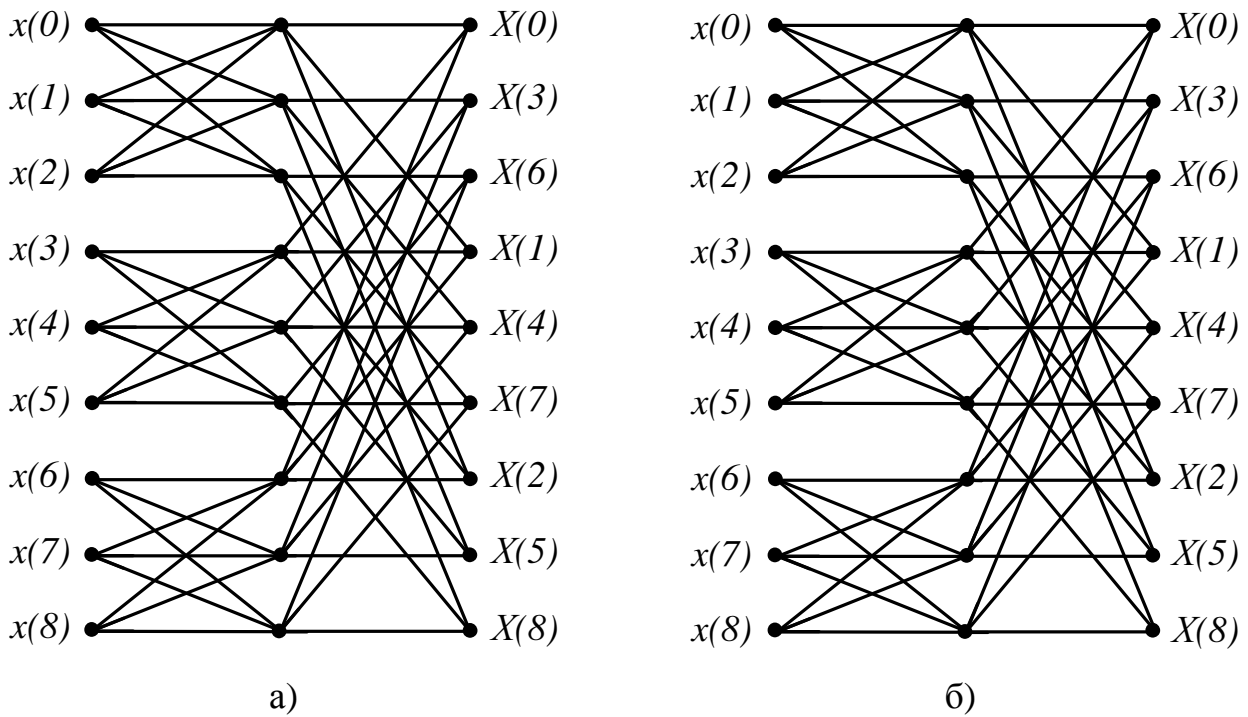


Рис. 2. Сигнальный граф полного БПВК: а) Пэли и б) Хармута

с прореживанием спектра для $N=9$

Если теперь в общем уравнении (37) учесть формулы (40)÷(43) для ВКФ-Хармута, то из него после необходимых преобразований и сравнения с зависимостью (11) получим алгоритм БПВК-Хармута на первом уровне прореживания спектра

$$X(pk_1 + q_1) = X^{(0)}(k_1) + \sum_{\lambda_1=1}^{p-1} X^{(\lambda_1)}(k_1) W_p^{-(q_1+k_1^{(1)})\lambda_1} \quad (50)$$

$$q_1 = 0, 1, \dots, p-1; k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-m} - 1,$$

где промежуточный спектр $X^{(\lambda_1)}(k_1)$ должен вычисляться по уравнению (11). В этом алгоритме искомый полный спектр выражается с помощью линейной комбинации промежуточных спектров, в чем состоит его принципиальное отличие от БПВК-Хармута с прореживанием сигнала.

Процесс прореживания можно продолжить, применив его к вычислению промежуточных спектров. При этом будут введены новые уровни прореживания. На m -м уровне

$$X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})}(pk_m + q_m) = X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 0)}(k_m) + \sum_{\lambda_m=1}^{p-1} X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}(k_m) W_p^{-(q_m + k_m^{(1)})\lambda_m}, \quad (51)$$

$$q_\alpha = 0, 1, \dots, p-1; \alpha = 1, 2, \dots, m; k_m = 0, 1, \dots, p^{n-m} - 1,$$

где $k_m^{(1)}$ является первым разрядом p -ичного кода числа k_m , а промежуточные спектры $X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}(k_m)$ вычисляются с помощью p^{n-m} -ичных ДПФ-Виленкина-Крестенсона

$$X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}(k_m) = \sum_{i_m=0}^{p^{n-m}-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}(i_m) Har^*(k_m, i_m / p^{n-m}) \quad (52)$$

промежуточных выборок (47). При реализации полного алгоритма БПВК-Хармута результирующий спектр рекурсивно вычисляется по уравнению (51) при изменении параметра m от $n-1$ до 1 и использовании спектров

$$X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})}(k_{n-1}) = \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(i_{n-1}) Har^*(k_{n-1}, i_{n-1} / p) = x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(0) + \sum_{i_{n-1}=1}^{p-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(i_{n-1}) W_p^{-k_{n-1} i_{n-1}} \quad (53)$$

промежуточных выборок на последнем уровне (49) в качестве начальных условий. Сигнальный граф полного БПВК-Хармута в этом случае близок к графу аналогичного полного БПВК-Пэли.

Пример 4. Записать полный алгоритм БПВК-Хармута с прореживанием спектра и построить его сигнальный граф для $N=9$.

Решение. Как следует из уравнений (48) и (53), промежуточные выборки и их спектры на первом уровне прореживания в этом примере остаются такими же, как в предыдущем примере. Результирующий спектр на основании соотношений (50) будет вычисляться по уравнению

$$X(3k_1 + q_1) = X^{(0)}(k_1) + X^{(1)}(k_1) W_3^{-(q_1 + k_1^{(1)})} + X^{(2)}(k_1) W_3^{-2(q_1 + k_1^{(1)})}, \quad q_1, k_1 = 0, 1, 2$$

и равен:

$$X(0) = X^{(0)}(0) + X^{(1)}(0) + X^{(2)}(0); \quad X(3) = X^{(0)}(1) + X^{(1)}(1) W_3^{-1} + X^{(2)}(1) W_3^{-2};$$

$$X(6) = X^{(0)}(2) + X^{(1)}(2) W_3^{-2} + X^{(2)}(2) W_3^{-1}; \quad X(1) = X^{(0)}(0) + X^{(1)}(0) W_3^{-1} + X^{(2)}(0) W_3^{-2};$$

$$X(4) = X^{(0)}(1) + X^{(1)}(1) W_3^{-2} + X^{(2)}(1) W_3^{-1}; \quad X(7) = X^{(0)}(2) + X^{(1)}(2) W_3^{-1} + X^{(2)}(2);$$

$$X(2) = X^{(0)}(0) + X^{(1)}(0)W_3^{-2} + X^{(2)}(0)W_3^{-1}; \quad X(5) = X^{(0)}(1) + X^{(1)}(1) + X^{(2)}(1);$$

$$X(8) = X^{(0)}(2) + X^{(1)}(2)W_3^{-1} + X^{(2)}(2)W_3^{-2}.$$

Сигнальный граф алгоритма для этого примера приведен на рис. 2б.

_____ . _____

5. Алгоритмы БПВК-Адамара с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и спектра.

Рассмотрим теперь БПВК-Адамара. Как уже отмечалось ранее, для ВКФ-Адамара, взаимосвязь между многоточечными и малоточечными базисными функциями, без которой невозможно построение быстрых алгоритмов, существует только при одинаковых законах изменения аргумента и номера функции. Поэтому для систем ВКФ-Адамара возможно существование двух типов БПВК: с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и спектра и с естественным порядком следования отсчетов сигнала и спектра.

Получим сначала первые из них. Для этого сохраним процедуру прореживания сигнала $x_{\lambda_1}(i_1) = x(pi_1 \oplus \lambda_1)$, $\lambda_1 = 0, 1, \dots, p-1$; $i_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1$ и её же применим для искомого спектра, представив номер k в нем в виде $k = pk_1 \oplus q_1 = pk_1 + q_1$, $q_1 = 0, 1, \dots, p-1$; $k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1$. Тогда, используя свойство мультипликативности ВКФ-Адамара, из ряда (12) получим

$$X(pk_1 + q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} Had^*(pk_1, \lambda_1 / p^n) Had^*(q_1, \lambda_1 / p^n) \sum_{i_1=1}^{p-1} x_{\lambda_1}(i_1) Had^*(pk_1, pi_1 / p^n) Had^*(q_1, pi_1 / p^n).$$

Но

$$Had^*(pk_1, \lambda_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} 0 \cdot \lambda_1) = 1,$$

$$Had^*(q_1, \lambda_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} q_1 \lambda_1) = W_p^{-\lambda_1 q_1},$$

$$Had^*(pk_1, pi_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^{n-1} k_1^{(m)} i_1^{(m)}) = Had^*(k_1, i_1 / p^{n-1}),$$

$$\text{Had}^*(q_1, pi_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} q_1 \cdot 0) = 1.$$

Поэтому

$$X(pk_1 + q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} W_p^{-\lambda_1 q_1} \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) \text{Had}^*(k_1, i_1 / p^{n-1}).$$

И, учитывая, что в этом выражении сумма по i_1 задает промежуточный спектр $X^{(\lambda_1)}(k_1)$ (11), окончательно получаем:

$$X(pk_1 + q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} X^{(\lambda_1)}(k_1) W_p^{-\lambda_1 q_1} = X^{(0)}(k_1) + \sum_{\lambda_1=1}^{p-1} X^{(\lambda_1)}(k_1) W_p^{-\lambda_1 q_1},$$

(54)

$$q_1 = 0, 1, \dots, p-1; \quad k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1.$$

Это и есть алгоритм БПВК-Адамара на первом уровне прореживания. По форме записи он полностью совпадает с алгоритмом БПВК-Пэли с прореживанием спектра (44).

Этот алгоритм можно рекурсивно распространить и на вычисление промежуточных спектров, причем на m -м уровне прореживания он представляется в виде выражений (45) и (46) с заменой в (46) ВКФ-Пэли на ВКФ-Адамара. При этом промежуточные выборки должны задаваться соотношением (25). В полном алгоритме БПВК-Адамара параметр m также должен изменяться от $n-1$ до 1, а промежуточные спектры на последнем $(n-1)$ -м уровне прореживания вычисляться по ДПФ (48) над промежуточными выборками (27). Сигнальный граф БПВК-Адамара по структуре будет совпадать с графом БПВК-Пэли с прореживанием сигнала, но с другим прореженным порядком следования отсчетов спектра.

Пример 5. Записать полный алгоритм БПВК-Адамара первого типа и построить его сигнальный граф для $N=9$.

Решение. Поскольку для $N=9$ полный БПВК имеет один уровень прореживания, то промежуточные выборки и их спектры на этом уровне совпадают с выборками и спектрами примера 1. Полный же спектр $X(k)$ в соответствии с уравнением (54) по форме записи будет совпадать с полным спектром ВКФ-Пэли примера 3. Сигнальный граф этого БПВК-Адамара приведен на рис. 3а и по структуре совпадает с графом рис. 1а.

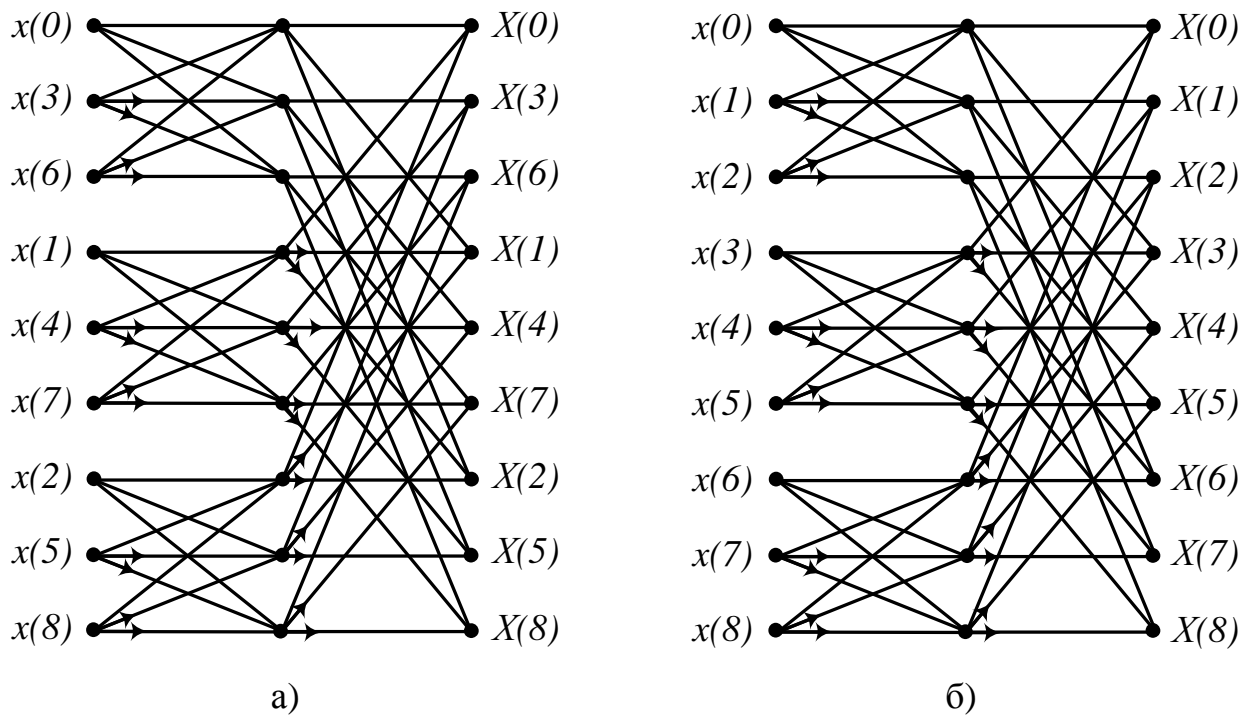


Рис. 3. Сигнальный граф полного БПВК-Адамара с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и спектра (а) и естественным порядком следования отсчетов сигнала и спектра (б) для $N=9$

6. Алгоритмы БПВК-Адамара с естественным порядком следования отсчетов сигнала и спектра.

Разобьем исходный сигнал на p соприкасающихся секций $x_{\lambda_1}(i_1) = x(i_1 \oplus p^{n-1}\lambda_1) = x(i_1 + p^{n-1}\lambda_1)$, $\lambda_1 = 0, 1, \dots, p-1$, $i_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1$ так, как это делается в быстрых алгоритмах Пэли и Хармута с прореживанием спектра. На такие же секции разобьем и результирующий спектр сигнала $X(k_1 + p^{n-1}q_1)$, $q_1 = 0, 1, \dots, p-1$; $k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1$. Если теперь для вычисления составляющих этого спектра воспользоваться уравнением (36), то его путем преобразования с учетом формул (22) можно привести к следующему виду:

$$X(k_1 + p^{n-1}q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} Had^*(k_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n) Had^*(p^{n-1}q_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n) \times \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) Had^*(k_1, i_1 / p^n) Had^*(p^{n-1}\lambda_1, i_1 / p^n).$$

Однако

$$Had^*(k_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} 0 \cdot \lambda_1) = 1,$$

$$Had^*(p^{n-1}q_1, p^{n-1}\lambda_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} q_1 \lambda_1) = W_p^{-\lambda_1 q_1},$$

$$Had^*(p^{n-1}\lambda_1, i_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} \lambda_1 \cdot 0) = 1,$$

$$Had^*(k_1, i_1 / p^n) = \exp(-j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^{n-1} k_1^{(m)} i_1^{(m)}) = Had^*(k_1, i_1 / p^{n-1})$$

Поэтому и в этом случае

$$X(k_1 + p^{n-1}q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} W_p^{-\lambda_1 q_1} \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) Had^*(k_1, i_1 / p^{n-1}) = X^{(0)}(k_1) + \sum_{\lambda_1=1}^{p-1} X^{(\lambda_1)}(k_1) W_p^{-\lambda_1 q_1},$$

(55)

$$q_1 = 0, 1, \dots, p-1; \quad k_1 = 0, 1, \dots, p^{n-1}-1.$$

Полученное выражение определяет алгоритм БПВК-Адамара на первом уровне прореживания. Оно совпадает с выражением (21) алгоритма БПВК-Пэли с прореживанием сигнала. Продолжая процедуру разбиения сигнала и спектра на соприкасающиеся секции, БПВК-Адамара с m уровнями прореживания и полное БПВК-Адамара можно представить уравнениями (23), (24), (26) с заменой ВКФ-Пэли на ВКФ-Адамара и с промежуточными выборками (47) и (49). Сигнальный граф полного БПВК-Адамара этого типа по структуре будет совпадать с графом БПВК-Пэли с прореживанием по частоте. Однако порядок расположения спектральных составляющих на нем будет таким же, как на графе БПВК-Пэли с прореживанием сигнала.

Пример 6. Записать полный алгоритм БПВК-Адамара с естественным порядком следования отсчетов сигнала и спектра и построить его сигнальный граф для $N=9$.

Решение. Полный алгоритм будет иметь один уровень прореживания и для его описания достаточно выражения (55) при $q_1, k_1 = 0, 1, 2$. Промежуточные выборки и их спектры при этом совпадут с промежуточными выборками и спектрами примера 3, а искомый спектр по форме записи совпадет с полным спектром примера 1. Сигнальный граф этого алгоритма приведен на рис. 3б. По структуре он совпадает с графом рис. 2а.

Заключение.

Таким образом, в работе получено целое семейство быстрых алгоритмов анализа спектра Виленкина-Крестенсона, различающихся способами упорядочения базисных функций и прореживания входного сигнала и его спектра. Все эти алгоритмы в предельном своем варианте с максимальным числом уровней прореживания сводятся к вычислению многоточечных дискретных преобразований Виленкина-Крестенсона с помощью малоточечных ДПФ в комплексном экспоненциальном базисе ДЭФ. Единство такого подхода проявилось как в сходстве аналитических описаний этих алгоритмов, так и в сходстве структур соответствующих им сигнальных графов. По этой же причине все модификации алгоритмов БПВК обладают одинаковыми сложностными характеристиками, хорошо структурированы и достаточно просты в программировании. Более того, однотипность вычислительного процесса в БПВК позволяет использовать для их реализации одно и то же программное обеспечение.

Полученные результаты носят обобщающий характер и при значениях $p = 2$ и $n \neq 1$, при которых ВКФ переходят в функции Уолша, все типы БПВК так же переходят в соответствующие им модификации алгоритмов быстрого преобразования Уолша (БПУ) [9, 14]. Процесс анализа спектра в этом случае представляется в виде совокупности 2-точечных ДПФ, которые выполняются без умножений. Оценки числа сложений в БПВК при $p = 2$ так же становятся оценками числа сложений в БПУ.

Из сравнения формул (6), (28) и (29) следует, что применение разработанных БПВК позволяет в порядки раз сократить число вычислительных операций при анализе спектра Виленкина-Крестенсона, особенно при больших объемах выборок обрабатываемых сигналов, что делает перспективным их использование для решения задач ЦОС в системах обработки жесткого реального времени.

В развитие работы планируется использование полученных БПВК для разработки быстрых алгоритмов скользящего анализа спектра, обладающих дополнительной вычислительной эффективностью при обработке сигналов по методу скользящего окна.

Список литературы

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: пер. с англ. М.: Техносфера, 2007. 856 с.
2. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход : пер. с англ. 2-е изд. М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. 992 с.

3. Ипатов В. Широкополосные системы и кодовое разделение символов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007. 488 с.
4. Арслан Х., Чен Чж. Н., Бенедетто М. Сверхширокополосная беспроводная связь: пер. с англ. М.: Техносфера, 2008. 550 с.
5. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.
6. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио, 1972. 208 с.
7. Дагман Э.Е., Кухарев Г.А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983. 232 с.
8. Власенко В.А., Лаппа Ю.М., Ярославский Л.П. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. М.: Наука, 1990. 180 с.
9. Смирнов Ю.М., Воробьев Г.Н., Потапов Е.С., Сюзев В.В. Быстрые преобразования Уолша для скользящего анализа спектра // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, № 5. С. 950-957.
10. Сюзев В.В. Быстрые преобразования Фурье для скользящего анализа спектра // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 1998. № 2. С. 29-38.
11. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: пер. с англ. М.: Мир, 1989. 448 с.
12. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 175 с.
13. Сюзев В.В. Теоретические основы спектрального анализа в базисе Хартли // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/230816.html> (дата обращения 01.12.2013).
14. Сюзев В.В. Скалярный метод синтеза быстрых преобразований Уолша-Адамара // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2011. Спец. вып. «Информационные технологии и компьютерные системы». С. 128-137.
15. Сюзев В.В. Спектральный анализ в базисах функций Хаара // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2011. № 2. С. 48-67.
16. Сюзев В.В. Скользящие теоретико-числовые преобразования Рейдера // Инженерный журнал: Наука и инновации. 2013. № 11. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/1062.html> (дата обращения 01.12.2013).

Synthesis methods of the fast Vilenkin-Chrestenson transforms

01, January 2014

DOI: 10.7463/0114.0687462

Syuzev V.V.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation
v.suzev@bmstu.ru

This paper deals with the synthesis methods of the high efficiency fast Vilenkin-Chrestenson transforms, using their scalar representation form and distinctive decomposition methods of multipoint transforms. Analytical expressions for the fast Vilenkin-Chrestenson algorithms were obtained at various levels of decimation of signals' original samples along with analytical estimations of their computational complexity. Tools for graphical representation of this computational process were presented in the form of signal graphs. The presented theoretical results were illustrated by specific examples which confirmed their applied practicability and efficiency.

Publications with keywords: [computation complexities](#), [Vilenkin- Christenson](#), [the fastest conversion](#), [decimation signal](#), [signal graphs](#)

Publications with words: [computation complexities](#), [Vilenkin- Christenson](#), [the fastest conversion](#), [decimation signal](#), [signal graphs](#)

References

1. Oppenheim A.V., Schafer R.W. *Discrete-Time Signal Processing*. Pearson Education, 1999, 870 p. (Russ. ed.: Oppenheim A.V., Schafer R.W. *Tsifrovaia obrabotka signalov*. Moscow, Tekhnosfera, 2007. 856 p.).
2. Ifeachor E.C., Jervis B.W. *Digital Signal Processing. A Practical Approach*. Prentice Hall, 2002. 862 p. (Russ. ed.: Ifeachor E.C., Jervis B.W. *Tsifrovaya obrabotka signalov: prakticheskiy podkhod*. Moscow, Publishing House "Vil'yams", 2004. 992 p.).
3. Ipatov V. *Shirokopolosnye sistemy i kodovoe razdelenie simvolov. Printsipy i prilozheniya* [Broadband systems and code division signals. Principles and Applications]. Moscow, Tekhnosfera, 2007. 488 p.
4. Arslan H., Chen Z.N., Benedetto M.G. *Ultra Wideband Wireless Communication*. Wiley, 2006. 520 p. (Russ. ed.: Arslan H., Chen Z.N., Benedetto M.G. *Sverkhshirokopolosnaya besprovodnaya svyaz'*. Moscow, Tekhnosfera, 2008. 550 p.)
5. Zalmanzon L.A. *Preobrazovaniya Fur'e, Uolsha, Khaara i ikh primeneniye v upravlenii, svyazi i*

drugikh oblastiakh [Fourier, Walsh, Haar's transforms and their application in management, communications and other areas]. Moscow, Nauka, 1989. 496 p.

6. Trakhtman A.M., Trakhtman V.A. *Osnovy teorii diskretnykh signalov na konechnykh intervalakh* [Fundamentals of the theory of digital signals on finite intervals]. Moscow, Sovetskoe radio, 1972. 208 p.