НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Достаточное условие управляемости аффинной системы

08, август 2012

DOI: 10.7463/0812.0445546

Фетисов Д. А.

УДК 519.71

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

dfetisov@yandex.ru

Введение

Задача изучения свойств управляемости нелинейных динамических систем является одной из основных задач теории управления. Одно из направлений исследований состоит в преобразовании исходной системы в некоторую эквивалентную систему специального вида, для которого рассматриваемая задача может быть решена с помощью известных методов. Эта идея использована для исследования управляемости систем в работах [1, 2, 3, 4, 5]. В данной работе рассматриваются аффинные системы, эквивалентные регулярным системам квазиканонического вида. Исследование управляемости проводится на основе проверки существования решений терминальных задач. Ранее в статьях [4, 5] получены условия управляемости таких систем. В данной работе предложено еще одно условие управляемости для указанного класса систем.

1. Об управляемости аффинных систем

Рассмотрим аффинную систему со скалярным управлением

$$\dot{x} = G_1(x) + G_2(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $G_i = (G_{i1},\ \ldots,\ G_{in}(x))^{\mathrm{T}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i = 1,\ 2$. Задача — найти непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, которое за время t_k переводит эту систему из начального состояния в конечное:

$$x(0) = x_0, \quad x(t_k) = x_k. \tag{2}$$

Основное предположение: система (1) эквивалентна в $\mathbb{R}^n$ регулярной системе квазиканонического вида

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{z}_{n-1} = f(z,\eta) + g(z,\eta)u, \\ \dot{\eta} = q(z,\eta), \end{cases} \tag{3}$$

где $z = (z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbb{R}$, $f,\ g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g(z,\eta) \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$.

Отображение эквивалентности Φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ позволяет сформулировать для системы (3) эквивалентную терминальную задачу: найти непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, переводящее систему (3) за тот же интервал времени из начального состояния

$$\Phi(x_0) = (z_{10},\ z_{20},\ \ldots,\ z_{n-1,0},\ \eta_0)^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

в конечное состояние

$$\Phi(x_k) = (z_{1k},\ z_{2k},\ \ldots,\ z_{n-1,k},\ \eta_k)^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

Решение этой терминальной задачи одновременно является и решением исходной задачи (1), (2). В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы существовало непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, являющееся решением терминальной задачи (4), (5) для системы (3), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $B(t) \in C^{n-1}([0, t_k])$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} &B(0) = z_{10}, \quad \dot{B}(0) = z_{20}, \quad \ldots, \quad B^{(n-2)}(0) = z_{n-1,0}, \\ &B(t_k) = z_{1k}, \quad \dot{B}(t_k) = z_{2k}, \quad \ldots, \quad B^{(n-2)}(t_k) = z_{n-1,k} \end{aligned} \tag{6}$$

и такая, что задача Коши

$$\dot{\eta} = q(\overline{B}(t), \eta), \quad \eta(0) = \eta_0, \tag{7}$$

где $\overline{B}(t) = \big(B(t),\ \dot{B}(t),\ \ldots,\ B^{(n-2)}(t)\big)^{\mathrm{T}}$, имеет решение $\eta(t)$, определенное при $t \in [0, t_k]$ и удовлетворяющее условию

$$\eta(t_k) = \eta_k. \tag{8}$$

Согласно теореме 1, чтобы убедиться в том, что терминальная задача (4), (5) для системы (3) имеет решение, достаточно найти функцию $B(t)$, удовлетворяющую указанным в теореме условиям. В [4] предложено искать $B(t)$ в виде

$$B(t) = b(t) + cd(t), \tag{9}$$

где $c \in \mathbb{R}$ пока неизвестно, функция $d \in C^{n-1}([0, t_k])$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &d(0) = 0, \quad \dot{d}(0) = 0, \quad \ldots, \quad d^{(n-2)}(0) = 0, \\ &d(t_k) = 0, \quad \dot{d}(t_k) = 0, \quad \ldots, \quad d^{(n-2)}(t_k) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

а функция $b \in C^{n-1}([0, t_k])$ — условиям

$$\begin{aligned} &b(0) = z_{10}, \quad \dot{b}(0) = z_{20}, \quad \ldots, \quad b^{(n-2)}(0) = z_{n-1,0}, \\ &b(t_k) = z_{1k}, \quad \dot{b}(t_k) = z_{2k}, \quad \ldots, \quad b^{(n-2)}(t_k) = z_{n-1,k}. \end{aligned} \tag{11}$$

В качестве $d(t)$ можно взять многочлен

$$d(t) = t^{n-1}(t_k - t)^{n-1}, \tag{12}$$

в качестве $b(t)$ — интерполяционный многочлен степени $2n - 3$.

При любых значениях c функция $B(t)$ вида (9) удовлетворяет условиям (6). Обозначим

$$\overline{b}(t) = \big(b(t),\ \dot{b}(t),\ \ldots, b^{(n-2)}(t)\big)^{\mathrm{T}}, \quad \overline{d}(t) = \big(d(t),\ \dot{d}(t),\ \ldots,\ d^{(n-2)}(t)\big)^{\mathrm{T}},$$

так что $\overline{B}(t) = \bar{b}(t) + c\bar{d}(t)$. Тогда задача Коши (7) с учетом условия (8) преобразуется к граничной задаче

$$\dot{\eta} = q(\bar{b}(t) + c\,\bar{d}(t), \eta), \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \eta(t_k) = \eta_k. \tag{13}$$

Если удастся найти $c = c_*$, для которого существует решение $\eta(t)$ граничной задачи (13), то получим функцию $B_*(t) = b(t) + c_* d(t)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, терминальная задача (4), (5) для системы (3) будет иметь решение.

Если терминальная задача (4), (5) для системы (3) имеет решение при любых начальном и конечном состояниях, то система (3) управляема за интервал времени $[0, t_k]$. С использованием такого подхода в работе [5] доказано следующее условие управляемости системы (3).

Теорема 2. Пусть функция $Q(z)$ является многочленом нечетной степени:

$$Q(z) = \sum_{\substack{i_1,\,\ldots,\,i_{n-1}:\\ i_1+\ldots+i_{n-1}\leqslant 2l+1}} a_{i_1,\,\ldots,\,i_{n-1}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-1}^{i_{n-1}}, \tag{14}$$

а слагаемые старшей степени имеют вид

$$z_1^{2l+1} + \sum_{\substack{i_1,\,\ldots,\,i_{n-1}:\\ i_1+\ldots+i_{n-1}=2l+1}} a_{i_1,\,\ldots,\,i_{n-1}}\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-1}^{i_{n-1}}, \tag{15}$$

причем в этой сумме, за исключением слагаемого z_1^{2l+1}, присутствуют лишь слагаемые, в которых сумма показателей степеней переменных с четными индексами нечетна, т.е.

$$a_{i_1,\,\ldots,\,i_{n-1}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2s + 1. \tag{16}$$

Пусть также функция $R(\eta)$ положительна и ограничена в $\mathbb{R}$. Тогда система

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{z}_{n-1} = f(z,\eta) + g(z,\eta)u, \\ \dot{\eta} = Q(z)R(\eta) \end{cases} \tag{17}$$

управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_k]$.

2. Условие существования решения терминальной задачи

Теорема 3. Пусть в системе (3) функция $q(z,\eta)$ определена в $\mathbb{R}^n$, локально липшицева по η, имеет непрерывные частные производные по переменным z_j и удовлетворяет условиям

$$q_1(z) \leqslant q(z,\eta) \leqslant q_2(z), \quad z \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \eta \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

где функции $q_1(z)$, $q_2(z) \in C(\mathbb{R}^{n-1})$ таковы, что терминальная задача (4), (5) для каждой из систем

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{z}_{n-1} = f(z,\eta) + g(z,\eta)u, \\ \dot{\eta} = q_i(z), \end{cases} \qquad i = 1,\, 2, \tag{19}$$

имеет решение с соответствующей этому решению функцией $B_i(t) = b(t) + c_i d(t)$, $i = 1, 2$ (см. теорему 1). Тогда терминальная задача (4), (5) для системы (3) имеет решение, которому соответствует функция $B_*(t) = b(t) + c_* \, d(t)$, где $\min\{c_1, c_2\} \leqslant c_* \leqslant \max\{c_1, c_2\}$.

◀ Покажем сначала, что для любого значения c решение $\eta(t, c)$ задачи Коши

$$\dot{\eta} = q\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t), \eta\big), \quad \eta(0) = \eta_0 \tag{20}$$

определено при всех $t \in [0, t_k]$. Из (18) следует, что при всех $t \in [0, t_k]$ и $\eta \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$q_1\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t)\big) \leqslant q\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t), \eta\big) \leqslant q_2\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t)\big). \tag{21}$$

Функции $q_1\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t)\big)$, $q_2\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t)\big)$ достигают на отрезке $[0, t_k]$ своих наибольших и наименьших значений. Обозначим $q_{1\min} = \min\limits_{[0,t_k]} q_1\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t)\big)$, $q_{2\max} = \max\limits_{[0,t_k]} q_2\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t)\big)$. Тогда при всех $t \in [0, t_k]$ и $\eta \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства $q_{1\min} \leqslant q\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t), \eta\big) \leqslant q_{2\max}$ и, следовательно, $\big|q(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t), \eta)\big| \leqslant M$, где $M = \max\{|q_{2\max}|, |q_{1\min}|\}$.

Рассмотрим отрезок $[\eta_0 - a, \ \eta_0 + a]$. Согласно теореме Коши [6], решение $\eta(t, c)$ задачи Коши (20) определено на отрезке $[0, h]$, где $h = \min\{t_k, a/M\}$. Выберем a так, чтобы выполнялось неравенство $a \geqslant M t_k$. Тогда $h = t_k$ и функция $\eta(t, c)$ определена при всех $t \in [0, t_k]$.

Покажем теперь, что существует значение $c = c_*$, для которого $\eta(t, c_*) = \eta_k$. Согласно условию теоремы, терминальная задача (4), (5) для каждой из систем (19) имеет решение, которому соответствует функция $B_i(t) = b(t) + c_i d(t)$, $i = 1, 2$. По теореме 1 функция $B_i(t)$ обладает тем свойством, что решение $\eta_i(t, c_i)$ задачи Коши

$$\dot{\eta} = q_i\big(\overline{b}(t) + c\overline{d}(t)\big), \quad \eta(0) = \eta_0, \quad i = 1, \ 2. \tag{22}$$

удовлетворяет условию $\eta_i(t_k, c_i) = \eta_k$, $i = 1, \ 2$.

Рассмотрим задачу Коши (20) при $c = c_1$. Составим разность

$$\frac{d\eta_1(t, c_1)}{dt} - \frac{d\eta(t, c_1)}{dt} = q_1\big(\overline{b}(t) + c_1\overline{d}(t)\big) - q\big(\overline{b}(t) + c_1\overline{d}(t), \eta(t, c_1)\big)$$

и проинтегрируем ее в пределах от 0 до t_k:

$$\int\limits_0^{t_k} \left(\frac{d\eta_1(t, c_1)}{dt} - \frac{d\eta(t, c_1)}{dt}\right) dt = \int\limits_0^{t_k} \big[q_1\big(\overline{b}(t) + c_1\overline{d}(t)\big) - q\big(\overline{b}(t) + c_1\overline{d}(t), \eta(t, c_1)\big)\big] \, dt.$$

Значения функций $\eta_1(t, c_1)$, $\eta(t, c_1)$ при $t = 0$ совпадают и равны η_0, $\eta_1(t_k, c_1) = \eta_k$. Из (21) следует, что интеграл в правой части равенства неположителен, поэтому выполнено неравенство

$$\eta(t_k, c_1) \geqslant \eta_k. \tag{23}$$

Аналогичное соотношение можно получить, рассмотрев разность

$$\frac{d\eta_2(t, c_2)}{dt} - \frac{d\eta(t, c_2)}{dt} = q_2\big(\overline{b}(t) + c_2\overline{d}(t)\big) - q\big(\overline{b}(t) + c_2\overline{d}(t), \eta(t, c_2)\big)$$

и проинтегрировав ее в пределах от 0 до t_k. Учитывая (21) и начальные условия в рассматриваемых задачах Коши, получим неравенство

$$\eta(t_k, c_2) \leqslant \eta_k. \tag{24}$$

Будем для определенности считать, что $c_1 \leqslant c_2$. Пусть

$$D = \{(t, c)\colon 0 \leqslant t \leqslant t_k,\ c_1 \leqslant c \leqslant c_2\}.$$

Обозначим $\eta_{\max} = \max\limits_{(t,c)\in D} \eta_2(c, t)$, $\eta_{\min} = \min_{(t,c)\in D} \eta_1(c, t)$. Функция $q\big(\bar{b}(t) + c\bar{d}(t), \eta\big)$ при всех $c \in [c_1, c_2]$ непрерывна на множестве

$$D_1 = \{(t, \eta)\colon 0 \leqslant t \leqslant t_k,\ \eta_{\min} \leqslant \eta \leqslant \eta_{\max}\}$$

и удовлетворяет на нем условию Липшица по η. Производная этой функции по параметру c

$$\frac{\partial q\big(\bar{b}(t) + c\bar{d}(t), \eta\big)}{\partial c} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial q\big(\bar{b}(t) + c\bar{d}(t), \eta\big)}{\partial z_j}\, d^{(j-1)}(t)$$

при всех $c \in [c_1, c_2]$ непрерывна в D_1. Это означает [7], что решение $\eta(t, c)$ задачи Коши (20) на $[0, t_k]$ непрерывно зависит от параметра $c \in [c_1, c_2]$. Из неравенств (23) и (24) следует, что существует значение $c = c_* \in [c_1, c_2]$, для которого $\eta(t_k, c_*) = \eta_k$. ►

3. Достаточное условие управляемости

Теорема 4. Пусть функции $q_1(z)$, $q_2(z)$ удовлетворяют условиям на функцию $Q(z)$ из теоремы 2. Если функция $q(z, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то система (3) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал $[0, t_k]$.

◄ Согласно теореме 2 каждая из систем (19) в условиях теоремы 4 управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_k]$. Следовательно, каковы бы ни были интервал $[0, t_k]$, начальное и конечное состояния системы (19), существует решение соответствующей терминальной задачи, при этом функция $B(t)$ имеет вид $B(t) = b(t) + cd(t)$. Из утверждения теоремы 3 следует, что в этом случае для любого интервала $[0, t_k]$ и любых начального и конечного состояний системы (3) существует решение соответствующей терминальной задачи. Это означает, что система (3) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_k]$. ►

Пример. Покажем, что система

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ \dot{\eta} = z_1^3 + z_2^3 + \sin\eta, \end{cases}$$

где $g(z, \eta) \neq 0$ в $\mathbb{R}^3$, управляема в $\mathbb{R}^3$ за любой интервал времени s$[0, t_k]$.

Функция $q(z, \eta) = z_1^3 + z_2^3 + \sin\eta$ при всех $z \in \mathbb{R}^2$, $\eta \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам

$$z_1^3 + z_2^3 - 1 \leqslant q(z, \eta) \leqslant z_1^3 + z_2^3 + 1.$$

Обозначим $q_1(z) = z_1^3 + z_2^3 - 1$, $q_2(z) = z_1^3 + z_2^3 + 1$ и рассмотрим системы

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2, \\ \dot z_2 = f(z,\eta) + g(z,\eta)u, \qquad i = 1,\, 2. \\ \dot\eta = q_i(z), \end{cases}$$

Правая часть последнего уравнения каждой из этих систем удовлетворяет условиям теоремы 2. Действительно, функции $q_i(z)$ являются многочленами третьей степени, для которых выполнено условие (16), функция $R(\eta) \equiv 1$. Следовательно, эти системы управляемы в $\mathbb{R}^3$ за любой интервал $[0, t_k]$. В соответствии с утверждением теоремы 4 это означает, что рассматриваемая система также управляема в $\mathbb{R}^3$ за любой интервал времени $[0, t_k]$.

Заключение

Рассмотрена задача исследования управляемости аффинной системы. За основу взято предположение, что рассматриваемая система эквивалентна регулярной системе квазиканонического вида с одномерной нулевой динамикой. Доказано достаточное условие существования решения терминальной задачи для такой системы. С его помощью показано, что при выполнении некоторых условий на правую часть последнего уравнения системы терминальная задача для системы имеет решение при любых начальном и конечном состояниях. Тем самым получено достаточное условие управляемости для рассматриваемого класса систем.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N11-01-00733 и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
2. Крищенко А.П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1984. № 6. С. 30–36.
3. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805–809.
4. Фетисов Д.А. Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 3. С. 12–30.
5. Фетисов Д.А. Условие управляемости аффинной системы // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10. Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/236936.html (дата обращения 02.07.2012).
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950. 468 с.
7. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Sufficient Condition of Affine System Controllability

 # 08, August 2012

DOI: 10.7463/0812.0445546

Fetisov D A.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

dfetisov@yandex.ru

This note deals with a controllability condition for affine systems with scalar control. The main assumption - the considered system is equivalent to system of a quasicanonical form, regular on all space of states. For regular system of a quasicanonical form the solution existence sufficient condition of a terminal task is received. By means of this condition it is shown that under some conditions the terminal task for regular system of a quasicanonical form has the decision for any initial and final conditions of system on any final interval of time. Thereby the sufficient condition of controllability for a considered class of systems is proved. A possible scope of the received results is the solution of technical systems control problems.

References

1. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineinye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p.
2. Krishchenko A.P. Issledovanie upravliaemosti i mnozhestv dostizhimosti nelineinykh sistem upravleniia [The study of the controllability and sets of attainability of nonlinear control systems]. *Avtomatika i telemekhanika*[Automatics and telemechanics], 1984, no. 6, pp. 30-36.
3. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Upravliaemost' nelineinykh sistem i sintez algoritmov upravleniia [Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms]. *DAN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of the USSR], 1981, vol. 258, no. 4, pp. 805-809.
4. Fetisov D.A. Issledovanie upravliaemosti reguliarnykh sistem kvazikanonicheskogo vida [Study of controllability of regular systems of quasicanonical type]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana.* Ser. Estestvennye nauki [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2006, no. 3, pp. 12-30.

5. Fetisov D.A. Uslovie upravliaemosti affinnoi sistemy [Affine System Controllability Condition]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 10. Available at: http://technomag.edu.ru/doc/236936.html, accessed 02.07.2012.
6. Stepanov V.V. *Kurs differentsial'nykh uravnenii* [Course of differential equations]. Moscow, GITTL, 1950. 468 p.
7. Filippov A.F. *Vvedenie v teoriiu differentsial'nykh uravnenii* [Introduction to the theory of differential equations]. Moscow, Editorial URSS, 2004. 240 p.