НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

электронное научно-технический журнал

О дифференцировании по параметру некоторых функций

DOI: 10.7463/0512.0398478

 # 05, май 2012

П. Л. Иванков

УДК 511.361

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
ivankovpl@mail.ru

Введение

Исследование арифметической природы значений обобщённых гипергеометрических функций обычно начинается с построения линейной приближающей формы, имеющей достаточно высокий порядок нуля в начале координат. Такую форму можно построить с помощью принципа Дирихле. Получающиеся на этом пути результаты являются в известном смысле общими, однако возможности этого метода оказываются ограниченными, если требуются количественные оценки высокой точности.

Дополнительные трудности возникают также при рассмотрении функций с иррациональными параметрами. В ряде случаев приближающую форму удаётся построить эффективно. Это даёт возможность получить более точные оценки линейных форм от значений гипергеометрических функций с рациональными параметрами и позволяет рассмотреть случай функций с иррациональными параметрами.

В работе предлагается новая эффективная конструкция аппроксимаций типа Паде для обобщённых гипергеометрических функций и их производных (в том числе и по параметру). Эта конструкция применяется для получения оценок снизу модулей линейных форм от значений таких функций.

1. Основные обозначения

Пусть заданы комплексные числа

$$\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_m,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_t. \tag{1}$$

Положим

$$a(x) = (x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_r), \quad b(x) = (x+\beta_1)\ldots(x+\beta_m),$$

где $u = m+1$, $r < u$. Считаем, что

$$(x+\lambda_1)\dots(x+\lambda_t)a(x)b(x) \neq 0 \text{ при } x = 1,\, 2,\, \dots\,; \tag{2}$$

$$\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \notin \mathbb{Z}, \quad k_1,\, k_2 = 1, \dots, t, \quad k_1 \neq k_2. \tag{3}$$

Обозначим

$$\chi_j(\nu) = \prod_{l=1}^{j-1}(\nu + \beta_l), \quad j = 1,\, \dots,\, u, \tag{4}$$

и рассмотрим при $k = 1,\, \dots,\, t$, $j = 1,\, \dots,\, u$ следующие функции:

$$F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\chi_j(\nu)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)(x+\lambda_k)}, \tag{5}$$

а также функции, полученные из них дифференцированием по параметру λ_k:

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\chi_j(\nu)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x+\lambda_k}, \tag{6}$$

$$k = 1,\, \dots,\, t, \quad l_k = 0,\, \dots,\, \tau_k - 1, \quad j = 1,\, \dots,\, u;$$

$\tau_1,\, \dots,\, \tau_t$ — натуральные числа. Через $\mathbb{I}$ обозначим некоторое мнимое квадратичное поле (или поле рациональных чисел).

2. Формулировки основных результатов

При выполнении условий (2) и (3) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть все числа (1) рациональны, разности $\alpha_i - \lambda_k$ и $\alpha_i - \beta_j$ не являются целыми числами (при всех допустимых значениях индексов), а число ξ отлично от нуля и лежит в поле $\mathbb{I}$. Тогда для любого нетривиального набора целых чисел

$$h_0,\, h_{kl_kj}, \quad k = 1,\, \dots,\, t, \quad l_k = 0,\, \dots,\, \tau_k - 1, \quad j = 1,\, \dots,\, u, \tag{7}$$

из этого поля выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u} h_{kl_kj}F_{kl_kj}(\xi)\right| > H^{-uT - \frac{\gamma_1}{\ln\ln(H+2)}}, \tag{8}$$

где положительная постоянная γ_1 не зависит от коэффициентов (7), а H есть максимум модулей этих коэффициентов; здесь

$$T = \tau_1 + \ldots + \tau_t. \tag{9}$$

Теорема 2. Предположим, что $a(x) \equiv 1$, а коэффициенты многочлена $b(x)$ лежат в поле $\mathbb{I}$, причем $b(0) = 0$; числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ будем считать рациональными. Коэффициенты h_{kl_kj}, а также числа ξ и H определим, как в предыдущей теореме (при этом в левой части (7) коэффициент h_0 равен нулю). Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \sum_{j=1}^{u} h_{kl_kj} F_{kl_kj}(\xi) \right| > H^{1 - uT - \frac{\gamma_2}{\ln\ln(H+2)}},$$

где $\gamma_2 > 0$ и не зависит от коэффициентов (7).

Теорема 3. Предположим, что выполнены все условия предыдущей теоремы, кроме условия $b(0) = 0$. Тогда для любого нетривиального набора чисел (7) из поля $\mathbb{I}$ выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \sum_{j=1}^{u} h_{kl_kj} F_{kl_kj}(\xi) \right| > H^{-\frac{u^2T + m\vartheta}{u - m\vartheta} - \varepsilon}, \tag{10}$$

где ε — произвольное положительное число, а H, определенное так же, как и в теореме 1, достаточно велико (нижняя граница зависит от ε). Число ϑ задано равенством

$$\vartheta = 1 - \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\varkappa_1} + \ldots + \frac{1}{\varkappa_m} \right). \tag{11}$$

В последнем выражении $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ — степени (алгебраических) чисел, служащих корнями многочлена $b(x)$.

Применяемый ниже метод может быть использован для получения результатов о линейных формах и от других продифференцированных по параметру гипергеометрических функций, рассмотренных в [1]; можно, например, исследовать функции

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \chi_j(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} (x + \lambda_k);$$

можно рассмотреть и случай $r = u$.

Ранее арифметические свойства значений продифференцированных по параметру гипергеометрических функций изучались в ряде работ; см. по этому поводу замечания к главе 7, книги [2, с. 248–249]. В условиях теоремы 1 следствия из результатов этих работ (в случаях, когда такие следствия могут быть получены; например, при $a(x) \equiv 1$, $b(x) = x$) дают менее точную оценку по сравнению с оценкой (8).

В теоремах 2 и 3 рассматриваются гипергеометрические функции с иррациональными параметрами, поэтому данные теоремы не могут быть доказаны методом Зигеля (в его классической форме), который используется в работах, упомянутых в книге [2]. Отметим также статью [3], в которой рассмотрены функции (6) при $a(x) \equiv b(x) \equiv 1$.

3. Доказательства теорем

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся вспомогательные функции

$$\tilde{F}_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\chi_j(\nu)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x+\lambda_{kl_k}},$$

а также многочлены

$$\tilde{P}_{kl_kj}(z) = \sum_{s=0}^{n}\tilde{p}_{kl_kjs}z^s, \qquad (12)$$

где область изменения индексов указана после равенства (6). Будем считать, что ни одно из чисел λ_{kl_k} не является целым (рациональным) отрицательным. Коэффициенты многочленов (12) определим ниже. Составим линейную форму

$$\tilde{R}(z) = \sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u}\tilde{P}_{kl_kj}(z)\tilde{F}_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\tilde{g}_{\nu}z^{\nu}. \qquad (13)$$

При $\nu \geqslant n$ имеем такое выражение для $\tilde{g}_{\nu}$:

$$\tilde{g}_{\nu} = \sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}\tilde{p}_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)(x+\lambda_{kl_k})}, \qquad (14)$$

которое после очевидных преобразований приобретает вид

$$\tilde{g}_{\nu} = \prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x+\lambda_{kl_k}}A_{kl_k}(\nu), \qquad (15)$$

где

$$A_{kl_k}(\nu) = \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}\tilde{p}_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)(\nu+\lambda_{kl_k}-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x).$$

Далее, используя соображения, изложенные в работе [1], рассмотрим интеграл

$$\Phi(\nu) = \frac{(n!)^m}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\prod\limits_{x=1}^{n+uT(n+1)-1}(\zeta+x)}{\prod\limits_{x=1}^{\nu}(\zeta+x)\prod\limits_{k=1}^{t}\prod\limits_{l_k=0}^{\tau_k-1}\prod\limits_{\sigma=0}^{u(n+1)-1}(\zeta-\lambda_{kl_k}+\sigma)}d\zeta, \qquad (16)$$

где T определяется равенством (9).

Будем считать, что отрицательные целые рациональные числа, абсолютная величина которых не меньше, чем $n+uT(n+1)$, лежат вне (положительно ориентированного, кусочно гладкого) контура Γ, а полюсы подынтегральной функции, порожденные произведением $\prod\limits_{k=1}^{t}\prod\limits_{l_k=0}^{\tau_k-1}\prod\limits_{\sigma=0}^{u(n+1)-1}(\zeta-\lambda_{kl_k}+\sigma)$, лежат внутри этого контура и являются простыми. Для выполнения последнего условия предположим, что

$$\lambda_{kl_k}-\lambda_{qv_q}\notin\mathbb{Z} \quad \text{при} \quad (k,l_k)\neq(q,v_q). \qquad (17)$$

В таком случае по теореме о вычетах имеем равенство

$$\Phi(\nu) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x + \lambda_{kl_k}} B_{kl_k}(\nu), \tag{18}$$

где

$$B_{kl_k}(\nu) = (n!)^m \sum_{\sigma=0}^{u(n+1)-1} \frac{\prod\limits_{x=1}^{n+uT(n+1)-\sigma-1} (x + \lambda_{kl_k})}{\prod\limits_{q=1}^{t} \prod\limits_{v_q=0}^{\tau_q-1} \prod\limits_{\sigma_1=0}^{u(n+1)-1} * (\lambda_{kl_k} - \sigma - \lambda_{qv_q} + \sigma_1)} \prod_{x=0}^{\sigma-1} (\nu + \lambda_{kl_k} - x). \tag{19}$$

Здесь и далее символ $*$ означает, что равную нулю скобку (если она входит в произведение) следует вычеркнуть.

Заметим, что равенство

$$A_{kl_k}(\nu) = B_{kl_k}(\nu) \tag{20}$$

будет выполняться тождественно по ν, если при

$$k = 1, \ldots, t, \quad l_k = 0, \ldots, \tau_k - 1, \quad j = 1, \ldots, u, \quad s = 0, 1, \ldots, n$$

положить

$$\tilde{p}_{kl_kjs} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{K_{js}(\zeta) B_{kl_k}(\zeta) d\zeta}{\chi_{kl_k,j+1}(\zeta - s) \prod\limits_{x=0}^{s-1} b(\zeta - x)(\zeta + \lambda_{kl_k} - x) \prod\limits_{x=1}^{n-s} a(\zeta - n + x)}, \tag{21}$$

где $K_{js}(\zeta) = 1$, если $s = 0$, $j = 1, \ldots, u$, и

$$K_{js}(\zeta) = \frac{1}{a(\zeta - s + 1)} \sum_{q=1}^{j} \theta_q \chi_q(\zeta - s)$$

в остальных случаях; коэффициенты θ_q определяются равенством

$$a(\zeta + 1) = \sum_{q=1}^{u} \theta_q \chi_q(\zeta),$$

которое должно выполняться тождественно по ζ;

$$\chi_{kl_kj}(\zeta) = \begin{cases} \chi_j(\zeta), & j = 1, \ldots, u; \\ b(\zeta)(\zeta + \lambda_{kl_k}), & j = u + 1; \end{cases}$$

C — простой, замкнутый, кусочно гладкий, положительно ориентированный контур, охватывающий все нули многочлена

$$\prod_{x=0}^{n} b(\zeta - x)(\zeta + \lambda_{kl_k} - x),$$

и такой, что все нули многочлена

$$\prod_{x=1}^{n} a(\zeta - n + x)$$

лежат в его внешности. Для существования такого контура потребуем дополнительно, чтобы разности $\alpha_i - \lambda_{kl_k}$ были отличны от целых рациональных чисел (при $i = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, \ldots, \tau_k - 1$).

По поводу доказательства последнего утверждения см. лемму 2 работы [4] и лемму 5 работы [5].

Из (15), (18) и (20) вытекает такое равенство (справедливое при $\nu \geqslant n$):

$$\tilde{g}_\nu = \prod_{x=1}^{\nu-n} a(x) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \Phi(\nu). \tag{22}$$

Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Производная k-го порядка по z дроби

$$\frac{(z-x_1)\ldots(z-x_p)}{(z-y_1)\ldots(z-y_q)} \tag{23}$$

представляется в виде алгебраической суммы $(p+q)\ldots(p+q+k-1)$ слагаемых, каждое из которых получается из (23) приписыванием в знаменателе k скобок вида $(z-x_i)$ или $(z-y_j)$; при этом приписываемые скобки могут повторяться.

Доказательство проводится по индукции с учетом правила дифференцирования дроби.

Лемма 2. Пусть Q_1 — наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$, а Q_2 — наименьший общий знаменатель чисел

$$\frac{n!}{\prod\limits_{x=1}^{s} {}^*(p+qx) \prod\limits_{x=1}^{n-s} {}^*(p+qx)}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad s = 0, 1, \ldots, n,$$

(по поводу символа $*$ в знаменателе см. замечание выше). Тогда

$$Q_1 = e^{(1+o(1))n}, \quad n \to \infty,$$

а число Q_2 ограничено сверху величиной $e^{\gamma n}$, где положительная постоянная γ зависит от p и q (и не зависит от n).

Доказательство первого утверждения общеизвестно; второе доказывается так же, как и утверждение 2° леммы 2, с. 186 книги [2].

В дальнейшем через $\gamma_3, \gamma_4, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от параметров функций (6), а также, возможно, от числа ξ и поля $\mathbb{I}$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Рассмотрим при

$$k = 1, \ldots, t, \quad j = 1, \ldots, u, \quad s = 0, 1, \ldots, n, \quad \sigma = 0, \ldots, u(n+1) - 1$$

множество чисел, получающихся из выражения вида

$$\frac{(n!)^r(s!)^{u-r}}{\sigma!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{K_{js}(\zeta)\prod\limits_{x=0}^{\sigma-1}(\zeta+\lambda_k-x)\,d\zeta}{\chi_j(\zeta-s)\prod\limits_{x=0}^{s-1}b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)\prod\limits_{x=1}^{n-s}a(\zeta-n+x)} \tag{24}$$

приписыванием в знаменателе под знаком интеграла нескольких скобок (в количестве, не превосходящем τ_k+1) из числа входящих в произведение

$$(\zeta+\lambda_k)\dots(\zeta+\lambda_k-u(n+1));$$

при этом скобки можно и не приписывать, а одну и ту же скобку можно приписать несколько раз. Тогда модули всех полученных таким способом чисел ограничены сверху величиной $e^{\gamma_3 n}$; общий наименьший знаменатель этих чисел не превосходит $e^{\gamma_4 n}$.

Доказательство. В выражении (24) после выполнения указанных в лемме преобразований каждый из полюсов подынтегральной функции представляется в виде $-\beta+x_0$, где $\beta\in\{\beta_1,\,\dots,\,\beta_m,\,\lambda_k\}$, а $x_0\in\{0,\,1,\,\dots,\,u(n+1)\}$. Нетрудно проверить, что кратность этого полюса ограничена сверху некоторой константой γ_5, зависящей от $\beta_1,\,\dots,\,\beta_m,\,\lambda_k$ и от количества приписанных скобок. Этой же константой ограничено сверху количество дифференцирований, которые надо будет выполнить при применении теоремы о вычетах к рассматриваемому интегралу. К получающейся после этого сумме нескольких слагаемых, вид которых ясен из леммы 1, можно применить лемму 2. Это приведет к требуемой оценке общего наименьшего знаменателя. Для получения оценки сверху модулей, указанных в лемме 3 чисел, применяется лемма 7.7, с. 108 книги [6]. Подробное доказательство здесь не приводится, так как оно лишь техническими деталями отличается от соответствующей части доказательства леммы 5 работы [5].

Лемма 4. Существуют рациональные числа p_{kl_kjs}, для которых при любом натуральном $\nu\geqslant n$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}p_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{x+\lambda_k}=$$

$$=\prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)}\frac{(n!)^m}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\prod\limits_{x=1}^{n+uT(n+1)-1}(\zeta+x)}{\prod\limits_{x=1}^{\nu}(\zeta+x)\prod\limits_{k=1}^{t}\prod\limits_{\sigma=0}^{u(n+1)-1}(\zeta-\lambda_k+\sigma)^{\tau_k}}\,d\zeta. \tag{25}$$

При этом модули всех чисел p_{kl_kjs} ограничены сверху величиной $(n!)^{u-r}e^{\gamma_6 n}$, а наименьший общий знаменатель чисел $p_{kl_kjs}\left(\dfrac{s!}{n!}\right)^{u-r}$ не превосходит $e^{\gamma_7 n}$.

Доказательство. В равенстве (22) запишем $\tilde{g}_\nu$, используя (14), а затем заменим коэффициенты $\tilde{p}_{kl_kjs}$ выражениями, вытекающими из (19) и (21). Получим такое равенство:

$$\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}\left(\sum_{\sigma=0}^{u(n+1)-1}\frac{\prod\limits_{x=1}^{n+uT(n+1)-\sigma-1}(x+\lambda_{kl_k})}{\prod\limits_{q=1}^{t}\prod\limits_{v_q=0}^{\tau_q-1}\prod\limits_{\sigma_1=0}^{u(n+1)-1}{}^{*}\,(\lambda_{kl_k}-\sigma-\lambda_{qv_q}+\sigma_1)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(n!)^m}{2\pi i}\int\limits_C\frac{K_{js}(\zeta)\prod\limits_{x=0}^{\sigma-1}(\zeta+\lambda_{kl_k}-x)}{\chi_{kl_k,j+1}(\zeta-s)\prod\limits_{x=0}^{s-1}b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_{kl_k}-x)\prod\limits_{x=1}^{n-s}a(\zeta-n+x)}\,d\zeta\right)\times$$

$$\times\chi_j(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)(x+\lambda_{kl_k})}=\prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)}\Phi(\nu). \quad (26)$$

В обеих частях последнего равенства перейдем к пределу при

$$\lambda_{kl_k}\to\lambda_k,\quad k=1,\,\ldots,\,t,\quad l_k=0,\,\ldots,\,\tau_k-1. \quad (27)$$

В правой части этот предел вычисляется с помощью формальной замены λ_{kl_k} на λ_k в выражении (16) для функции $\Phi(\nu)$; в результате получается правая часть равенства (25). В левой части (26) для вычисления предела придется раскрывать неопределенности. При этом в дополнение к требованию (17) предположим, что разности $\lambda_k-\lambda_{qv_q}$ также не являются целыми числами (при всех допустимых значениях индексов). Рассмотрим сначала вычисление предела (27) при $k=1$. Заметим, что в знаменателях

$$\prod_{q=1}^{t}\prod_{v_q=0}^{\tau_q-1}\prod_{\sigma_1=0}^{u(n+1)-1}{}^{*}\,(\lambda_{kl_k}-\sigma-\lambda_{qv_q}+\sigma_1) \quad (28)$$

из левой части (26) при $k=2,\,\ldots,\,t$ не появляются нулевые скобки при замене λ_{qv_q} при $(q,v_q)=(1,l_1)$ на λ_1, $l_1=0,\,\ldots,\,\tau_1-1$. Следовательно, при $k=2,\,\ldots,\,t$ вычисление пределов при $\lambda_{1l_1}\to\lambda_1$ сводится к формальной замене λ_{qv_q} при $(q,v_q)=(1,l_1)$ на λ_1.

При $k=1$ совокупность упомянутых скобок, обращающихся в нуль при замене λ_{1l_1} и λ_{qv_q} при $q=1$ на λ_1, не зависит от s, j и σ и при $0\leqslant l_1\leqslant\tau_1-1$ имеет вид

$${}^{*}\,(\lambda_{1l_1}-\lambda_{10})\ldots(\lambda_{1l_1}-\lambda_{1,\tau_1-1});$$

Если $l_1=0$, то при замене λ_{10} на λ_1 в левой части (26) нулевые скобки не появляются и вычисление предела при $\lambda_{10}\to\lambda_1$ на этом заканчивается. Далее последовательно вычисляем пределы при

$$\lambda_{1l_1}\to\lambda_1,\quad l_1=1,\,\ldots,\,\tau_1-1. \quad (29)$$

Простое рассуждение показывает, что перед вычислением предела $\lambda_{1\mu}\to\lambda_1$, где $0<\mu\leqslant$ $\leqslant\tau_1-1$, скобки вида $\pm(\lambda_{1\mu}-\lambda_1)$ могут присутствовать лишь в знаменателях слагаемых, отвечающих значениям $l_1 \leqslant \mu$; количество таких скобок в каждом знаменателе не больше μ и при $l_1 = \mu$ в точности равно μ. Согласно правилу Лопиталя в каждом слагаемом скобки указанного вида вычеркиваются (знак плюс или минус перед скобкой сохраняется) и вместо них пишется факториал их числа; получившееся после этого выражение дифференцируется по $\lambda_{1\mu}$ соответствующее число раз и затем $\lambda_{1\mu}$ заменяется на λ_1. После вычисления всех пределов (29) левая часть (26) может быть переписана следующим образом:

$$\sum_{l_1=0}^{\tau_1-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}\tilde{\tilde{p}}_{1l_1js}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{d^{l_1}}{d\lambda_1^{l_1}}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{x+\lambda_1}+$$
$$+\sum_{k=2}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}\tilde{\tilde{p}}_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)(x+\lambda_{kl_k})}. \quad (30)$$

Коэффициенты $\tilde{\tilde{p}}_{kl_kjs}$ при $k = 2, \ldots, t$ получаются из коэффициентов $\tilde{p}_{kl_kjs}$ заменой в соответствующих формулах λ_{qv_q} при $q = 1$ на λ_1. Ясно также, как устроены формулы, выражающие коэффициенты $\tilde{\tilde{p}}_{1l_1js}$. Рассуждая как в случае $k = 1$, перейдем в выражении (30) к пределу при $\lambda_{kl_k} \to \lambda_k$, $k = 2, \ldots, t$. При этом в первой группе слагаемых, входящих в это выражение, вычисление предела сведется к замене λ_{qv_q} при $q = k$ на λ_k; ко второй группе слагаемых применимы изложенные выше соображения (относящиеся к случаю $k = 1$). В конечном итоге мы придем к равенству (25). Из сказанного выше и из леммы 1 вытекает, что число p_{kl_kjs} из левой части этого равенства представляется в виде линейной комбинации нескольких слагаемых (в количестве, не большем $\gamma_8 n^{\gamma_9}$), каждое из которых получается из выражения

$$\pm\frac{\sigma!}{n!}\frac{\prod\limits_{x=1}^{n+uT(n+1)-\sigma-1}(\lambda_{kl_k}+x)}{\prod\limits_{q=1}^{t}\prod\limits_{v_q=0}^{\tau_q-1}\prod\limits_{\sigma_1=0}^{u(n+1)-1}{}^{*}(\lambda_{kl_k}-\sigma-\lambda_{qv_q}+\sigma_1)} \quad (31)$$

заменой λ_{kl_k} на λ_k (соответственно λ_{qv_q} на λ_q), вычеркиванием всех скобок, равных нулю, и приписыванием в знаменателе нескольких скобок, входящих в числитель или знаменатель этого выражения; количество приписываемых скобок не должно превышать τ_k. Коэффициентом каждого такого слагаемого служит какой-либо из интегралов, о которых идет речь в лемме 3 (интеграл берется с тем же значением σ), умноженный на $(n!/s!)^{u-r}$. Возможно также наличие множителя вида $\frac{1}{\mu_1!\mu_2!\ldots}$, если при применении правила Лопиталя в знаменателе были продифференцированы скобки в соответствующих степенях. Очевидно, общий наименьший знаменатель множителей последнего типа ограничен сверху константой γ_{10}.

Теперь нетрудно обосновать заявленные в лемме 4 свойства коэффициентов p_{kl_kjs}. При доказательстве используется лемма 2 и уже упоминавшаяся лемма 7.7, с. 108 книги [6]. Подробное доказательство здесь не приводится, так как оно стандартно (см. замечание по поводу доказательства леммы 3). Решающим обстоятельством при оценке общего знаменателя чисел p_{kl_kjs} является рациональность чисел

$$\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_t,\quad \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r,\quad \beta_1,\ \ldots,\ \beta_m. \tag{32}$$

Лемма 4 доказана.

Замечание. Рассуждения, использованные при доказательстве леммы 4, позволяют указать «явные формулы» для коэффициентов p_{kl_kjs}. Например, при $\tau_1 = 2$, $1 \leqslant j \leqslant m$, справедливо такое равенство:

$$p_{11js} = \sum_{\sigma=0}^{u(n+1)-1} \frac{\prod\limits_{x=1}^{n+uT(n+1)-\sigma-1} (\lambda_1 + x)}{(\sigma!(u(n+1)-\sigma-1)!)^2 \prod\limits_{q=2}^{t} \prod\limits_{v_q=0}^{\tau_q-1} \prod\limits_{\sigma_1=0}^{u(n+1)-1} * (\lambda_1 - \sigma - \lambda_{qv_q} + \sigma_1)} \times$$

$$\times \frac{(n!)^m}{2\pi i} \int\limits_C \frac{K_{js}(\zeta) \prod\limits_{x=0}^{\sigma-1} (\zeta + \lambda_1 - x)}{\chi_{j+1}(\zeta - s) \prod\limits_{x=0}^{s-1} b(\zeta - x)(\zeta + \lambda_1 - x) \prod\limits_{x=1}^{n-s} a(\zeta - n + x)}\, d\zeta.$$

Из последней леммы следует, что если в (12) положить $\tilde{p}_{kl_kjs} = p_{kl_kjs}$, то равенство (13) можно переписать так:

$$R(z) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k-1} \sum_{j=1}^{u} P_{kl_kj}(z) F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu,$$

где при $\nu \geqslant n$ коэффициент g_ν равен правой части равенства (25). Определим многочлен

$$P_0(z) = \sum_{s=0}^{n} p_s z^s,\quad p_s = -g_s,\quad s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

и положим

$$R_1(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k-1} \sum_{j=1}^{u} P_{kl_kj}(z) F_{kl_kj}(z). \tag{33}$$

Лемма 5. Функциональная форма $R_1(z)$ не равна нулю тождественно и имеет при $z = 0$ порядок нуля, равный $n + uT(n+1)$. Коэффициенты многочлена $P_0(z)$ суть рациональные числа, общий наименьший знаменатель которых не превосходит $e^{\gamma_{11} n}$.

Доказательство. Из определения многочлена $P_0(z)$ следует, что указанный порядок нуля формы $R_1(z)$ не меньше, чем $n+1$. Пусть $n+1 \leqslant \nu \leqslant n + uT(n+1) - 1$. В этом случае коэффициент g_ν равен правой части (25), где под знаком интеграла находится рациональная функция, степень числителя которой по крайней мере на две единицы меньше степени знаменателя, причем все полюсы подынтегральной функции лежат внутри контура интегрирования. Поэтому $g_\nu = 0$ при указанных значениях ν. Таким образом, одно из утверждений леммы доказано.

При $\nu = n + uT(n+1)$ интеграл из правой части соотношения (25) равен (с точностью до знака) вычету подынтегральной функции относительно простого полюса $\zeta = -n - uT(n+1)$;

легко видеть, что этот вычет отличен от нуля, а тогда $g_\nu \neq 0$ при указанном значении ν. Поэтому $R(z)$ отлична от тождественного нуля. При $0 \leqslant \nu \leqslant n$ выражение для g_ν можно записать так:

$$g_\nu = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{j=1}^{u} \left(\frac{s!}{n!}\right)^{u-r} p_{kl_kjs} \chi_j(\nu - s) \left(\frac{n!}{s!}\right)^{u-r} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{x+\lambda_k}.$$

Отсюда ясно, что утверждение об общем наименьшем знаменателе коэффициентов p_s, $s = 0, 1, \ldots, n$, также справедливо: достаточно сослаться на леммы 1 и 2, а также на лемму 4. Как и выше, основным обстоятельством, обеспечивающим справедливость последнего утверждения леммы является рациональность чисел (32). Лемма 5 доказана.

С построением формы $R_0(z)$ доказательство теоремы 1 можно считать законченным: все дальнейшие действия стандартны. Используется то обстоятельство, что функции (6) удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений, а также линейная независимость этих функций (вместе с функцией, тождественно равной единице) над полем рациональных дробей при выполнении условий теоремы 1; последнее обстоятельство установлено в [7]. По поводу подробностей доказательства теоремы см., например, гл. 3 книги [2] или §3 статьи [5].

Рассмотрим кратко основные моменты доказательства теоремы 2. Вместо $\Phi(\nu)$ рассмотрим функцию $\Phi^*(\nu)$, которая определяется интегралом, аналогичным (16), но с заменой в числителе подынтегрального выражения $n + uT(n+1) - 1$ на $uT(n+1) - 1$ и показателя степени факториала m на u. При $\nu \geqslant n$ выполняется равенство, аналогичное (22):

$$\tilde{g}_\nu = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=1}^{u} \tilde{p}_{kl_kjs} \chi_j(\nu - s) \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b(x)(x+\lambda_{kl_k})} = \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \Phi^*(\nu), \tag{34}$$

если соответствующим образом определить (см. выше) числа $\tilde{p}_{kl_kjs}$. При $0 \leqslant \nu \leqslant n$ имеем

$$\tilde{g}_\nu = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{j=1}^{u} \tilde{p}_{kl_kjs} \chi_j(\nu - s) \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b(x)(x+\lambda_{kl_k})} =$$
$$= \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=1}^{u} \tilde{p}_{kl_kjs} \chi_j(\nu - s) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu - x) \times$$
$$\times \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_{kl_k})} \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu + \lambda_{kl_k} - x). \tag{35}$$

В последнем выражении индекс суммирования s изменяется от $s = 0$ до $s = n$, так как в силу условия $b(0) = 0$ произведение $\prod\limits_{x=0}^{s-1} b(\nu - x)$ равно нулю при $s > \nu$. Равенство (35) показывает, что $\tilde{g}_\nu$ равно правой части (34) при всех $\nu \geqslant 0$ (а не только при $\nu \geqslant n$). Далее, заменим левую часть (34) на (35) и в получившемся равенстве осуществим предельный переход (27). Получим аналог равенства (25), в котором в левой части верхний индекс суммирования n заменяется на $\min(\nu, n)$, $a(x)$ заменяется на единицу (слева и справа), а под знаком интеграла $n + uT(n+1) - 1$ заменяется на $uT(n+1) - 1$. При этом числа p_{kl_kjs} записываются так же, как и в лемме 4, но аналог интеграла (24) имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\prod\limits_{x=0}^{\sigma-1}(\zeta+\lambda_k-x)\,d\zeta}{\chi_j(\zeta-s)\prod\limits_{x=0}^{s-1}b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)}, \tag{36}$$

причем на этот раз контур интегрирования содержит все полюсы подынтегральной функции, и интеграл (36) можно записать в виде вычета относительно точки $\zeta=\infty$. Это приводит к «хорошей» оценке общего наименьшего знаменателя чисел p_{kl_kjs} (при условии сохранения предположения о рациональности чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_t$).

После построения аналога линейной формы (33), т.е. линейной формы

$$R_1(z)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u}P_{kl_kj}(z)F_{kl_kj}(z),$$

завершение доказательства теоремы 2 проводится как указано выше. При этом используется тот факт, что дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $F_{kl_kj}(z)$, однородно.

В случае теоремы 3 проблемы возникают с оценкой общего наименьшего знаменателя коэффициентов нулевого многочлена в правой части (33). Эти коэффициенты являются числами из поля $\mathbb{I}$. Их общим наименьшим знаменателем назовем наименьшее по модулю ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое указанные коэффициенты становятся целыми числами.

В рассматриваемом случае функция $\Phi(\nu)$ определяется так же, как и в теореме 1; аналог равенства (25) записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}p_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)}\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\left(\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x+\lambda_k}\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)\right)=$$

$$=\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)}\frac{(n!)^m}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\prod\limits_{x=1}^{n+uT(n+1)-1}(\zeta+x)}{\prod\limits_{x=1}^{\nu}(\zeta+x)\prod\limits_{k=1}^{t}\prod\limits_{\sigma=0}^{u(n+1)-1}(\zeta-\lambda_k+\sigma)^{\tau_k}}\,d\zeta.$$

Это равенство при соответствующем выборе коэффициентов p_{kl_kjs} справедливо при всех неотрицательных целых (рациональных) значениях ν. Как и в случае теоремы 2 знаменатели многочленов $P_{kl_kj}(z)$ оказываются «хорошими». Для коэффициентов многочлена $P_0(z)$ из (33) получаем равенство

$$p_{0\nu}=-\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)}\frac{(n!)^m}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\prod\limits_{x=1}^{n+uT(n+1)-1}(\zeta+x)}{\prod\limits_{x=1}^{\nu}(\zeta+x)\prod\limits_{k=1}^{t}\prod\limits_{\sigma=0}^{u(n+1)-1}(\zeta-\lambda_k+\sigma)^{\tau_k}}\,d\zeta+$$

$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=\nu+1}^{n}\sum_{j=1}^{u}p_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{b(x)}\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)\left(\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x+\lambda_k}\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)\right)^{(l_k)}_{\lambda_k}.$$

В работе [8, лемма 6] дана оценка модуля общего наименьшего знаменателя Q чисел:

$$\frac{(n!)^m}{\prod\limits_{x=1}^{\nu} b(x)}, \quad \nu = 0,\, 1,\, \ldots,\, n.$$

Эта оценка имеет вид

$$|Q| \leqslant n^{(m\vartheta+\varepsilon)n}, \tag{37}$$

где число ϑ определено равенством (11). Последняя оценка справедлива, если n достаточно велико (нижняя граница зависит от ε). Данное выше выражение для коэффициентов многочлена $P_0(z)$ и оценка (37) позволяют без труда получить оценку сверху модуля общего наименьшего знаменателя коэффициентов этого многочлена. В качестве такой оценки можно взять правую часть неравенства (37); при этом ε — произвольное положительное число, а n достаточно велико. Сделанных замечаний достаточно, чтобы завершить доказательство теоремы 3; (см., например, работы [8] или [9]).

Заключение

Таким образом, с помощью предложенной в работе эффективной конструкции аппроксимаций типа Паде удалось получить ряд результатов, относящихся к оценкам снизу модулей линейных форм в различных ситуациях. Возможности данной конструкции этим не исчерпываются; дальнейшие результаты могут быть получены с использованием теории делимости в полях алгебраических чисел.

Список литературы

1. Иванков П.Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с различными параметрами // Математические заметки. 1992. Т. 52, вып. 6. С. 25–31.
2. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 447 с.
3. Иванков П.Л. О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, вып. 6. С. 91–94.
4. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, вып. 1. С. 191–206.
5. Иванков П.Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Математический сборник. 1991. Т. 182, № 2. С. 283–302.
6. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во Московского университета, 1982. 312 с.
7. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145–151.

8. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. XVII, № 6. С. 1220–1235.

9. Галочкин А.И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестник Московского университета. Математика, механика. 1978. № 6. С. 30–34.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421100025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

On differentiation with respect to parameter of some functions

DOI: 10.7463/0512.0398478

 # 05, May 2012

P. L. Ivankov

Russia, Bauman Moscow State Technical University
ivankovpl@mail.ru

For the investigation of arithmetic properties of the values of the generalized hypergeometric functions linear approximating form is usually applied. Such a form must have a high order of zero at the origin of the coordinates and it can be constructed by means of Dirichlet principle. The results obtained on this way are considerably general but the possibilities of such a method are restricted when precise quantitative estimates are required. Additional difficulties arise for the functions with irrational parameters. In some cases the approximating form can be constructed effectively. Such a construction makes it possible to obtain more precise low estimates of linear forms for the functions with rational parameters and to consider a case of irrational parameters. In the present paper a new construction of Padé approximations for the hypergeometric functions and their derivatives (also with respect to parameter) is proposed. This construction is applied for the investigation of arithmetic properties of such functions.

References

1. Ivankov P.L. Ob arifmeticheskikh svoistvakh znachenii gipergeometricheskikh funktsii s razlichnymi parametrami [The arithmetic properties of values of hypergeometric functions with different parameters]. Matematicheskie zametki, 1992, vol. 52, no. 6, pp. 25-31.
2. Shidlovskii A.B. Transtsendentnye chisla [Transcendental numbers]. Moscow, Nauka, 1987. 447 p.
3. Ivankov P.L. O differentsirovanii gipergeometricheskoi funktsii po parametru [Differentiation of the hypergeometric function by the parameter]. Fundamental'naia i prikladnaia matematika, 2010, vol. 16, no. 6, pp. 91-94.
4. Ivankov P.L. O lineinoi nezavisimosti znachenii nekotorykh funktsii [Linear independence of values of certain functions]. Fundamental'naia i prikladnaia matematika, 1995, vol. 1, no. 1, pp. 191-206.

5. Ivankov P.L. Ob arifmeticheskikh svoistvakh znachenii gipergeometricheskikh funktsii [The arithmetic properties of values of hypergeometric functions]. Matematicheskii sbornik, 1991, vol. 182, no. 2, pp. 283-302.
6. Fel'dman N.I. Sed'maia problema Gil'berta [The seventh problem of Hilbert]. Moscow,MSU Publ., 1982. 312 p.
7. Ivankov P.L. O lineinoi nezavisimosti nekotorykh funktsii [On the linear independence of certain functions]. Chebyshevskii sbornik [Chebyshev collection], 2010, vol. 11, no. 1, pp. 145-151.
8. Galochkin A.I. Ob arifmeticheskikh svoistvakh znachenii nekotorykh tselykh gipergeometricheskikh funktsii [On arithmetic properties of values of certain entire Gelfand hypergeometric functions]. Sibirskii matematicheskii zhurnal [Siberian Mathematical Journal], 1976, vol. 17, no. 6, pp. 1220-1235.
9. Galochkin A.I. O nekotorom analoge metoda Zigelia [An analogue of the Siegel method]. Vestnik Moskovskogo universiteta. Matematika, mekhanika [Herald of Moscow University. Mathematics, mechanics], 1978, no. 6, pp. 30-34.