электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке

77-30569/362856

 # 04, апрель 2012

Гончаров Д. А.

УДК.534-141

МГТУ им. Н.Э. Баумана
zorghhh@gmail.com

ВВЕДЕНИЕ

Развитие ракетно-космической техники, создание космических аппаратов (КА) многократного запуска, совершающих различные манёвры на орбите, привели к усилению требований к системам отбора жидкости из баков КА.

В этой связи наиболее перспективными представляются капиллярные системы отбора жидкости (КСОЖ) из баков КА, отличающиеся высокой надежностью, эффективностью, долговечностью, стойкостью к воздействию агрессивных и криогенных компонентов, универсальностью применения, малой массой. Различные модификации таких систем находят в последнее время применения на новых типах КА и других летательных аппаратах.

Цель данной работы заключается в разработке приближенного аналитического метода для анализа краевой задачи об осесимметричных колебаниях двухслойной жидкости совместно с фазоразделяющей мембраной. При решении задачи использован метод собственных функций оператора Лапласа. Решение краевой задачи сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений, при усечении которой получено частотное уравнение задачи, и, таким образом, задача сведена к проблеме собственных значений с применением метода Бубнова-Галёркина. частотных характеристик в зависимости от параметров бака.

Рассматриваемая задача является модельной, применительно к современным конструкциям ракетно-космической техники и ранее не рассматривалась.

Решение схожей задачи о колебаниях одной жидкости с диафрагмой было выполнено в работе [4], решение задачи о колебаниях жидкости со свободной поверхностью и упругим днищем - в работе [5]. В работе [6] рассмотрена задача о колебаниях стратифицированной жидкости с упругим днищем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

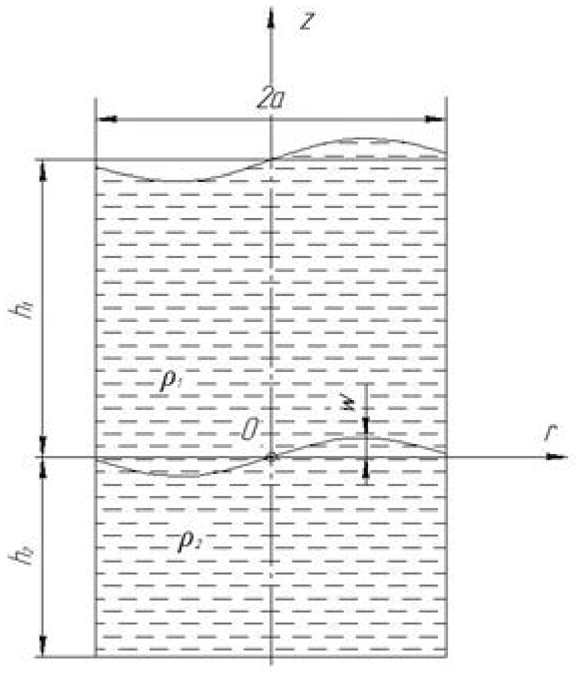

Рис. 1. Расчётная модель цилиндрического бака с КСОЖ

Полагаем бак жёстким, фазоразделитель будем рассматривать как непроницаемую мембрану, жестко закрепленную по своему контуру. Обозначим её прогиб через w. Введём цилиндрическую систему координат, связанную с центром мембраны, как показано на рис. 1.

Примем плотности сред выше и ниже мембраны как ρ_1 и ρ_2 соответственно, разность плотностей обусловлена двухфазным состоянием криогенного компонента выше мембраны. Жидкость примем невязкой и несжимаемой.

Рассматривая движение жидкости как безвихревое, введём потенциал скоростей жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа, который для данной задачи примет следующий вид

$$\nabla^2\varphi^{(1)} = 0, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le a, \\ 0 \le \eta \le 2\pi, \\ 0 \le z \le h_1, \end{matrix} \quad \nabla^2\varphi^{(2)} = 0, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le a, \\ 0 \le \eta \le 2\pi, \\ -h_2 \le z \le 0, \end{matrix} \tag{1.1}$$

где верхний индекс (1), (2) указывает на жидкость выше и ниже мембраны соответственно.

Условия непротекания в свою очередь примут вид

$$\left.\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z}\right|_{z=-h_2} = 0, \tag{1.2}$$

условие на свободной поверхности

$$\left.\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial t^2}\right|_{z=h_1} = 0. \tag{1.3}$$

Уравнение колебаний мембраны в осесимметричной постановке и динамическое граничное условие определяет выражение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{m_S}{\tau}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau}\left(\varrho_2\left.\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t}\right|_{z=0} - \varrho_1\left.\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}\right|_{z=0}\right), \tag{1.4}$$

где m_S – масса мембраны, τ – натяжение мембраны, $p_1|_{z=0} - p_2|_{z=0}$ – разность давлений жидкости на мембрану.

Граничные условия для мембраны имеют вид

$$w(r,t)|_{r=a} = 0. \qquad (1.5)$$

Кинематические условия при $z = 0$ задают равенства

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial t}, \qquad \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (1.6)$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Введём обобщённые координаты $s_k(t), k \in \mathbb{N}$ и представим перемещения мембраны в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний мембраны без жидкости

$$w(t,r) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t) \cdot \tilde{R}_k(r), \qquad (2.1)$$

где $\tilde{R}_k(r)$ – формы собственных колебаний мембраны без жидкости, удовлетворяющие условиям полноты и ортогональности, а также граничным условиям при $r = a$. Функции $\tilde{R}_k(r)$ должны удовлетворять уравнению собственных форм колебаний мембраны и в нашем случае имеют вид:

$$\tilde{R}_k(r) = J_0\left(\mu_{0k}\frac{r}{a}\right), \qquad (2.2)$$

где μ_{0k} – корни функции Бесселя 1-го рода, нулевого порядка, причём

$$\mu_{0k} = \frac{\omega_k^2 m_s^2}{\tau^2},$$

ω_k – частота собственных осесимметричных колебаний k-тона мембраны в отсутствии жидкости

Потенциал скоростей i – й жидкости представим в виде

$$\varphi^{(i)}(t,r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n^{(i)}(t) R_n^{(i)}(r) X_n^{(i)}(z). \qquad (2.3)$$

Решая методом Фурье уравнение Лапласа (1.1) для первой и второй жидкостей соответственно и удовлетворяя граничным условиям (1.2), а также - условию на свободной поверхности (1.3), очевидным образом получим выражения для потенциалов $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$

$$\varphi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(t) J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)\left\{-\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\frac{h_2}{a}\right)\mathrm{cth}\left(\xi_{0n}\frac{h_1}{a}\right)\mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\frac{z}{a}\right) + \mathrm{sh}\left(\xi_{0n}\frac{h_2}{a}\right)\cdot\mathrm{ch}\left(\xi_{0n}\frac{z}{a}\right)\right\},$$

$$\varphi^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(t) J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)\mathrm{ch}\left[\frac{\xi_{0n}}{a}(z+h_2)\right]. \tag{2.4}$$

Вид функций $R_n^{(i)}(r)$ определили из уравнения Лапласа, которое при разделении переменных в цилиндрических координатах имеет вид уравнения Бесселя

$$\frac{d^2R_n^{(i)}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_n^{(i)}(r)}{dr} + \varkappa_n^2 R_n^{(i)}(r) = 0,$$

решением которого имеет вид $R_n^{(i)}(r) = A_n J_0(\varkappa_n r)$, а с учётом граничных условий (1.2) и нормировки $- R_n^{(i)}(r) = J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)$.

Разложим $J_0\left(\mu_{0k}\frac{r}{a}\right)$ в ряд по ортогональным функциям

$$J_0\left(\mu_{0k}\frac{r}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{nk}\cdot J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right),$$

где $D_{nk} = \dfrac{2\xi_{0n}J_0(\xi_{0n})}{(\xi_{0n}^2 - \mu_{0n}^2)J_1(\mu_{0k})}$.

Кинематическое условие на мембране (1.6) можем представить в виде

$$w(t,r)=\int\limits_t \left.\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=0} dt;\;\; w(t,r)=\int\limits_t \left.\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z}\right|_{z=0} dt,$$

или, в развернутом виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} D_{nk}\cdot J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)T_n^{(1)}(t)\left.\frac{dX_n^{(1)}(z)}{dz}\right|_{z=0},$$

$$(2.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} D_{nk}\cdot J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)T_n^{(2)}(t)\left.\frac{dX_n^{(2)}(z)}{dz}\right|_{z=0}.$$

Помножив (2.5) на $rJ_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)$, проинтегрируем на интервале от 0 до a и с учётом ортогональности функций Бесселя, получим выражения для потенциалов $\varphi^{(i)}$

$$\varphi^{(1)}(t,r,z)=\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(1)}(r)X_n^{(1)}(z)\,b_{nk}^{(1)},$$

$$(2.6)$$

$$\varphi^{(2)}(t,r,z)=\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(2)}(r)X_n^{(2)}(z)\,b_{nk}^{(2)},$$

где

$$b_{nk}^{(i)}=\frac{D_{nk}}{\left(\left.\frac{dX_n^{(i)}(z)}{dz}\right|_{z=0}\right)}.$$

Запишем теперь динамическое граничное условие. Согласно (1.4) и (2.6) оно примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\frac{d^2}{dr^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} D_{nk}J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)\right]+\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\frac{d}{dr}\left[\sum_{n=1}^{\infty} D_{nk}J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)\right]-\frac{m_S}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{s}_k(t)\sum_{n=1}^{\infty} D_{nk}J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)=$$

$$(2.7)$$

$$=\frac{1}{\tau}\left[\varrho_2\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{s}_k(t)\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(2)}(r)X_n^{(2)}(z)\,b_{nk}^{(2)}-\varrho_1\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{s}_k(t)\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(1)}(r)X_n^{(1)}(z)\,b_{nk}^{(1)}\right].$$

Поскольку $R_n^{(1)}(r) \equiv R_n^{(2)}(r)$, будем в дальнейшем опускать верхний индекс и писать $R_n(r)$.

Помножив полученное уравнение на $rJ_0\left(\xi_{0j}\frac{r}{a}\right), j \in \mathbb{N}$ и интегрировав в пределах от 0 до a с учётом ортогональности функций, получим

$$s_k \cdot \int_0^a rJ_0''\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) \cdot J_0\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) dr + \frac{s_k}{r}\int_0^a rJ_0'\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) \cdot J_0\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) dr - \frac{m_S}{\tau}\ddot{s}_k \int_0^a rJ_0^2\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) dr =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[\varrho_2 \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{s}_j \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(2)} b_{nj}^{(2)} - \varrho_1 \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{s}_j \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(1)} b_{nj}^{(1)}\right], \tag{2.8}$$

где

$$d_{nk}^{(i)} = \int_0^a r \cdot J_0\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right) dr \cdot X_n^{(i)}(0).$$

Запишем выражение (2.8) в виде

$$s_k \cdot \int_0^a \frac{d}{dr}\left[\frac{rdJ_0\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right)}{dr}\right] \cdot J_0\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) dr - \frac{m_S}{\tau}\ddot{s}_k \int_0^a rJ_0^2\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) dr =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[\varrho_2 \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{s}_j \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(2)} b_{nj}^{(2)} - \varrho_1 \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{s}_j \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(1)} b_{nj}^{(1)}\right]. \tag{2.8$'$}$$

Обозначим

$$C_k = \int_0^a \frac{d}{dr}\left[\frac{rdJ_0\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right)}{dr}\right] \cdot J_0\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) dr,\ m_k = \frac{m_S}{\tau}\int_0^a rJ_0^2\left(\xi_{0k}\frac{r}{a}\right) dr.$$

Тогда

$$s_k C_k - m_k \ddot{s}_k - \frac{1}{\tau}\varrho_2 \ddot{s}_k \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(2)} b_{nj}^{(2)} + \frac{1}{\tau}\varrho_1 \ddot{s}_j \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(1)} b_{nj}^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[\varrho_2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{\infty} \ddot{s}_j \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(2)} b_{nj}^{(2)} - \varrho_1 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{\infty} \ddot{s}_j \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(1)} b_{nj}^{(1)}\right]. \tag{2.9}$$

Положим

$$\underset{k=j}{m^*_{kj}} = m_k - \frac{1}{\tau}\varrho_2 \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(2)} b_{nj}^{(2)} + \frac{1}{\tau}\varrho_1 \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(1)} b_{nj}^{(1)},$$

$$\underset{k\neq j}{m^*_{kj}} = \frac{1}{\tau}\left[\varrho_2 \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(2)} b_{nj}^{(2)} - \varrho_1 \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}^{(1)} b_{nj}^{(1)}\right].$$

Откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (\ddot{s}_1 m_{11}^* + s_1 C_1) + \ddot{s}_2 m_{12}^* + \ddot{s}_3 m_{13}^* + \cdots = 0, \\ \ddot{s}_1 m_{21}^* + (\ddot{s}_2 m_{22}^* + s_2 C_2) + \ddot{s}_3 m_{13}^* + \cdots = 0, \\ \cdots \\ \ddot{s}_k m_{k1}^* + \cdots + (\ddot{s}_k m_{kk}^* + s_k C_k) + \cdots = 0. \end{cases}$$

Составив определитель k-го порядка которой, получаем характеристическое уравнение.

$$\begin{vmatrix} C_1 - \omega^2 m_{11}^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 - \omega^2 m_{22}^* & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_k - \omega^2 m_{kk}^* \end{vmatrix} = 0$$

Важно отметить, что недиагональные члены определителя обратятся в ноль ввиду ортогональности функций Бесселя.

Зависимость частоты 1-го тона колебаний системы от радиального размера бака представлена на рис. 2. Данные взяты из работы [3], $\delta_{\text{м}}$ – толщина мембраны, $\varrho_{\text{м}}$ – плотность материала мембраны.

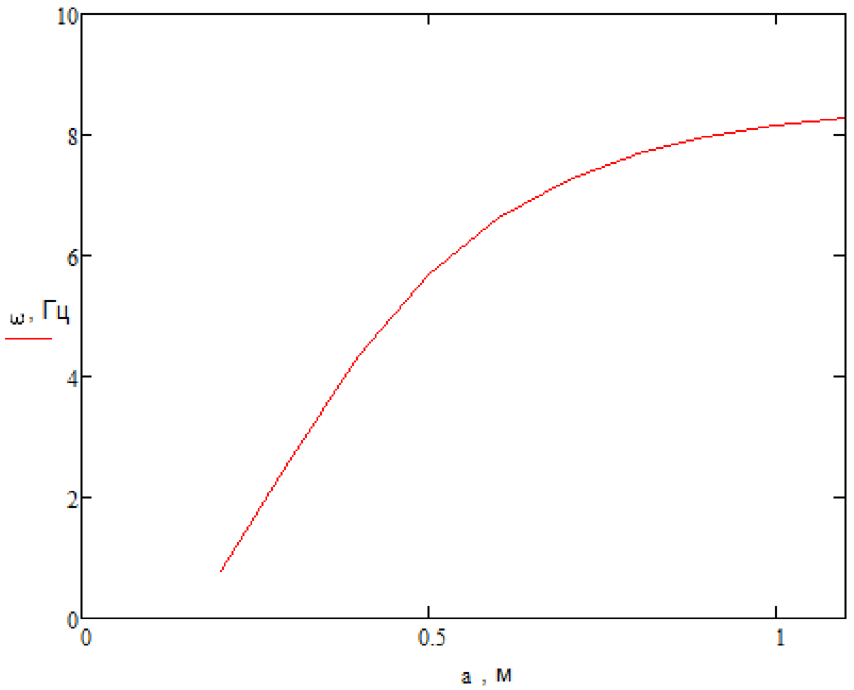

Рис. 2. Зависимость частоты от радиуса бака

$$h_1 = 0{,}2\ \text{м};\ h_2 = 0{,}2\ \text{м};\ \delta_\text{м} = 1\ \text{мм};\ \varrho_\text{м} = 7800\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\ \varrho_1 = 1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\varrho_2 = 2000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\ \tau = 2000\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе разработан приближенно-аналитический метод (на основе принципа Галёркина) рассматриваемой краевой задачи гидроупругости о свободных колебаниях двухслойной жидкости с упругим элементом в виде мембраны. Получено частотное уравнение этой краевой задачи. Найдены численные значения частот собственных колебаний и построена их зависимость от геометрических параметров бака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. «Механика жидкости и газа», М.: «Дрофа», 2003.- 840 с.

2. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. "Дифференциальные уравнения математической физики", М. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006.- 368 с.

3. «Капиллярные системы отбора жидкости из баков космических аппаратов» под ред. В.М.Поляева, М.: УНПЦ «Энергомаш», 1997.- 328 с.

4. Пожалостин А.А. "Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном"//Известия высших учебных заведений. Сер. Авиационная техника.- 1963.- №4.

5. Петренко М.П. "Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости"// Прикладная механика.- 1969.- Т. V, №6.- С. 44-50.

6. Андронов А.В. "Колебания идеальной стратифицированной жидкости в контейнере с упругим днищем"// Вопросы волновых движений жидкости : сб. науч. тр. - Краснодар: КубГУ, 1987.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS 77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Axisymmetric oscillations of dual-density liquid in the cylindrical tank

77-30569/362856

 # 04, April 2012

Goncharov D.A.

Bauman Moscow State Technical University

zorghhh@gmail.com

This article considers a model problem for a funded system of capillary suction device of a spacecraft fuel tank. Two fluids undergoing a joint motion with a flexible membrane are considered. Axisymmetric vibrations of the system, dynamic and kinematic conditions impact on the membrane, irrotational fluid motion are explored. The author introduced the velocity potential of fluid, for which the Laplace equation can be written. The Laplace equation was solved by Fourier method. The dynamic boundary conditions for a membrane were obtained by the characteristic equation for natural frequencies of the vibration of joint fluids and membrane. The dynamic characteristics of the oscillatory system were defined by their dependence on the geometric parameters of the tank

Publications with keywords: Laplace equation, the capillary system of selection of the liquid, phase separator, the membrane, the fluid velocity potential, Bessel functions, orthogonal functions
Publications with words: Laplace equation, the capillary system of selection of the liquid, phase separator, the membrane, the fluid velocity potential, Bessel functions, orthogonal functions

References

1. Loitsianskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and Gas Mechanics]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p.

2. Martinson L.K., Malov Iu.I. *Differentsial'nye uravneniia matematicheskoi fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006. 368 p.

3. Bagrov V.V., Kurpatenkov A.V., Poliaev V.M., et al. *Kapilliarnye sistemy otbora zhidkosti iz bakov kosmicheskikh apparatov* [The capillary system of selection of the liquid from the tanks of space vehicles]. Moscow, UNPTs «Energomash» Publ., 1997. 328 p.

4. Pozhalostin A.A. Svobodnye kolebaniia zhidkosti v zhestkom krugovom tsilindricheskom sosude s uprugim ploskim dnom [Free oscillations of liquid in a rigid circular cylindrical vessel with an elastic flat-bottomed]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Ser. Aviatsionnaia tekhnika*, 1963, no. 4.

5. Petrenko M.P. Sobstvennye kolebaniia zhidkosti so svobodnoi poverkhnost'iu i uprugogo dnishcha tsilindricheskoi polosti [Natural oscillations of a fluid with free surface and an elastic bottom of the cylindrical cavity]. *Prikladnaia mekhanika*, 1969, vol.5, no. 6, pp. 44–50.

6. Andronov A.V. Kolebaniia ideal'noi stratifitsirovannoi zhidkosti v konteinere s uprugim dnishchem [Oscillations of an ideal stratified fluid in a container with elastic bottom]. *Voprosy volnovykh dvizhenii zhidkosti: collected papers* [Questions of wave motions of fluid]. Krasnodar, KubGU Publ., 1987.