

Анализ собственных частот конструкций мостов при нарушении их целостности

77-30569/311032

03, март 2012

Щеглова Н. Н.

УДК 539.4

МГТУ им. Н.Э. Баумана

SheglovaNN@yandex.ru

Актуальность вопроса катастрофических разрушений конструкций, к сожалению, не только не снижается в наше время, а, наоборот, возрастает. Проводимые расследования зачастую указывают на ошибки при проектировании: неполный учет действующих нагрузок, что приводит к возникновению колебаний и резонансу. При этом развивается большое число разориентированных трещин, что и приводит к катастрофе. Как отмечено в [2], анализ известной катастрофы Такомского моста «указал на необходимость динамического расчета мостов» и экспериментальных исследований параметров их колебаний (собственных частот и угловых подвижек) [5].

Анализ работ ученых [1-5], работающих в области теории упругости и механики разрушения, свидетельствует о том, что теоретический анализ в этих областях – это очень сложная и трудоемкая задача.

Разрушение – это предмет изучения теории прочности, теории разрушения или механики разрушения и сопротивления материалов. Однако ввиду актуальности проблемы безопасности и целостности как строительных сооружений, так и любых других конструкций и приборов, этими вопросами занимаются ученые различных областей науки и техники. Подходы, терминологии и приемы решения задач, связанные с определением сопротивления разрушению очень разнообразны и специфичны для каждой области науки, что может приводить к непониманию между специалистами смежных областей, решающих одни и те же задачи. Обычно специалисты в области теории разрушения анализируют изменение напряжений в теле исследуемого объекта при возникновении трещины. Чаще всего аналитические исследования проводятся с помощью МКЭ и компьютерного пакета ANSYS. При появлении трещины изменяются напряжения и смещаются узлы сетки, с помощью которой объект был разбит на конечные элементы. Одним из интересных экспериментальных способов является способ

смещения муаровых полос, основанный на явлении механической интерференции при освещении поверхности объекта пучком света. Но такие методы пригодны для небольших объектов, которые можно исследовать в условиях лаборатории.

Настоящая работа посвящена вопросу выявления признаков, по которым можно было бы определить место расположения опасного сечения. Известно [4], что при появлении трещин в конструкции начинает падать основная (первая) собственная частота.

Для анализа выбираем частотную математическую модель – модель колебаний системы с распределенными параметрами. Представим пролет моста (рис. 1) в виде прямолинейного стержня или балки, шарнирно опертой на концах (рис. 2), и рассмотрим ее уравнение изгибных колебаний.



Рис. 1. Ворошиловский мост в Ростове-на-Дону

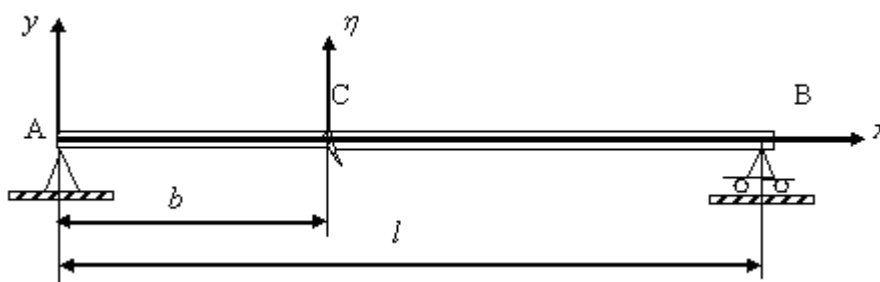


Рис.2. Модель шарнирно опертой балки

Математическая модель для целостной шарнирно опертой балки известна [6]. Рассмотрим эту модель.

Частотные методы исследования предполагают решение волнового уравнения. Дифференциальное уравнение изгиба балки – это волновое уравнение в частных производных

(1) относительно амплитуд (при условии, что диаметр и свойства поперечного сечения стержня постоянны):

$$EJ \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где EJ – жесткость сечения балки при изгибе;

η – вертикальное смещение сечения балки;

ρ – масса единицы длины балки (погонная масса стержня).

Решение уравнения (1) можно представить в виде (2) или (3), где $A_j(x)$ – функция только абсциссы, представляющая собой амплитудное смещение (искомая форма собственных колебаний для j – той частоты).

$$\eta_j(x, t) = A_j(x) e^{i\omega_j t} \quad (2)$$

$$\eta_j(x, t) = A_j(x) \sin(\omega_j t + \varphi) \quad (3)$$

Если подставить (3) в (1), то получается обыкновенное дифференциальное уравнение (4) относительно амплитуды $A_j(x)$ для j – той частоты:

$$\omega_j^2 A_j(x) - \alpha_u^2 \frac{d^4 A_j(x)}{dx^4} = 0, \quad (4)$$

где $\alpha_u = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ – основной физический параметр балки при изгибе.

Для решения (4) необходимо задать граничные и начальные условия для левого и правого концов балки:

$$\begin{aligned} \eta(0, t) = \eta''(0, t) = 0, \quad \eta(l, t) = \eta''(l, t) = 0, \\ \eta(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \eta'(x, 0) = \varphi_2(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Для шарнирного стержня равны нулю вертикальные смещения и изгибающие моменты на концах. Равенство нулю изгибающего момента математически сводится к равенству нулю второй производной от смещения по x .

Начальные условия, т.е. начальное распределение, задается смещением и скоростью всех точек стержня в момент времени $t=0$.

Уравнения решаются с помощью преобразований Лапласа и функций А.Н. Крылова – S, T, U, V , которые связаны между собой условиями (6):

$$\begin{aligned} S'(b_j x) &= b_j V(b_j x); & V'(b_j x) &= b_j U(b_j x) \\ U'(b_j x) &= b_j T(b_j x); & T'(b_j x) &= b_j S(b_j x) \end{aligned} \quad (6)$$

Окончательно решение принимает вид (7) или (8).

$$A_j(x) = A_j(0)S(b_j x) + \frac{1}{b_j} A_j'(0)T(b_j x) + \frac{1}{b_j^2} A_j''(0)U(b_j x) + \frac{1}{b_j^3} A_j'''(0)V(b_j x) \quad (7)$$

$$A_j(x) = C_1 S(b_j x) + C_2 T(b_j x) + C_3 U(b_j x) + C_4 V(b_j x) \quad (8)$$

из граничных условий.

Из условий на левом конце вытекает, что $C_1 = C_3 = 0$. Тогда выражение для амплитуд примет вид (9).

$$A_j(x) = C_2 T(b_j x) + C_4 V(b_j x) \quad (9)$$

Используя условия на правом конце получим систему уравнений (10) относительно $A_j'(0)$ и $A_j'''(0)$ или систему (11) относительно C_1 и C_2 .

$$\left. \begin{aligned} A_j'(0)T(b_j l) + \frac{1}{b_j^2} A_j'''(0)V(b_j l) &= 0; \\ A_j'(0)V(b_j l) + \frac{1}{b_j^2} A_j'''(0)T(b_j l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} C_2 T(b_j l) + C_4 V(b_j l) &= 0; \\ C_2 V(b_j l) + C_4 T(b_j l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Система может иметь отличные от нуля решения только в том случае, если ее определитель равен нулю, т.е. (12) или (13) и (14),

$$T^2(b_j l) - V^2(b_j l) = 0, \quad (12)$$

$$T(b_j l) = V(b_j l) \quad (13)$$

$$\text{или} \quad T(b_j l) = -V(b_j l), \quad (14)$$

что возможно только при условиях (15):

$$\sin(b_j l) = 0 \quad \text{или} \quad \text{sh}(b_j l) = 0, \quad (15)$$

которые удовлетворяются решением (16):

$$b_j = j\pi/l. \quad (16)$$

Таким образом, для балки на шарнирных опорах частоты определяются по формулам (17), т.е. собственные частоты пропорциональны квадратам натуральных чисел:

$$\omega_j = \frac{\alpha_u (\pi j)^2}{l^2} \quad \text{или} \quad \omega_j = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \left(\frac{\pi j}{l} \right)^2. \quad (17)$$

Уравнение упругой линии можно переписать в виде (18).

$$A_j(x) = \frac{1}{b_j} A_j'(0) T(b_j x) + \frac{1}{b_j^3} A_j'''(0) V(b_j x) \quad (18)$$

Т.к. $\sin(b_j l) = 0$, то $T(b_j l) = V(b_j l) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} b_j l$. (19)

С учетом (19) запишем (10) в виде (20):

$$\left[A_j'(0) + \frac{1}{b_j^2} A_j'''(0) \right] \frac{1}{2} \operatorname{sh}(b_j l) = 0, \quad (20)$$

Откуда

$$A_j'(0) = -\frac{1}{b_j^2} A_j'''(0)$$

Формы собственных колебаний (упругой линии) имеют вид (21):

$$A_j(x) = \frac{A_j'(0)}{b_j} [T(b_j x) - V(b_j x)] = \frac{A_j'(0)}{b_j} \sin \frac{\pi j x}{l}. \quad (21)$$

где $A_j'(0)$ – величина произвольная, которая зависит от Н.У.

Поэтому собственное колебание можно записать и так:

$$\eta_j(x, t) = B_j \sin \frac{\pi j x}{l} \cos(\omega_j t + \varepsilon_j).$$

Ниже приведены формы пяти собственных колебаний для $n=1,2,3,4,5$.

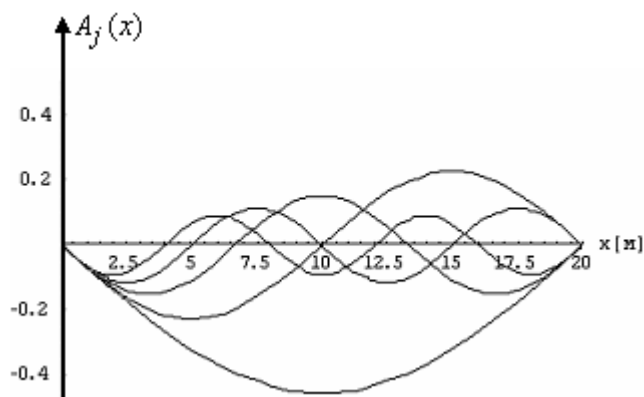


Рис. 3. Формы собственных колебаний

Для выявления критерия локализации проблемного сечения необходимо построить модель, учитывающую положение трещины по длине пролета. Присоединение дополнительной точечной массы на стержне приводит к такому же снижению основной собственной частоты, как и появлению трещины. Поэтому используем известную [6] модель – модель балки с точечным грузом. Расчетная схема показана на рис. 4.

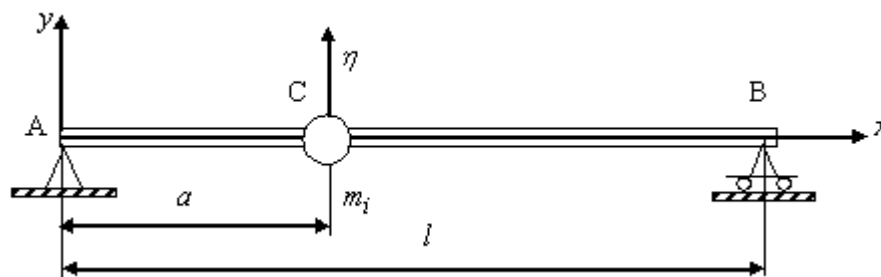


Рис. 4. Модель балки с точечным грузом

В случае сосредоточенной массы в этой точке прикладывается сила инерции (22).

$$-m_i \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = m_i \omega^2 A_i \sin(\omega t + \varphi), \quad (22)$$

где A_j – величина амплитуды в точке присоединения массы m_i .

Амплитудное значение силы обозначено:

$$R_i = m_i \omega^2 A_i$$

Сопряжение участков выполняется следующим образом.

В случае общего для обоих участков начала отсчета принимается, что поперечные силы для правого и левого участков отличаются на величину R_i :

$$EJ \left(\frac{d^3 A}{dx^3} \right)_{\text{прав}} = EJ \left(\frac{d^3 A}{dx^3} \right)_{\text{лев}} + R_i$$

Выражение функции A_i для правого и левого участка отличаются дополнительным слагаемым (см.23), где a – расстояние от начала координат до присоединенного груза.

$$A_{\text{пр}} = A_{\text{лев}} + \frac{R_i}{\alpha^3 EJ} V[b_j(x-a)] \quad (23)$$

$$\frac{R_i}{b_j^3 EJ} V[b_j(x-a)] = \frac{m_i \omega^2}{b_j^3 EJ} A_i V[b_j(x-a)]$$

С учетом того, что $b_j^2 = \frac{\omega_j}{\alpha_u}$ и $\alpha_u = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ получаем:

$$\frac{m_i \omega^2}{b_j^3 EJ} = \frac{m_i}{\rho l} b_j l = \mu_i b_j l$$

где $\mu_i = \frac{m_i}{\rho l}$ – отношение массы груза к собственной массе балки.

Тогда
$$A_{np} = A_{лев} + b_j l \mu_i A_i V[b_j(x-a)]$$

В точке прикрепления массы:
$$A_{x=b} = C_2 T(b_j a) + C_4 V(b_j a)$$

Прогиб для правого участка ($x > a$) можно представить в виде (24), где C_2 и C_4 – некоторые постоянные.

$$A = C_2 T(b_j x) + C_4 V(b_j x) + b_j l \mu_i [C_2 T(b_j a) + C_4 V(b_j a)] V[b_j(x-a)] \quad (24)$$

Если использовать граничные условия для конца балки (25):

$$A_{x=l} = 0; \quad \left(\frac{d^2 A}{dx^2}\right)_{x=l} = 0, \quad (25)$$

то можно получить уравнения (26) относительно этих постоянных:

$$\left. \begin{aligned} C_2 \{T(b_j l) + b_j l \mu_i T(b_j a) V[b_j(l-a)]\} + C_4 \{V(b_j l) + b_j l \mu_i V(b_j a) V[b_j(l-a)]\} &= 0 \\ C_2 \{V(b_j l) + b_j l \mu_i T(b_j a) T[b_j(l-a)]\} + C_4 \{T(b_j l) + b_j l \mu_i V(b_j a) T[b_j(l-a)]\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Уравнения будут иметь отличные от нуля решения, если определитель системы (26) будет равен нулю.

Таким образом, получается уравнение частот (27), которое нам необходимо для анализа:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \{T(b_j l) + b_j l \mu_i T(b_j a) V[b_j(l-a)]\} & \{V(b_j l) + b_j l \mu_i V(b_j a) V[b_j(l-a)]\} \\ \{V(b_j l) + b_j l \mu_i T(b_j a) T[b_j(l-a)]\} & \{T(b_j l) + b_j l \mu_i V(b_j a) T[b_j(l-a)]\} \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

Проанализируем это уравнение для различных значений масс и местоположений присоединенного груза. На рис.5 показано изменение частот при увеличении массы (при изменении параметра $\mu_i = \frac{m_i}{\rho l}$).

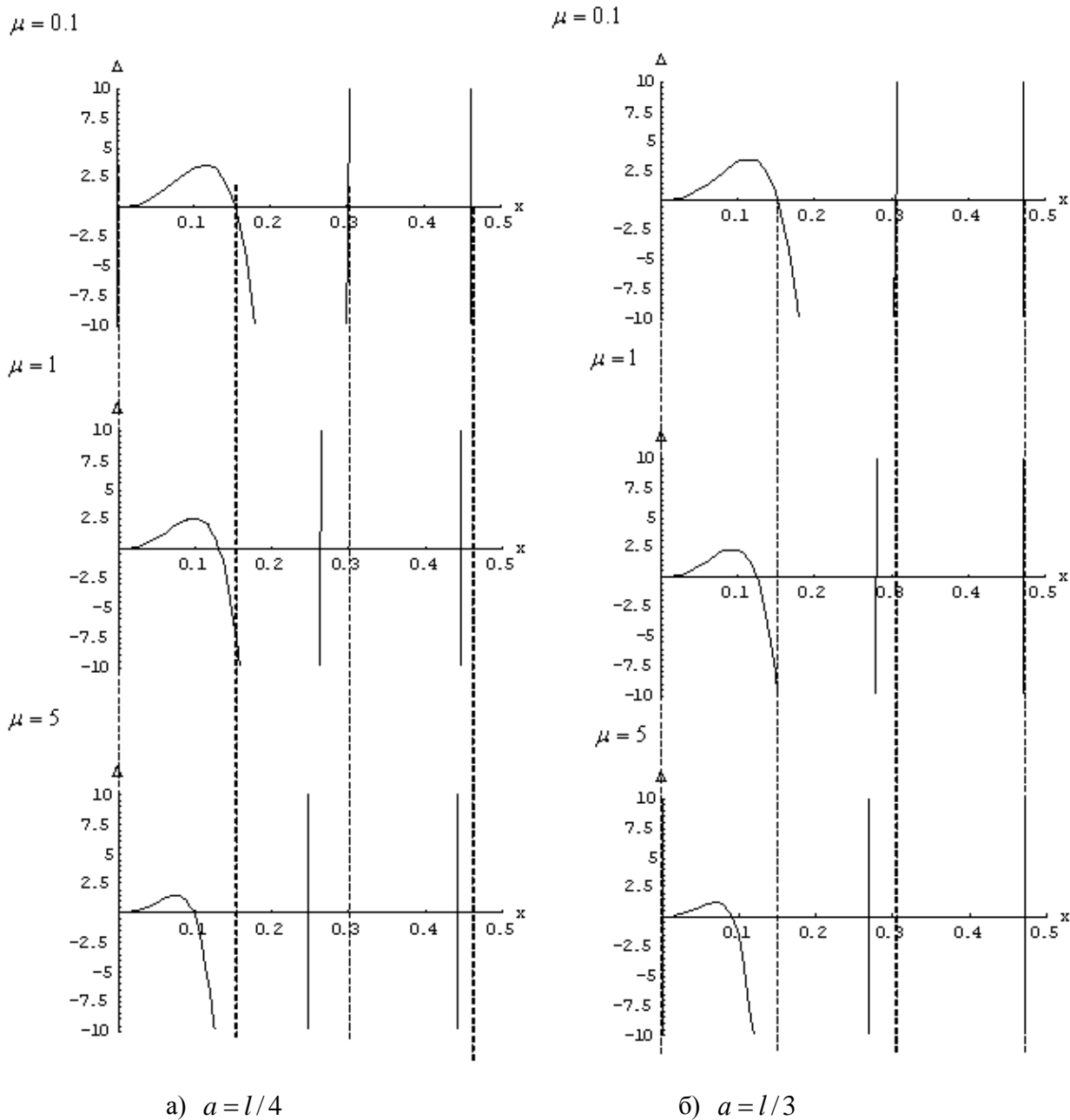


Рис. 5. Сдвиг частот при изменении массы $\mu_i = \frac{m_i}{\rho l}$ в точках $a = l/4$ и $a = l/3$

По оси x откладываем не частоту, а $b_j = \sqrt{\frac{2\pi f}{\alpha_u}}$ для компактности графика и удобства

анализа. По оси y отложено значение определителя (37). Точки пересечения графика с осью x являются решением уравнения (37).

На рис. 5 – рис. 6 показан сдвиг частот при изменении массы (груз находится в точках $a = l/4$, $a = l/3$, $a = l/2$, $a = 2l/3$ соответственно).

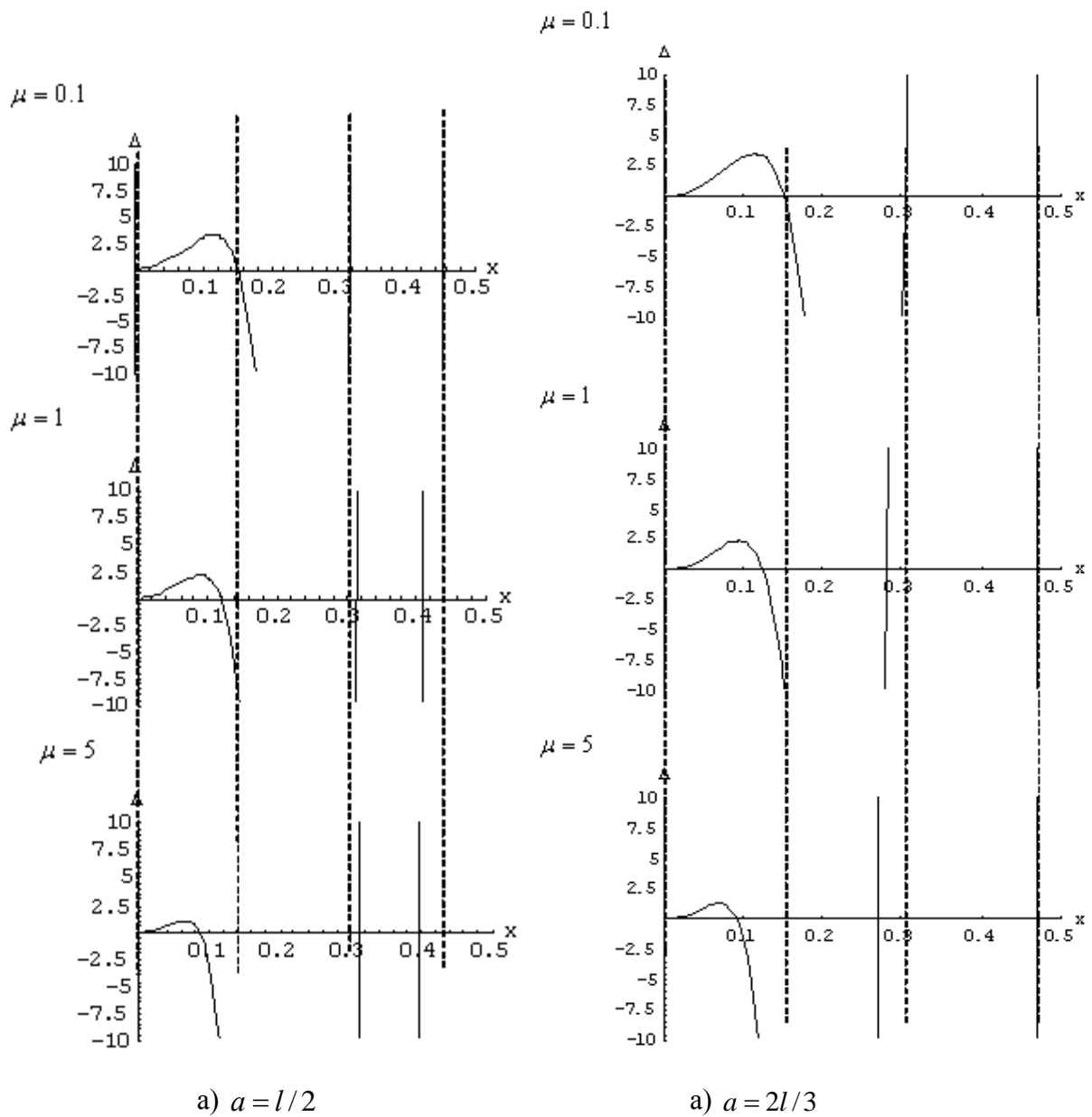


Рис. 6. Сдвиг частот при изменении массы $\mu_i = \frac{m_i}{\rho l}$ (груз в точке $a = l/2$ и $a = 2l/3$)

На рис. 7 и рис. 8. показан сдвиг частот при перемещении массы вдоль стержня

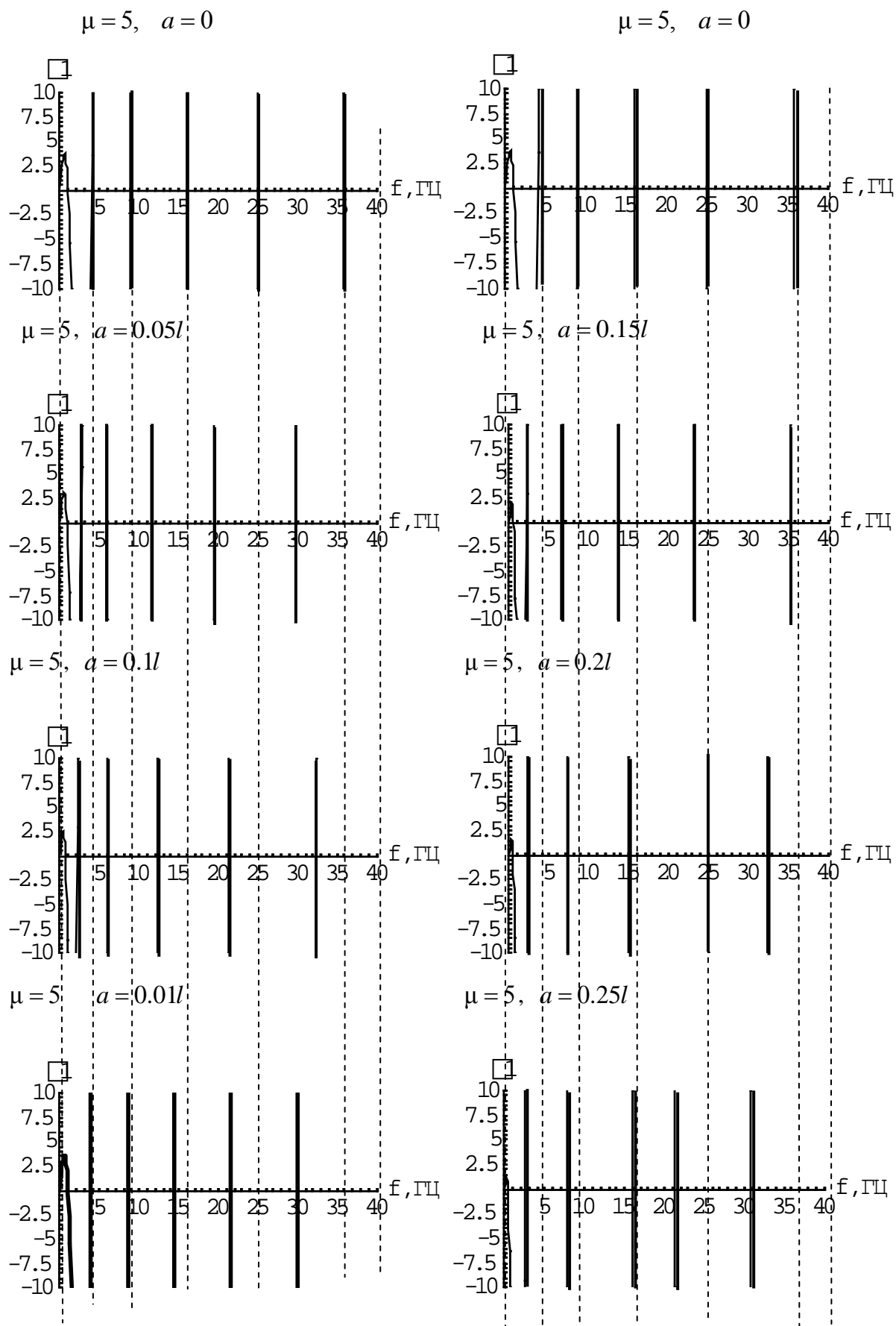


Рис. 7. Сдвиг частот при перемещении массы вдоль стержня вблизи опоры ($\mu = 5$).

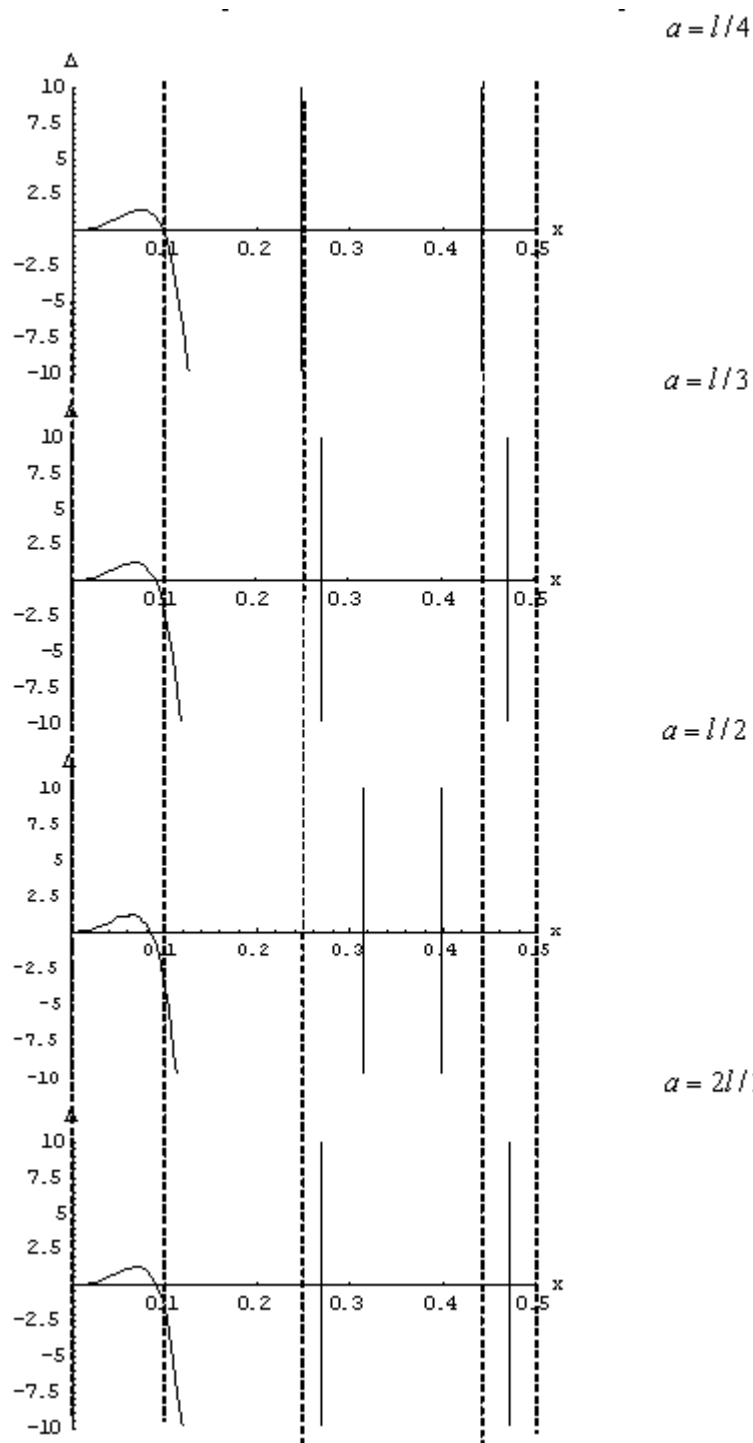


Рис. 8. Сдвиг частот при перемещении массы вдоль стержня ($\mu = 5$).

Проанализируем полученные результаты. Во всех случаях характер изменения частот одинаков. Это видно на рис. 9 и рис. 10, где по оси абсцисс отложено положение груза на балке в относительных единицах ($\frac{a}{l}$), а по оси ординат – изменение частоты в Гц для каждого положения груза на балке.

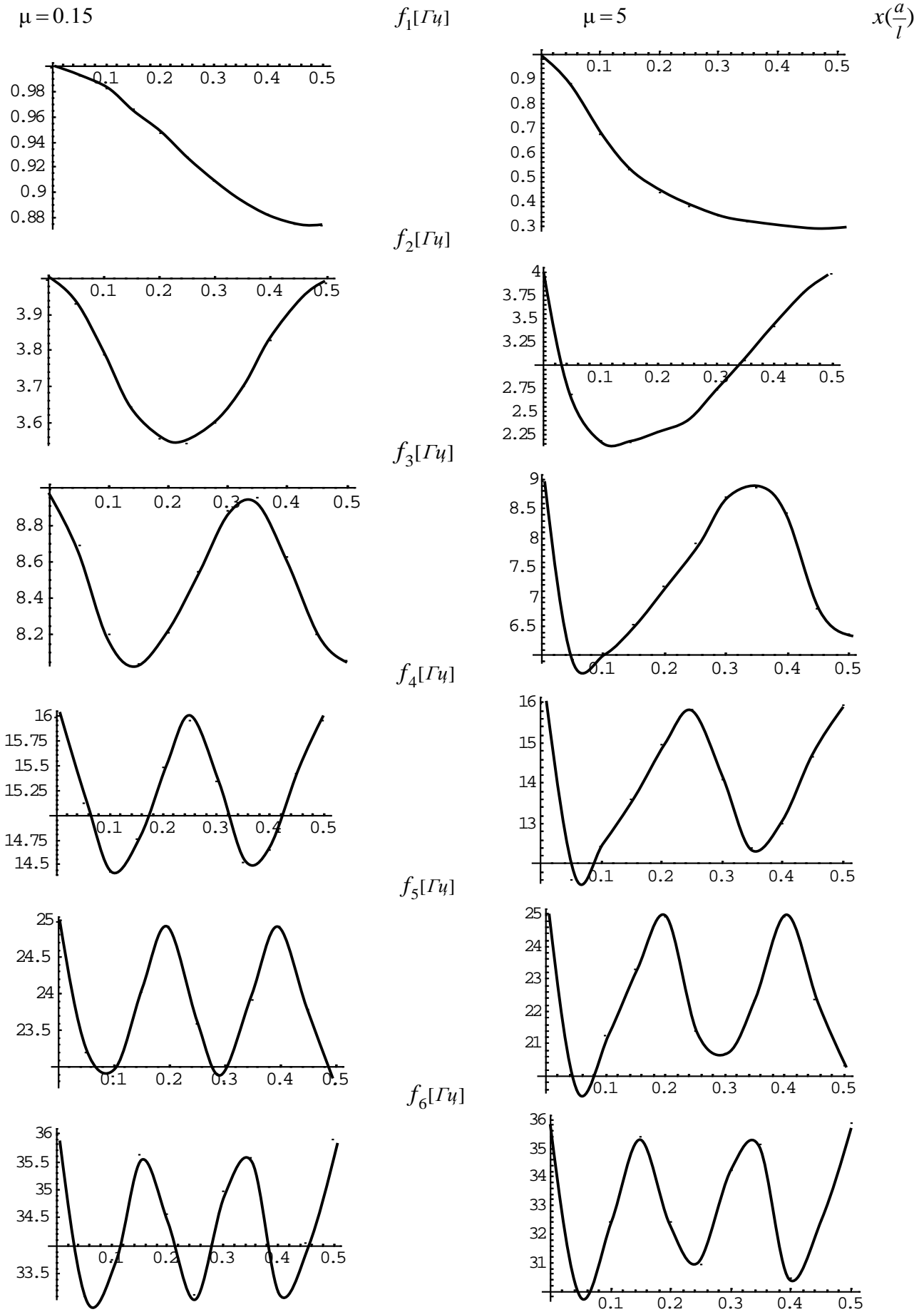


Рис. 9. Изменение частот в зависимости от положения груза относительно балки

На рис. 10 для наглядности совмещены все 6 графиков.

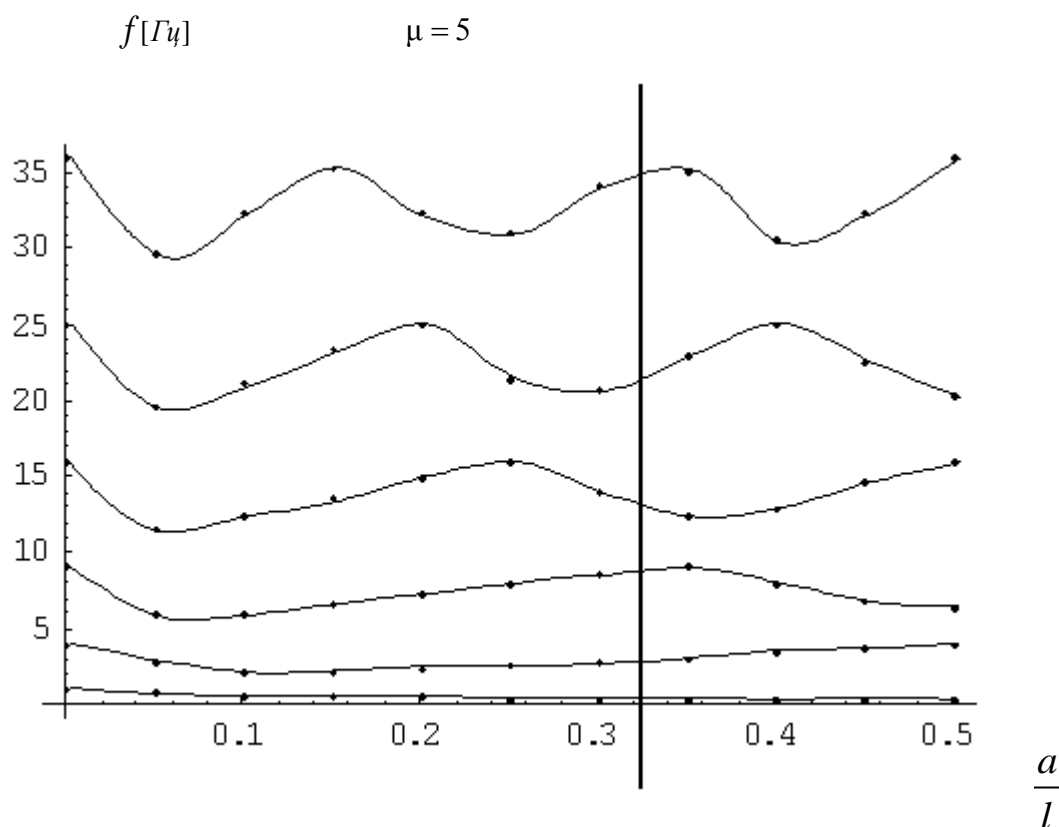


Рис. 10. Совмещенные графики частот

Анализируя величину падения частот, можно выявить некоторые закономерности:

1. Если появилось опасное сечение, то основная частота падает.
2. Если для 2-ой, 4-ой и 6-ой частот одновременно наблюдается малое падение, а для 5-й и 3-ей одновременно – большое, то опасное сечение в середине балки.
3. Если мало падение 3-ей частоты и велико 4-ой одновременно, то опасное сечение находится на расстоянии $1/3$ от одной из опор.
4. Если мало падение 4-ой и велико падение 6-ой частот одновременно, то опасное сечение находится на расстоянии $1/4$ от одной из опор.
5. Если велико падение всех частот одновременно, то опасное сечение находится вблизи опор ($a=0.05l$).
6. Малое падение 6-ой частоты наблюдается в точках балки $a=0.15l$, $a=0.35l$, $a=0.5l$.

Т.е. совокупность величин падения частот на различных гармониках можно принять за некоторый признак места расположения опасного сечения.

Литература

1. Басс В.Н., Ивановский Е.А., Коновалов С.Ф. Система для мониторинга строительных сооружений // Доклад на научно-практической конференции «Современные системы и средства комплексной безопасности и противопожарной защиты объектов строительства».- АСУ «Дом на Брестской» , 2007.
2. Партон В.З. Механика разрушения: От теории к практике. Изд. 2-е. М.: Издательство ЛКИ, 2007. 240 с.
3. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения: Основы механики разрушения: Учебное пособие / Предисл. Ю.Н. Работнова. Изд.3-е, испр. М.: Издательство ЛКИ, 2008. 352 с.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. Изд. 6-ое, стереотипное. М.: КомКнига, 2007. 352 с.
5. Прецизионные системы мониторинга / С.Ф. Коновалов, Е.А. Ивановский, Е.Л. Межеричкий и др.// Высотные здания. – 2008. – Апрель/май. С. 120-125.
6. Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К.Лихарев и др.; Под ред. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1959. 1118 с.

The analyses of natural frequencies of the bridge structures in the process of crippling

77-30569/311032

03, March 2012

Scheglova N.N.

Bauman Moscow State Technical University
SheglovaNN@yandex.ru

This article deals with the problem of marker determination; these markers allow to locate the hidden fractures in spans of bridges. Frequency method for investigation of oscillation in systems with distributed parameters was used for analysis. Known mathematical model – model of pin-ended beam with point load was used because additional weight would lead to the decreasing of the main natural frequency, just like the fracture would do in this place. Analysis of wave equation's solution allowed to identify the dependences of changing of the first six frequencies on the place of critical section. A set of values of frequency reducing on different harmonic components could be used as an attribute of critical section area. This conclusion has significant practical importance when analyzing the results of bridge monitoring.

Publications with keywords: [the natural frequencies](#), [wave equation](#), [concentrated weight](#), [changes of natural frequencies](#), [structural failure](#)

Publications with words: [the natural frequencies](#), [wave equation](#), [concentrated weight](#), [changes of natural frequencies](#), [structural failure](#)

References

1. Bass V.N., Ivanovskii E.A., Konovalov S.F. Sistema dlia monitoringa stroitel'nykh sooruzhenii [A system for monitoring of building structures]. *"Sovremennye sistemy i sredstva kompleksnoi bezopasnosti i protivopozharnoi zashchity ob"ektov stroitel'stva" (Stroibezopasnost'-2007). Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. ["Modern systems and means of complex safety and fire protection of construction objects" (Stroibezopasnost'-2007). Int. sci.-pract. conf.]. Moscow, ITTs Moskomarkhitektury Publ., 2007.*
2. Parton V.Z. *Mekhanika razrusheniia: Ot teorii k praktike* [Fracture mechanics: From theory to practice]. Moscow, LKI Publ., 2007. 240 p.

3. Parton V.Z., Morozov E.M. *Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniia: Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Elastic fracture mechanics: Fundamentals of fracture mechanics]. Moscow, LKI Publ., 2008. 352 p.
4. Panovko Ia.G., Gubanova I.I. *Ustoichivost' i kolebaniia uprugikh sistem: Sovremennye kontseptsii, paradoksy i oshibki* [Stability and vibrations of elastic systems: Current concepts, paradoxes and errors]. Moscow, KomKniga Publ., 2007. 352 p.
5. Konovalov S.F., Ivanovskii E.A., Mezheritskii E.L., Moroz V., Dolgosheva O. *Pretsizionnye sistemy monitoring* [Precision monitoring systems]. *Vysotnye zdaniia* [Tall Buildings], 2008, no. 2, pp. 120-125.
6. Ponomarev S.D., Biderman V.L., Likharev K.K., Makushin V.M., Malinin N.N., Feodos'ev V.I. *Raschety na prochnost' v mashinostroenii* [Calculations of strength in mechanical engineering]. Moscow, Mashgiz Publ., 1959. 1118 p.