

Сравнительный анализ эффективности интегральных преобразований при обработке распределенных радиолокационных сигналов

77-30569/252207

11, ноябрь 2011

Нефедов С. И.

УДК 621.396.96

НИИ РЭТ МГТУ им. Н.Э. Баумана

nefedov@bmstu.ru

Одним из интересных подходов к обработке распределенных радиолокационных сигналов является подход, основанный на концепции минимально-параметрического моделирования. При этом обработка строится на основе некоторого интегрального преобразования, структурно связанного с моделью сигнала, получаемой как в режиме реального времени, так и заранее. В качестве таких преобразований могут применяться как общеизвестные интегральные преобразования, так и их разновидности и модификации. Выбор эффективного, то есть оптимального в заданных условиях и ограничениях преобразования является задачей, требующей проведения самостоятельных исследований и создания специальной методики. В данном докладе проводится вариант такой методики и результаты ее применения для сравнения преобразований Фурье [1], Вейвлет [2] и свертки в системе эталонных функций [3].

Оптимальность минимально параметрических процедур обработки информации целесообразно рассматривать по критерию максимума отношения правдоподобия при принятии решения на основе решающей статистики, полученной с помощью соответствующего интегрального преобразования. Известно, что максимум отношения правдоподобия в задачах обнаружения, распознавания, измерения и совместных задачах достигается при максимуме отношения сигнал-шум на выходе процедуры формирования решающей статистики. При этом не является определяющим оптимальность процедуры получения собственно решающей статистики. Таким образом, если удастся доказать, что при прочих равных условиях процедура обработки сигнала с целью получения решающей статистики обеспечит на выходе максимум отношения сигнал-шум по сравнению с

прочими процедурами, то данная обработка будет являться оптимальной по сформулированному выше критерию. Представим обрабатываемый сигнал в виде

$$u(t) = u(\Lambda, t), \quad (1)$$

включающим истинные значения некоторого набора параметров Λ , определяемых физическим процессом или явлением, порождающим исследуемый сигнал.

Применим к сигналу, определяемому выражением (1), преобразование Фурье. Тогда справедливой будет запись

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\Lambda, t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \quad (2)$$

Для упрощения вычисления спектра разложим сигнал, определяемый выражением (2), в гармонический ряд Фурье.

$$u_k(\Lambda, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{ik \cdot \frac{2\pi}{T} t}, \quad (3)$$

где $C_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(\Lambda, t) \cdot e^{-ik \cdot \frac{2\pi}{T} t} dt$ - коэффициенты разложения Фурье, T - длительность принятого когерентного сигнала.

Подставим полученный результат (3) в выражение (2). После выполнения соответствующих преобразований над сигналом справедливой будет запись, определяющая разложение сигнала в ряд по набору гармоник

$$S = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{ik \cdot \frac{2\pi}{T} t} e^{-ik \cdot \frac{2\pi}{T} t} dt = T \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что каждая из гармоник S_k , входящая в выражение (4), будет ненулевой. Введем понятие коэффициента полезного действия (КПД) интегрального преобразования в виде:

$$\eta_{\text{ПФ}} = \frac{1}{T \cdot E} \cdot \sum_{l=0}^{L-1} |S_l|^2, \quad (5)$$

где L - число гармоник в спектре, по которым происходит обнаружение сигнала,

$E = \int_0^T u(\Lambda, t) \cdot u^*(\Lambda, t) dt$ - энергия сигнала.

Можно утверждать, что преобразование будет являться оптимальным, если КПД преобразования, определяемый выражением (5), будет стремиться к единице. Исходя из этого, справедливой будет запись:

$$\eta_{\text{ПФ}} = \frac{1}{T \cdot E} \cdot \sum_{l=0}^{L-1} |T \cdot C_l|^2 = \frac{T}{E} \cdot \sum_{l=0}^{L-1} |C_l|^2 \rightarrow 1. \quad (6)$$

Представим сигнал $u(\Lambda, t)$ в дискретном виде $u(\Lambda, t) = u[\Lambda, n \cdot dt] = u[n]$; $n = 0, 1 \dots N-1$; $dt = T/N$.

Тогда

$$C_l = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \cdot e^{-i \cdot l \cdot \frac{2\pi}{T} n \cdot \frac{T}{N}} \cdot \frac{T}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot \frac{l \cdot n}{N}}. \quad (7)$$

В результате получаем выражение для КПД, показывающее предел неоптимальности в рассматриваемом смысле преобразования Фурье.

$$\eta_{\text{ПФ}} = \frac{T}{E \cdot N^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left| u[n] \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot \frac{l \cdot n}{N}} \right|^2 \rightarrow 1. \quad (8)$$

Полученная количественная оценка дает предельный коэффициент использования энергии сигнала при выполнении преобразований над ним. Превысить данную величину, используя сигнальную обработку, построенную на основе преобразования Фурье, невозможно.

Рассмотрим простейший пример, когда принятый сигнал представляет собой гармоническое колебание на частоте Доплера f_d

$$u(\Lambda, t) = e^{i \cdot 2\pi \cdot f_d \cdot t}. \quad (9)$$

$$u[n] = e^{i \cdot 2\pi \cdot f_d \cdot n \cdot \frac{T}{N}}. \quad (10)$$

В этом случае для выполнения условия в выражении (6) необходимо, чтобы

$$e^{i \cdot 2\pi \cdot f_d \cdot n \cdot \frac{T}{N}} \rightarrow e^{i \cdot 2\pi \cdot \frac{l_0 \cdot n}{N}}, \quad (11)$$

где l_0 - номер гармоники в спектре, по которой происходит обнаружение сигнала.

Таким образом, для достижения КПД преобразования, равному единице, должно выполняться следующее условие

$$T \cdot f_d = l_0 = \text{целое число.}$$

При этом выражение для КПД преобразования трансформируется в следующее

$$\eta_{\text{ПФ}} = \frac{T}{E \cdot N^2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i \cdot \frac{2\pi}{N} n \cdot z}, \quad (12)$$

где $z = \min(z_1, z_2)$, z_1 - дробная часть от $(T \cdot f_d)$, $z_2 = 1 - z_1$.

Расчеты показали, что при разных соотношениях величины $(T \cdot f_d)$ КПД преобразования Фурье для простого гармонического сигнала будет колебаться от 0,4 до 1,0. Физический смысл данного положения определяется эффектом просачивания энергии

и в данном случае характеризует потери энергии на боковые лепестки в том числе и на так называемые "косые сечения" функции неопределенности сигналов [3].

Если в принятом сигнале содержится более одной гармоники, то выражение (12) усложняется. Нетрудно показать, что, как и в предыдущем случае, КПД преобразования будет осциллировать. При выполнении условия (13) оно будет стремиться к единице, а при выполнении условия (14) КПД будет минимальным и равняться примерно 0,4.

$$T \cdot f_{d_l} = \text{целые числа}, \quad (13)$$

где $l = 0, 1 \dots L-1$ - гармоники принятого сигнала.

$$T \cdot f_{d_l} = \text{целые числа} + 0.5. \quad (14)$$

Применим к сигналу (1) вейвлет разложение [2]:

$$u(\Lambda, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{j,n} \cdot \psi_{j,n}(t), \quad (15)$$

где $\gamma_{j,n} = \int_0^T u(\Lambda, t) \cdot \psi_{j,n}^*(t) dt$ - вейвлет преобразование сигнала $u(\Lambda, t)$,

$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \cdot \psi\left(\frac{t - 2^j \cdot n}{2^j}\right)$, $\psi(t)$ - ортонормированный вейвлет - базис.

Тогда КПД вейвлет преобразования можно записать в виде

$$\eta_B = \frac{1}{E} \cdot \int_0^T \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{j,n} \cdot \psi_{j,n}(t) \right|^2 dt, \quad (16)$$

При гладко меняющейся функции $u(\Lambda, t)$ вейвлет разложение может давать достаточно точную аппроксимацию [2], т.е. $\eta_B \rightarrow 1$. Для других видов функций КПД вейвлет преобразования будет сильно зависеть от применяемого базиса $\psi(t)$.

На сегодняшний день существует большое число ортонормированных вейвлет - базисов. Самым первым из них появился вейвлет Хаара, который представляет собой кусочно-постоянную функцию вида

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0,5, \\ -1, & 0,5 \leq t < 1, \\ 0, & -\infty < t < 0; t \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

В этом случае для простого гармонического сигнала КПД преобразования равно 1. Однако исследования показали, что с увеличением частоты гармоники и длительности принимаемого сигнала КПД падает. При величине $2 \cdot \pi \cdot T \cdot f_d > 200$ коэффициент полезного действия вейвлет преобразования оказывается меньше минимально достижимого КПД преобразования Фурье ($\eta_B < 0,4$).

При наличии в сигнале более одной гармоники КПД вейвлет преобразования также падает, главным образом, за счет увеличения ширины спектра сигнала.

Применим к сигналу (1) преобразование свертки в системе эталонных функций. При этом будем считать, что параметры $\hat{\Lambda}$ свертки структурно совпадают с параметрами сигнала Λ , однако количественно известны с некоторой ошибкой $\Delta\Lambda$

$$\hat{\Lambda} = \Lambda + \Delta\Lambda. \quad (18)$$

В этом случае выражение свертки в системе эталонных функций трансформируется к виду, определяемому выражением:

$$K(\Lambda + \Delta\Lambda) = \int_0^{\infty} u(\Lambda, t) \cdot G(\Lambda + \Delta\Lambda, t) \cdot dt, \quad (19)$$

где $G(\Lambda + \Delta\Lambda, t) = u^*(\Lambda + \Delta\Lambda, t)$.

Проведем разложение сигнала (1) в ряд по эталонным функциям $N_k(\Lambda, t)$, определяемым выражением вида

$$u(\Lambda, t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k(\Lambda, t). \quad (20)$$

После подстановки разложенного сигнала в выражение (19) и выполнения соответствующих вычислений, на основе данного выражения для сигнатуры рассматриваемого сигнала можно записать:

$$K(\Lambda + \Delta\Lambda) = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} N_k(\Lambda, t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} N_k^*(\Lambda + \Delta\Lambda, t) dt = T \cdot \sum_{k=0}^{\infty} N_k(\Lambda, t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} N_k^*(\Lambda + \Delta\Lambda, t). \quad (21)$$

Применим к данному преобразованию операцию вычисления

$$\eta_{CB} = \frac{1}{T \cdot E} \cdot K(\Lambda + \Delta\Lambda) = \frac{1}{E} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} N_k(\Lambda, t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} N_k^*(\Lambda + \Delta\Lambda, t). \quad (22)$$

Раскрывая данное выражение, нетрудно получить, что при равенстве параметров сигнала $\hat{\Lambda} = \Lambda + \Delta\Lambda$ параметрам сигнала Λ , т.е. при $\Delta\Lambda \rightarrow 0$, КПД преобразования стремиться к единице.

Результаты исследования КПД различных преобразований, рассмотренных выше представлены на рис. 1 в виде зависимостей КПД от характеристических масштабных размерностей преобразований для одиночного и для сложного сигналов.

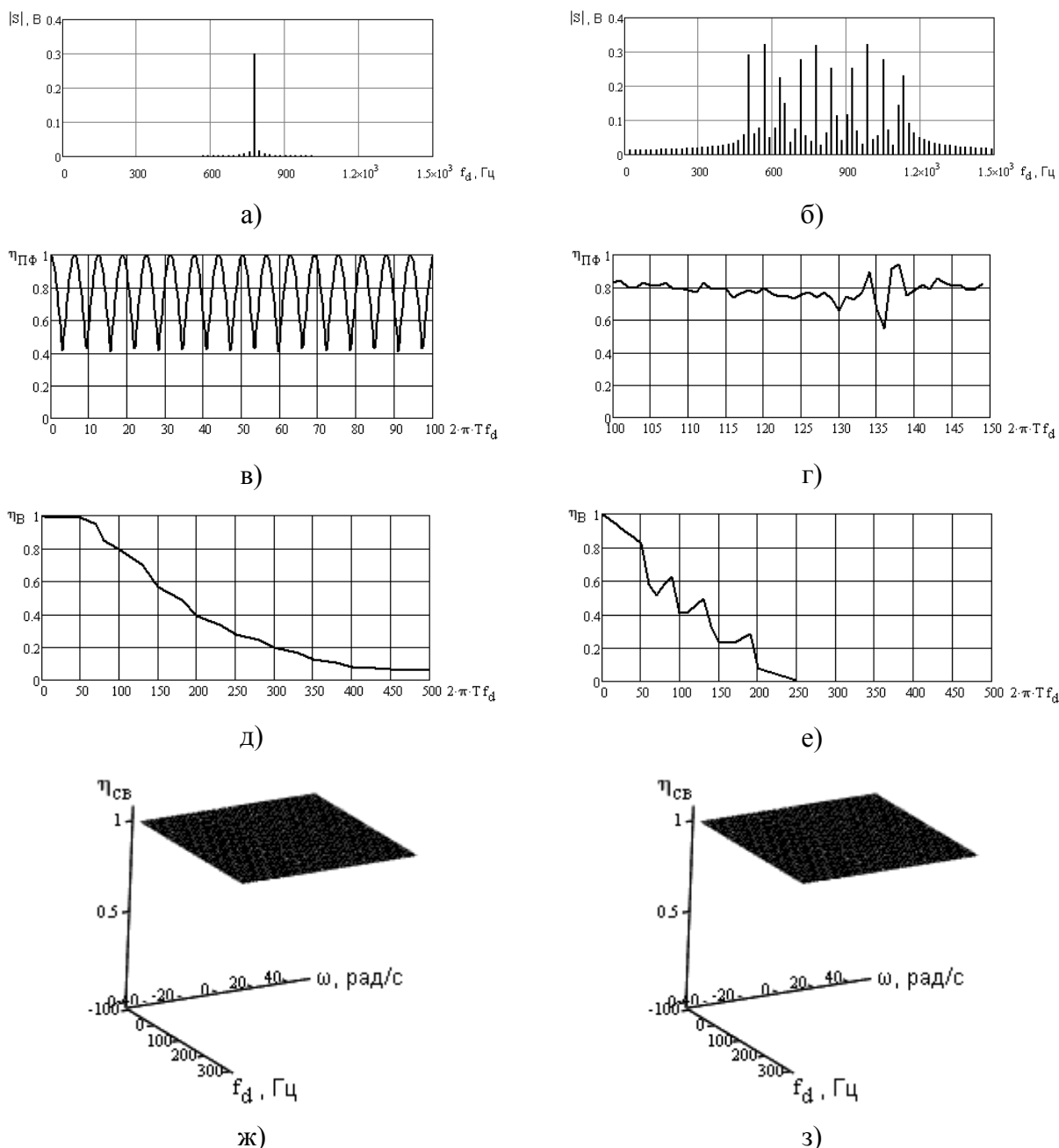


Рис. 1. а) Одиночный и б) групповой сигналы и соответствующие им КПД преобразований в) Фурье одиночного сигнала г) Фурье группового сигнала, д) Вейвлет одиночного сигнала, е) вейвлет группового сигнала, ж) свертки в системе эталонных Функций одиночного преобразования и з) свертки в системе эталонных функций группового сигнала

Как следует из приведенных рисунков, наиболее эффективным является преобразование свертки в системе эталонных функций. Это показывает, что именно это преобразование обеспечивает оптимальную обработку сигнала по критерию максимума отношения правдоподобия. То есть, создает наилучшие условия для обнаружения при прочих равных. Физический смысл данного утверждения заключается в том, что

рассматриваемое преобразование обладает фокусирующими свойствами в отношении полезной энергии, содержащейся в принятом сигнале. Вейвлет преобразование оказывается эффективным в низкочастотной области при работе по одиночным сигналам, а Фурье преобразование может эффективно работать только при неограниченной разрешающей способности на длинных выборках. При этом, при фильтрации сигналов от групповых целей достигается энергетическая эффективность не более 80 процентов. Таким образом, применение преобразования свертки в системе эталонных функций и подхода на основе минимально-параметрического моделирования позволяет потенциально достичь выигрыша на 20 процентов по сравнению с потенциальными характеристиками преобразования Фурье.

Список использованных источников:

1. Марпл - мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения /Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
2. Мала С. Вэйвлеты в обработке сигналов. Пер. с англ. под ред. Я.М. Жилейкина. М.: Мир, 2005. 672 с.
3. Нефедов С.И., Коротеев Д.Е. Применение адаптивных алгоритмов при оптимальной обработке длительных когерентных сигналов с использованием преобразования свертки в системе // Радиолокация, навигация, связь: Труды XII международной научно-технической конф. Воронеж. 2006. Т. 3. С. 1706 - 1713.
4. Трухачев Л.А. Радиолокационные сигналы и их применения. М.: Военное издательство, 2006. 320 с.

Comparative analysis of the integral conversions' efficiency when processing distributed radiolocation signals

77-30569/252207

11, November 2011

Nefedov S.I.

Bauman Moscow State Technical University

nefedov@bmstu.ru

Comparative analysis of integral conversions relatively to the optimal distributed signal processing was presented. The coefficient of integral conversion efficiency was introduced. Fourier transform, wavelet transform and convolution in the system of standard functions were compared when single and group signal processing.

Publications with keywords: [Fourier transform](#), [convolution transform in reference functions system](#), [integral transformation](#), [Wavelet transform](#), [efficiency](#)

Publications with words: [Fourier transform](#), [convolution transform in reference functions system](#), [integral transformation](#), [Wavelet transform](#), [efficiency](#)

Reference:

1. Marple, jr. S.L.. Digital spectral analysis and its applications, Moscow, Mir, 1990, 584 p.
2. Mala S., Wavelets in signal processing, Moscow, Mir, 2005, 672 p.
3. Nefedov S.I., Koroteev D.E. in: Proceedings of the XII international scientific and technical conference on Radiolocation, Navigation and Communication, Voronezh, Vol.3, 2006, pp. 1706-1713.
4. Truhachev L.A., Radar signals and their application, Moscow, Voennoe izdatel'stvo, 2006, 320 p.