электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Теоретико-решеточная модель конструкции

 # 09, сентябрь 2011

автор: Божко А. Н.

УДК 004.942

МГТУ им. Н.Э. Баумана
abozhko1@gmail.com

Еще со времен первых работ по теории систем во многих отраслях научного знания утвердилась и получила развитие так называемая структурная парадигма, когда свойства целого выводятся из характеристик элементов и связей между ними. Эта доктрина оказалась плодотворной не только в естественных науках и лингвистике. Опыт показал, что структурный подход имеет множество результативных применений в теории проектирования и технологии машиностроения [7, 8, 9].

Естественным средством для описания структур технических объектов служит аппарат теории графов, с помощью которого удалось решить несколько важных прикладных задач размерного анализа, синтеза кинематических схем, функционально-стоимостного анализа и др. Известны работы, в которых авторы предлагали различные графовые модели для проектирования сборочных процессов машин и механических приборов. Эти попытки были не вполне удачными, поскольку в процессе техногенеза элементы систем часто образуют сложные «ансамбли», которые не могут быть адекватно описаны бинарными отношениями. Многие свойства сложных технических объектов порождаются в результате взаимодействия множественных совокупностей составных частей, и на статическом уровне феномены такого рода представляются многоместными отношениями или отношениями переменной местности. Технологические процессы изготовления машин и приборов изобилуют примерами отношений такого сорта. Так, базирование и геометрические связи в процессе сборки в общем случае являются многоместными и в терминах графов принципиально не могут быть описаны без потери существенных данных.

В нескольких работах автора (см. [1, 2, 3]) предложена и обоснована гиперграфовая модель конструкции машин и механических приборов. Во многих проектных ситуациях эта структурная модель адекватно описывает совокупность позиционных механических связей, доставляющих деталям изделия определенность в процессе сборки.

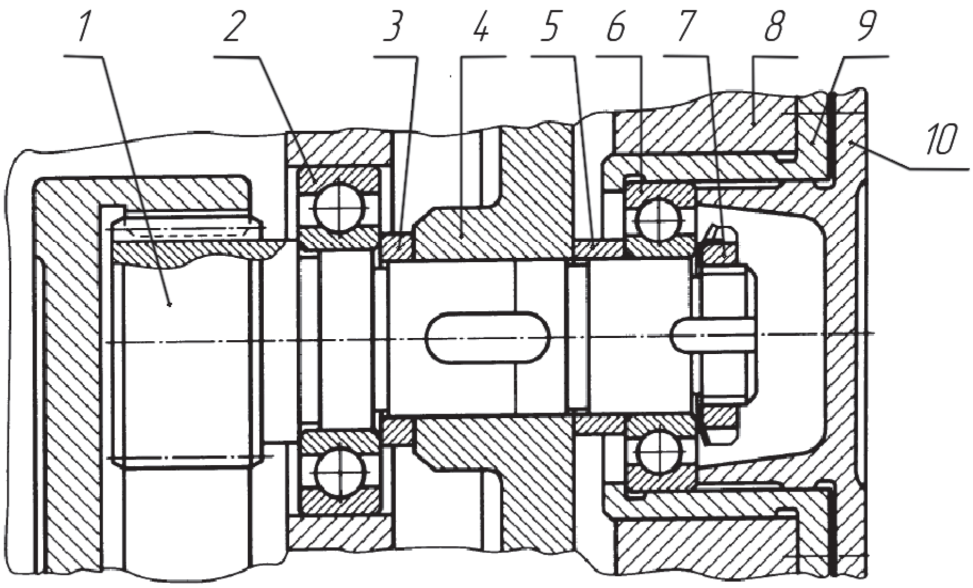

Рис. 1. Промежуточный вал цилиндрического редуктора внутреннего зацепления

На рис. 1 показан пример простой конструкции, а на следующем рисунке – две ее структурные модели: граф механических связей (a) и гиперграф механических связей (b).

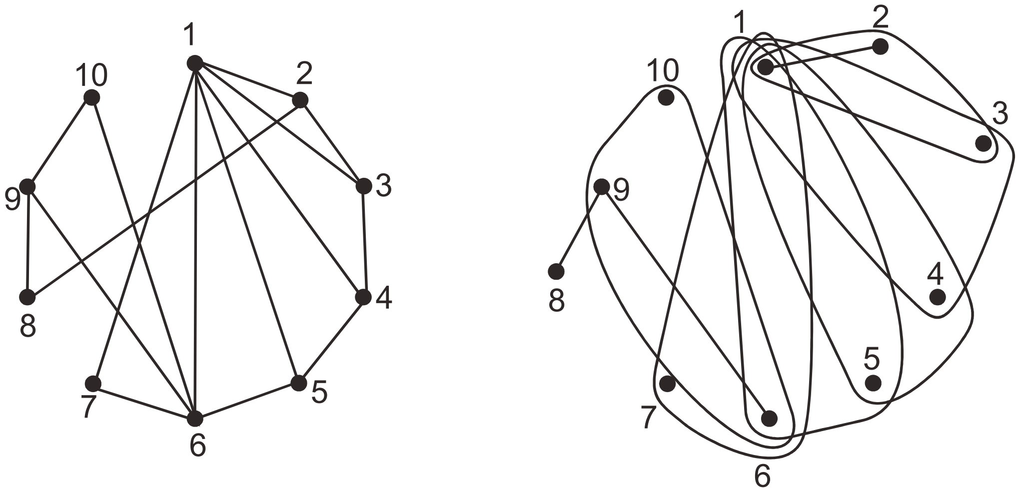

Рис. 2. Структурные модели редуктора

Развернутое определение, примеры применения и описание области адекватности гиперграфовой модели изделия можно найти в [1]. Поскольку данная работа является продолжением цикла статей, ограничимся самыми краткими формулировками исходных понятий, необходимыми для изложения результатов.

Поставим в соответствие изделию гиперграф механических связей $H = (X, R, W)$, где множество вершин $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ описывает детали машины или механического прибора, множество гиперребер $R = \{r_j\}_{j=1}^{m}$ представляет минимальные геометрически определенные группировки деталей, а $W : R \to 2^X$ – инцидентор, который связывает гиперребра с входящими в него вершинами.

Гиперграф называется стягиваемым (s-гиперграфом), если существует последовательность $P(H) = (H_0 ... H_{n-1})$, для элементов которой выполняются следующие требования:

1. $H_0 = H$;
2. H_{n-1} представляет собой одновершинный гиперграф;
3. Для всех H_j *и* $H_{j+1} \in P(H), j = \overline{0, n-2}$ справедливо соотношение $|R_j| - 1 = |R_{j+1}|$;
4. Каждый элемент последовательности H_{j+1} получается из предыдущего H_j стягиванием ребра кратности 2, $j = \overline{0, n-2}$. Такое стягивание называется нормальным.

В общем случае в стягиваемом гиперграфе существуют фрагменты, которые стягиваются независимо от своего окружения. Таковыми, в частности, являются все сборочные единицы и «образы», которые «пробегает» изделие в процессе общей сборки. Моделями таких фрагментов будут s-гиперграфы, которые являются подмножествами структуры, описывающей все изделие. Если определен гиперграф H, задающий позиционные механические связи всего изделия, то каждый его s-подгиперграф полностью определяется набором своих вершин, как порожденный в H. В этой ситуации s-подгиперграфы можно называть просто s-множествами, что существенно упрощает изложение материала.

Теорема 1. Если частично-упорядоченное множество $(L, \le)$ имеет наибольший элемент (1), а всякое непустое подмножество – нижнюю грань, то $(L, \le)$ является полной решеткой [4].

Доказательство.

Пусть *A* – непустое подмножество *L*. Верхний конус A^{Δ} содержит единицу, т.е. множество A^{Δ} – непусто. По условиям теоремы существует $\inf A^{\Delta}$. Покажем теперь, что $\inf A^{\Delta} = \sup A$. Если $a = \sup A$, то $x \le a$ для всех $x \in A$ и, кроме того, $a \le y$ для всех $y \in A^{\Delta}$. Если же $u \le y$ для всех $y \in A^{\Delta}$, то поскольку $a \in A^{\Delta}$, имеем $u \le a$, чем и доказывается равенство $a = \inf A^{\Delta}$. Если существует $b = \inf A^{\Delta}$, то поскольку для каждого $x \in A$

справедливо соотношение $x \le y \quad \forall y \in A^{\Delta}$, имеем $x \le b \quad \forall x \in A$. Если $v \ge x$ для всех $x \in A$, то $v \in A^{\Delta}$ и, следовательно, $v \ge b$. Таким образом, $b = \sup A$. Теорема доказана.

Пусть задан стягиваемый гиперграф $H = (X, R, W)$. Обозначим через *F(H)* – множество всех s-подграфов гиперграфа H, пополненное пустым множеством $\varnothing$. Упорядочим *F(H)* по теоретико-множественному включению $\subseteq$. Для любых двух s-подграфов $H_i = (X_i, R_i, W_i)$ и $H_j = (X_j, R_j, W_j)$, принадлежащих *F(H)*, $H_i \le H_j$ тогда и только тогда, когда $X_i \subseteq X_j$. Так как подграфы H_i, H_j – порожденные в *H*, то включение вершин $X_i \subseteq X_j$ влечет за собой включение ребер $R_i \subseteq R_j$.

В [2] доказана теорема, утверждающая, что если два s-подграфа H_i, H_j s-гиперграфа *H* порождены своими множествами вершин $H_i = [X_i]$, $H_j = [X_j]$ и имеют непустое пересечение $X_i \cap X_j$, то подграф $[X_i \cap X_j]$, порожденный этим пересечением, также является стягиваемым.

Если любым двум s-подграфам H_i, H_j, имеющим пустое пересечение $X_i \cap X_j = \varnothing$ вершин сопоставить $[X_i \cap X_j] = \varnothing$, то множество *F(H)* становится замкнутым относительно пересечения своих элементов. В этих условиях имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $H = (X, R, W)$ – стягиваемый гиперграф. Частично-упорядоченное множество $(F(H), \le)$ всех s-подграфов гиперграфа *H*, пополненное пустым множеством $\varnothing$, является полной решеткой.

Доказательство. Множество *F(H)* имеет наибольший элемент, которым служит гиперграф *H*. Для любых $H_i, H_j \in F(H)$ $\inf\{H_i, H_j\} = [X_i \cap X_j]$, если $X_i \cap X_j \ne \varnothing$, в противном случае – $\inf\{H_i, H_j\} = \varnothing$. Если $F' = \{H_i\}_{i=1}^{l}$ – непустое подмножество *F(H)*, то равенство $\inf F' = \inf\{\ldots\inf\{\inf\{H_1, H_2\}, H_3\}\ldots H_l\}$ доказывает существование нижней грани для F'. Все условия теоремы 1 выполнены, поэтому частично-упорядоченное множество $(F(H), \le)$ является полной решеткой.

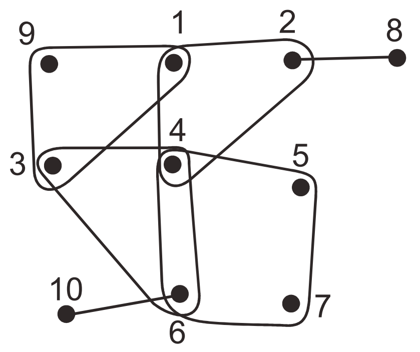

Рис. 3. Пример стягиваемого гиперграфа

На рис. 3 приведен пример стягиваемого гиперграфа H небольшой размерности, а на рис. 4 показана диаграмма Хассе решетки $(F(H),\leq)$ всех его s-подграфов.

Эта решетка не «праздно являет себя», она служит универсальной порождающей средой для генерации множества проектных решений в процессе технологической подготовки производства сборочных процессов. Приведем несколько простых интерпретаций, не требующих подробного изложения.

Любой путь в *F(H)* из минимального элемента ($\varnothing$) в максимальный (*H*) представляет собой описание последовательности сборки, которую допускает изделие по условиям базирования. Множество всех таких путей образует исходное множество альтернатив в задаче выбора рациональной последовательности сборки в заданной технологической системе. Любая схема технологического членения изделия (т.е. разбиение конструкции на сборочные единицы) описывается деревом, вписанным в решетку *F(H)* и др.

Исследования показали, что решетки *F(H)* очень богаты технологическим содержанием. Множество решеточных категорий (подрешетки, полурешетки, конгруэнции, морфизмы и др.) имеют содержательные технологические и конструктивные толкования. (Автор готовит к публикации отдельную статью, посвященную этой теме.)

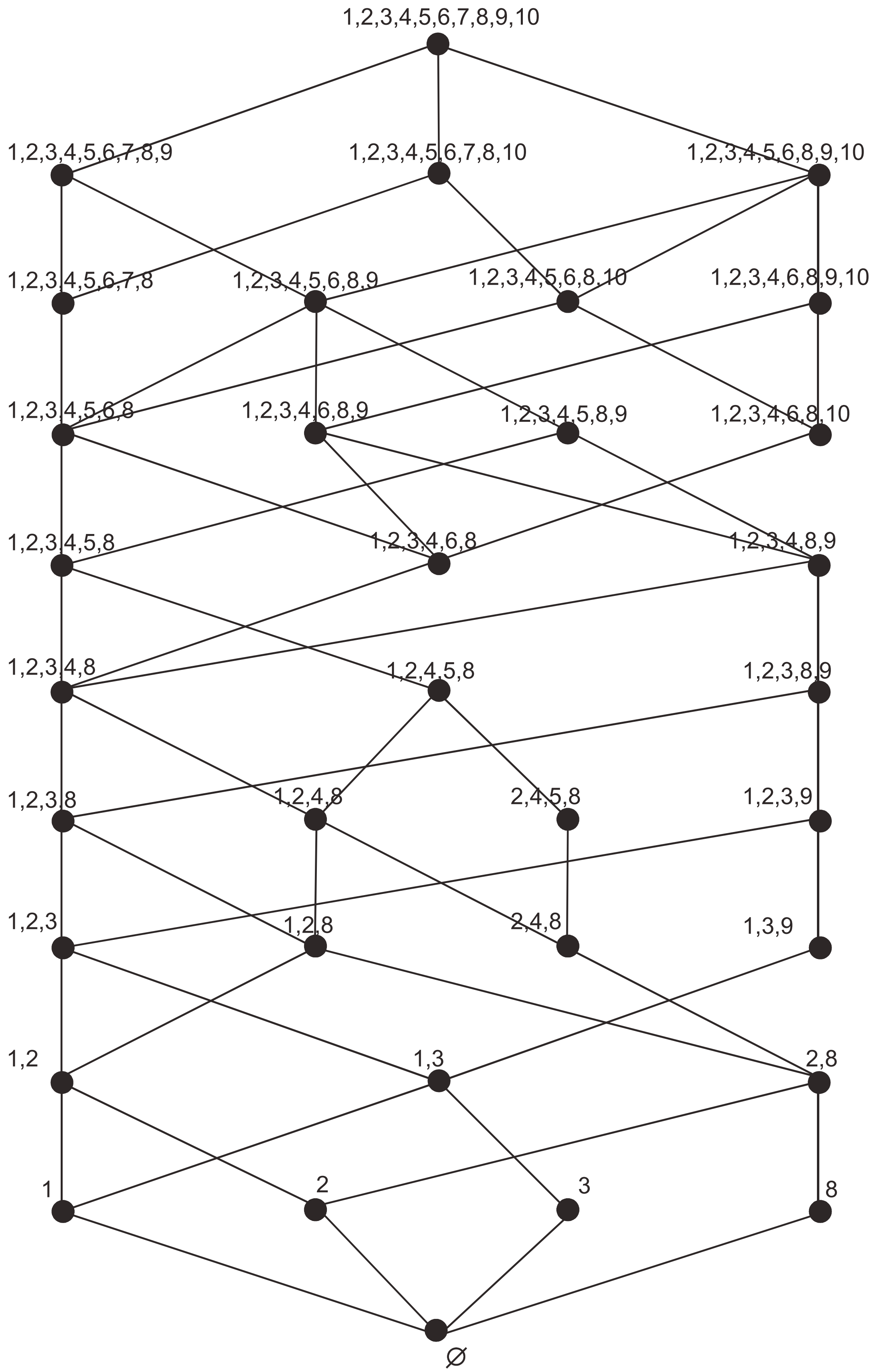

Рис. 4. Диаграмма Хассе решетки $(F(H),\leq)$

Утверждение о решеточной организации множества всех собираемых фрагментов конструкции можно обосновать и иным способом. Обозначим через *B(X)* совокупность всех подмножеств множества *X*, включая и пустое множество. Множество *B(X)* иногда называют булеаном, а X – носителем. В алгебраической теории решеток доказывается теорема, гласящая, что для любого *X* его булеан *B(X)* является полной решеткой [4]. Эту решетку можно рассматривать как частично-упорядоченное множество $(B(X),\leq)$, в котором отношение предшествования индуцируется теоретико-множественным включением $\subseteq$. Рассмотрим отображение $\varphi: B(X)\to B(X)$, у которого $\forall Y\in B(X)$ выполняются условия:

1. $Y\leq\varphi(Y)$ (экстенсивность);
2. $Y_1\leq Y_2\Rightarrow\varphi(Y_1)\leq\varphi(Y_2)$ (монотонность);
3. $\varphi(\varphi(Y))=\varphi(Y)$ (идемпотентность).

Отображение, обладающее свойствами 1-3, называется оператором замыкания, а элементы *Y,* для которых справедливо $\varphi(Y)=Y$, называются замкнутыми [4].

Теперь пусть X – множество деталей изделия, а отображение $\varphi: B(X)\to B(X)$ любому подмножеству $Y\in B(X)$ ставит в соответствие $\varphi(Y)\in B(X)$, где $\varphi(Y)$ – минимальный по составу независимо собираемый фрагмент изделия, включающий в себя *Y.*

Так как $Y\subseteq\varphi(Y)$, то для отображения φ очевидным образом выполняется свойство экстенсивности (1).

Обоснуем монотонность. В самом деле, если для подмножеств деталей $Y_1,Y_2\in B(X)$ имеет место $Y_1\subseteq Y_2$, то минимальный собираемый фрагмент $\varphi(Y_2)$, включающий Y_2, является собираемым фрагментом (возможно не минимальным), содержащим Y_1. Поэтому $\varphi(Y_1)\leq\varphi(Y_2)$.

Покажем идемпотентность. Для любого *Y* его образ $\varphi(Y)$ является и минимальным и собираемым по определению, поэтому $\varphi(\varphi(Y))=\varphi(Y)$.

В такой интерпретации отображения φ φ-замкнутыми элементами в *B(X)* являются подмножества деталей, сборка которых может быть осуществлена независимо, и только они.

Множество всех φ-замкнутых элементов $\varphi(B(X))$ называется частным по замыканию и обозначается $B(X)/\varphi=\{Y\in B(X)\,|\,\varphi(Y)=Y\}$. В [4] доказывается теорема, утверждающая, что частное по замыканию L/γ оператора $\gamma: L\to L$, действующего на решетке *L*, само является решеткой; причем нижние грани элементов в L совпадают с нижними гранями в L/γ, т.е. для любых $a,b\in L$ выполняется $a\wedge_L b=a\wedge_{L/\gamma}b$.

Булеан *B(X)* множества деталей представляет собой решетку, поэтому частное $B(X)/\varphi$ по замыканию φ также является решеткой. Причем, для любых

$Y_1, Y_2 \in B(X)/\varphi \quad Y_1 \bigcap Y_2 = Y_1 \wedge_{B(X)/\varphi} Y_2$, т.е. пересечение любых подмножеств, собираемых независимо, обладает этим свойством.

Рассмотрим отображение $\overline{\varphi}: B(X) \to B(X)$, для которого выполняются требования 2 и 3 из определения оператора замыкания и, кроме того, справедливо соотношение $Y \in B(X)\ \overline{\varphi}(Y) \le Y$ (интенсивность). Отображение с такими свойствами называется в теории решеток оператором козамыкания [4].

Будем считать, что интерпретация множеств $Y, X, B(X)$ осталась неизменной, а оператор козамыкания $\overline{\varphi}$ каждому множеству деталей Y ставит в соответствие максимальное по мощности подмножество $\overline{\varphi}(Y) \subseteq Y$, сборка которого может быть осуществлена независимо. Таковое всегда существует, поскольку семейство всех независимо собираемых подмножеств множества Y непусто (каждая деталь $x \in Y$ входит в это семейство). Если оператор замыкания φ добавляет детали, делающие сборку $\varphi(Y)$ независимой, то оператор козамыкания удаляет «лишние» детали, нарушающие это свойство.

Подмножество $Y \in B(X)$, для которого $\overline{\varphi}(Y) = Y$, называется козамкнутым, а совокупность всех козамкнутых элементов булеана B(X) – частным по козамыканию и обозначается $B(X)/\overline{\varphi}$. Известна теорема, гласящая, что частное по козамыканию полной решетки, также представляет собой решетку.

Необходимо отметить, что в разных проектных ситуациях свойство собираемости множества деталей может получать толкования, отличающиеся от полной взаимной скоординированности по условиям базирования. Иногда любое связное подмножество деталей без обязательной взаимной координации считается собираемым. В некоторых операциях технологической подготовки производства собираемым считается группа деталей, расфасованных в специальную тару. Причем между элементами этой группы могут отсутствовать взаимная координация и механические связи [5, 6].

Для подобных случаев, когда понятие собираемости толкуется расширительно, а требования взаимной скоординированности ослабляются или снимаются, не подходит гиперграфовая формализация. Описания собираемых подмножеств при помощи операторов замыкания и козамыкания не зависят от толкования скординированности или связности подмножеств деталей, поэтому область адекватности решеток $B(X)/\varphi$ и $B(X)/\overline{\varphi}$ больше, чем у решетки $(F(H), \le)$.

Список литературы

1. Божко А.Н. Моделирование механических связей изделия// Электронное научно-техническое издание «Наука и образование» – 2011. – №3.
2. Божко А.Н. Моделирование механических связей изделия. Условия стягиваемости// Электронное научно-техническое издание «Наука и образование» – 2011. – №5.
3. Божко А. Н., Бетин Е. А. Анализ стягиваемости гиперграфов// Информационные технологии. – 2005. – №5 – с. 6-12.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток. –М.: Мир, 1982.
5. Маталин А.А. Технология машиностроения. – М.: Машиностроение, 1985.
6. Сборка и монтаж изделий машиностроения: справочник в 2-х томах / Под ред. В.С. Корсакова, В.К. Замятина. – М.: Машиностроение, 1983.
7. Своятыцкий Д.А. Моделирование процессов сборки в робототехнических комплексах. – Минск: Наука и техника, 1983.
8. Тимковский В.Г. Дискретная математика в мире станков и деталей. – М.:Наука, 1992.
9. Челищев Б.Е., Боброва И.В., Гонсалес-Сабатер А. Автоматизация проектирования технологии в машиностроении – М.: Машиностроение, 1987.