

## Система внешних воздействий. Возможные формы связности колебаний механических систем при действии нескольких внешних факторов

# 08, август 2011

автор: Большаков Р. С.

УДК 621:534; 833

НИИ современных технологий, системного анализа и моделирования,  
Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск  
[hunterr1@mail.ru](mailto:hunterr1@mail.ru)

**Введение.** В задачах уменьшения действия вибраций в определенных узлах машин и оборудования часто используются динамические гасители колебаний, представляющие собой дополнительно присоединяемые на упругом подвесе инерционные элементы [1, 2]. В этом направлении последние годы большое внимание уделяется маятниковым гасителям колебаний [3÷5]. Вместе с тем, существуют и другие подходы, в рамках которых могут разрабатываться способы и средства изменения динамического состояния объекта защиты. В частности виброзащитная система, если она имеет несколько степеней свободы, может быть подвержена действию нескольких внешних факторов. Если частоты внешних возмущений совпадают, то одним из путей рационального проектирования виброзащиты могло бы стать управление суммарными силовыми параметрами или групповыми свойствами, что предполагает введение дополнительных внешних сил с целью построения некоторой системы сил, обладающих определенными свойствами [6].

**I. Общие положения.** Постановка задачи исследования. Рассмотрим виброзащитную систему с двумя степенями свободы (**рис. 1**), состоящую из объекта массой  $m_1$ , динамического гасителя  $m_2$ , упругих элементов  $k_1, k_2, k_3$  и двух внешних сил  $Q_1$  и  $Q_2$ . Предполагается, что внешние гармонические силы могут быть связаны между собой соотношением  $Q_2 = \alpha Q_1$ , где, в свою очередь,  $\alpha$  может изменяться в пределах  $-\infty < \alpha < \infty$ , проходя через нулевое значение. Тогда запишем выражение для кинетической и потенциальной энергий системы

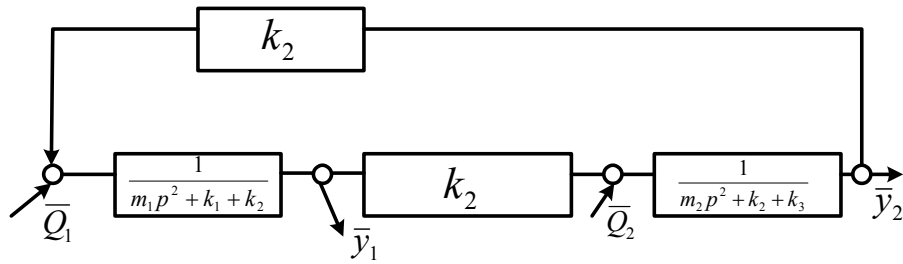
$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2, \quad \Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 y_2^2$$

и получим систему дифференциальных уравнений, которая может быть записана в виде

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2 y_1 - k_2 y_2 = Q_1, \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 + k_3 y_2 - k_2 y_1 = Q_2. \quad (2)$$

Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления имеет вид, как показано на **рис. 1**.



**Рис. 1.** Структурная схема виброзащитной системы

Запишем формулы для определения координат  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$ :

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{Q}_1 a_{22} - \bar{Q}_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}; \quad (3)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{-\bar{Q}_1 a_{12} + \bar{Q}_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad (4)$$

где  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  определяются из (1), (2) и представлены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты уравнений движения в системе координат  $y_1, y_2$

$a_{11}$	$a_{12}$
$m_1 p^2 + k_1 + k_2$	$-k_2$
$a_{21}$	$a_{22}$
$-k_2$	$m_2 p^2 + k_2 + k_3$
$Q_1$	$Q_2$
$Q_0$	$Q_0 \alpha$

Примечание:  $Q_1$  и  $Q_2$  – обобщенные силы, приложенные соответственно к элементам системы с массами  $m_1$  и  $m_2$ .

Передаточная функция по координате  $y_1$  в соответствии со схемой на **рис. 2** имеет вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_0} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3 + \alpha k_2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = \frac{m_2 p^2 + k_2(1 + \alpha) + k_3}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad (5)$$

где  $p = j\omega$ .

Режим динамического гашения по координате  $y_1$  можно найти из числителя (3):

$$\omega_{\text{дин}}^2 = \frac{k_2(1 + \alpha) + k_3}{m_2}. \quad (6)$$

Найдем критическое значение, при котором  $\omega_{\text{дин}}^2 = 0$ :

$$\alpha_{\text{кр}} = -\frac{k_2 + k_3}{k_2}; \quad (7)$$

то есть при значении  $\alpha_{\text{кр}}$  режим динамического гашения не реализуется. Если  $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$ , то режим динамического гашения возможен: при  $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$  имеем  $\omega_{\text{дин}}^2 = 0$ ; при  $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$  – числитель (3) имеет отрицательное значение.

Найдем приведенную жесткость системы по координате  $y_1$ :

$$k_{\text{нр1}} = \frac{(k_2 + k_3)(k_1 + k_2) - k_2^2}{k_2(1 + \alpha) + k_3} = \frac{k_2k_1 + k_3k_1 + k_3k_2}{k_2(1 + \alpha) + k_3}. \quad (8)$$

Если  $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$ , то приведенная жесткость  $k_{\text{нр}}$  будет  $\rightarrow \infty$ . Физически это означает, что точка  $y_1$  при действии силы  $Q_1$  не смещается (происходит уравнивание сил  $Q_1$  и  $Q_2$ ), но относительно этого положения возможны колебания. Однако амплитудно-частотная характеристика будет иметь специфичный вид, поскольку передаточная функция (5) изменится

$$W_1 = \frac{m_2 p^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \quad (9)$$

Амплитудно-частотная характеристика системы в этом случае начинается с  $\theta$ , а на высоких частотах – также стремится к  $\theta$ . Если  $k_{\text{нр}}$  будет меньше нуля, то передаточная функция системы примет вид

$$W_1(p) = \frac{m_2 p - b}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad (10)$$

где  $b$  – некоторая величина,  $b < \alpha_{\text{кр}}$ . Отрицательный знак приведенной жесткости  $k_{\text{нр1}}$  не означает потери устойчивости, также как бесконечно большое ее значение при  $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$ . В данном случае происходит перераспределение направлений движения по координатам, точнее их смещения под действием сил и формирования нового положения равновесия, относительно которого происходит колебания, вызванные периодическими силами  $Q_1, Q_2$ .

Аналогичным образом может быть рассмотрено и движение по координате  $y_2$ , для которой по формуле Крамера [7]

$$y_2 = \frac{-Q_1 a_{12} + Q_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad (11)$$

откуда передаточная функция системы при входе  $Q_1$  и выходе  $y_2$  имеет вид

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \frac{k_2 + \alpha(m_1 p^2 + k_1 k_2)}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = \frac{\alpha m_1 p^2 + k_2(1 + \alpha) + \alpha k_1}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}. \quad (12)$$

Частота динамического гашения по координате  $y_2$  определится

$$\omega_{\text{дин}2}^2 = \frac{k_2(1 + \alpha) + \alpha k_1}{\alpha m_1}. \quad (13)$$

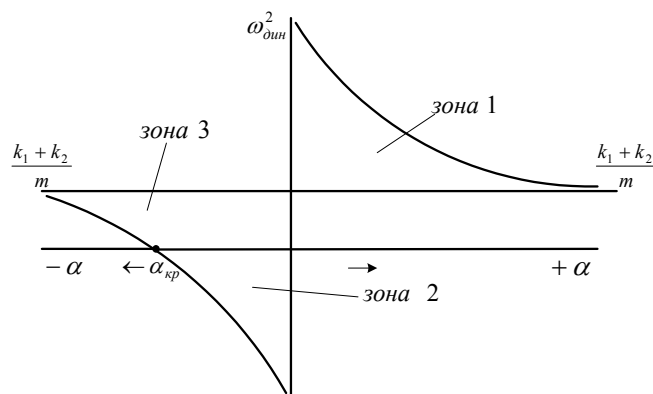
Критическое значение  $\alpha$  для данного случая составляет

$$\alpha_{\text{кр}} = -\frac{k_2}{k_1 + k_2}. \quad (14)$$

Приведенная жесткость по координате  $y_2$  имеет вид:

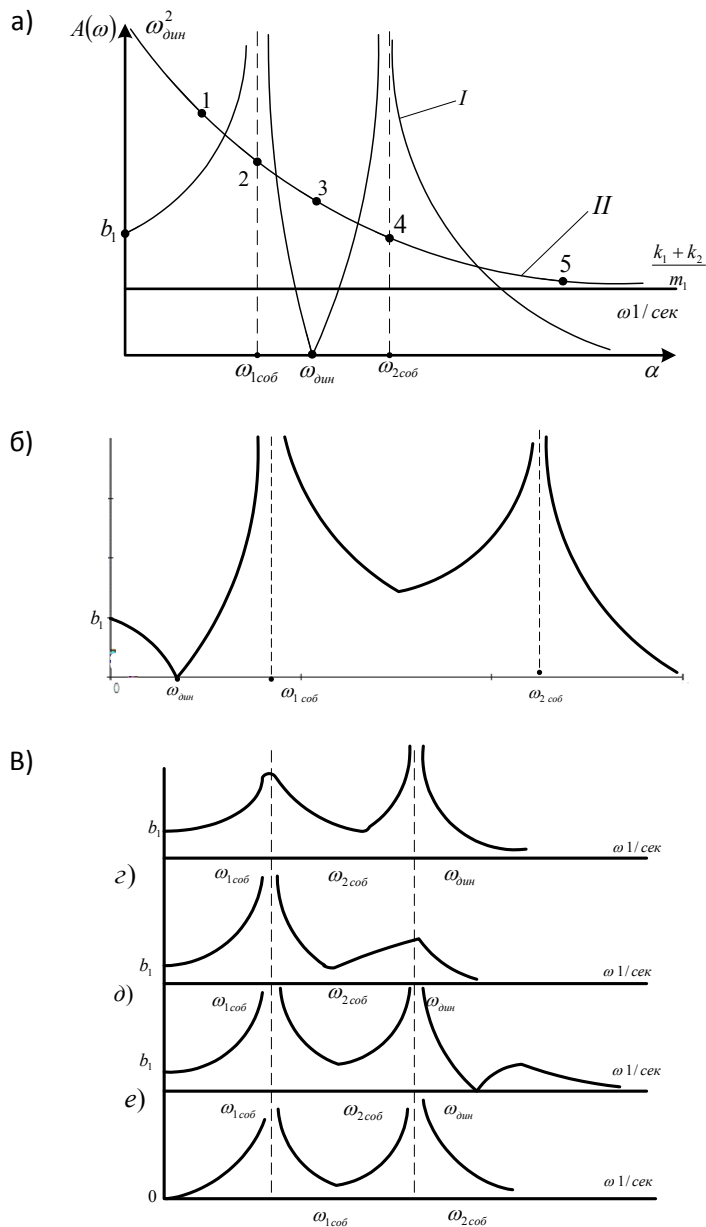
$$k_{\text{пр}} = \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k_2(1 + \alpha) + \alpha k_1}. \quad (15)$$

Из выражения (12) следует, что частоты собственных колебаний системы не зависят от параметра  $\alpha$ . Однако, величина частоты динамического гашения колебаний зависит от  $\alpha$ . При  $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$  – частота динамического гашения будет равна нулю, при изменениях  $\alpha$  в пределах  $-\infty < \alpha < \infty$  график изменения  $\omega_{\text{дин}}^2$  показан на **рис. 2**.



**Рис. 2.** График зависимости частоты динамического гашения ( $\omega_{\text{дин}}^2$ ) от величины  $\alpha$

Отметим, что частота динамического гашения изменяется в соответствии со значением  $\alpha$  и может находиться в пределах трёх зон: вторая зона соответствует отрицательным значениям квадрата частоты, что не представляет физического интереса; первая и третья зоны дают положительные значения частот, форм амплитудно-частотных характеристик  $A(\omega)$ , как показано на **рис. 3**.



**Рис. 3.** Семейство амплитудно-частотных характеристик системы при различных значениях  $\alpha$  : а) кривая I – ачх системы в общем виде с режимом динамического гашения между двумя резонансами (точка 3); кривая II - соответствует зависимости  $\omega_{\text{дин}}^2$  от параметра  $\alpha$  ; б) ачх соответствует случаю, характеризующемуся точкой 1 на кривой II; в) случай, когда АЧХ соответствует точке 2, при которой  $\omega_{\text{дин}}^2 = \omega_{1\text{соб}}^2$  ; г) случай, когда  $\omega_{\text{дин}}^2 = \omega_{2\text{соб}}^2$  ; д) случай, соответствующий точке 4 на кривой II ( $\omega_{\text{дин}}^2 > \omega_{2\text{соб}}^2$ ); е) случай, когда  $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$ , при котором на АЧХ нет режима динамического гашения

При частоте внешних воздействий, соответствующих нулю, начальное значение  $A(\omega)$ , то есть коэффициент передачи амплитуды колебаний будет зависеть от  $\alpha$ , а само значение  $A(\omega) = |W(p)|$  определяется выражением (20).

Наличие взаимной связи между силами возмущения и управляющей силой, фаза которой может быть настраиваемой, создают эффекты изменения приведенной жесткости системы или приведенной массы. Такой способ настройки системы для защиты объекта соответствует в рамках структурной теории виброзащитных систем [1] способу управления по возмущающей силе. В этом случае настроечный параметр затрагивает только числитель передаточной функции и не влияет на величину частот собственных колебаний.

Таким образом, в системе с двумя степенями свободы при определении частоты динамического гашения и формировании амплитудно-частотных характеристик появляется настроечный параметр  $\alpha$ , который может изменяться в достаточно больших пределах.

Приведенная жесткость при наличии системы внешних сил дает представление о смещении по координате в предположении, что в этой точке приложена обобщенная сила. Такая сила заменяет собой действие исходной системы возмущения, но при такой силе имеется соответствующий коэффициент, который учитывает характер распределения сил. Если  $k_{np} \rightarrow \infty$ , а податливость в данной точке стремится  $\rightarrow 0$ , то это свидетельствует о формировании положения равновесия, относительно которого могут формироваться колебания объекта рассмотрения. Знак (-) или (+) в значении  $k_{np}$  характеризует движение в том или ином направлении от состояния равновесия.

Пусть  $Q_1 = k_1 z_1$ ,  $Q_2 = k_3 z_2$ , если  $z_1 = z_2 = z$ , то

$$\frac{y_1}{z} = k_1 z_1 \frac{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) + k_3 z_2}{k_2(1 + \alpha) + \alpha k_1}, \quad (16)$$

если  $z_2 = \alpha z_1$ :

$$\frac{y_1}{z} = \frac{k_1 m_2 p^2 + k_1(k_2 + k_3) + k_3 \alpha k_2}{k_2(1 + \alpha) + \alpha k_1}, \quad (17)$$

$$\omega_{дин}^2 = \frac{k_1(k_2 + k_3) + k_3 \alpha k_2}{k_1 m_2}, \quad (18)$$

$$|W_1(p)|_{p=0} = \frac{k_1(k_2 + k_3) + k_3 \alpha}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}. \quad (19)$$

С учетом (3), (4) запишем, что

$$\bar{y}_2 = \frac{-Q_1 a_{12} + Q_2 a_{11}}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} = \frac{k_2 k_1 z_1 + k_3 z_2 (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}, \quad (20)$$

тогда:

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_1} = \frac{k_3 \alpha m_1 p^2 + \alpha k_3 (k_1 + k_2) + k_1 k_2}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}, \quad (21)$$

$$\text{откуда} \quad \omega_{\text{дин}}^2 = \frac{\alpha k_3 (k_1 + k_2) + k_1 k_2}{k_3 \alpha m_1}. \quad (22)$$

То есть режимы динамического гашения зависят от системы внешних сил. Режимы эти могут быть или не быть.

Если один из силовых факторов считать внешним возмущением, то второй силовой фактор можно рассматривать как управляемую силу, вводимую для изменения динамического состояния. Контроль за характером изменения состояния можно вести по значению  $k_{np}$ . Знак и величина  $k_{np}$  определяют вид АЧХ. При  $k_{np} \rightarrow \infty$ , что может определяться значением  $\alpha_{кр}$ , АЧХ начинается с нуля.

Если  $\alpha = \alpha_{кр}$ , то режима динамического гашения по рассматриваемой координате нет.

**II. Учет особенностей внешних возмущений.** Рассмотрим случай, когда система внешних возмущений имеет силовые и кинематические компоненты.

Пусть  $z_2 = \alpha z_1$ , что вполне допустимо, запишем

$$Q'_1 = Q_1 + k_1 z_1, \quad Q'_2 = Q_2 + k_3 \alpha z_1, \quad \text{а также} \quad Q_2 = \beta Q_1$$

или

$$\begin{aligned} Q'_1 = Q_1 + k_1 z_1, & \quad Q'_1 = z_1 \left( \frac{Q_1}{z_1} + k_1 \right), \\ Q'_2 = \beta Q_1 + k_3 \alpha z_1; & \quad \text{или} \\ Q'_2 = z_1 \left( \frac{\beta Q_1}{z_1} + k_3 \alpha \right); & \end{aligned} \quad (23)$$

то есть систему внешних воздействий  $Q_1, Q_2, z$  можно привести к одному кинематическому

возмущению  $z_1$ , но надо ввести параметры  $\alpha = \frac{z_1}{z_2}$ ,  $\beta = \frac{Q_1}{Q_2}$ . Нужно еще один параметр – ус-

ловную пружину, жесткость которой будет равна  $\frac{Q_1}{z_1} = k_0$ , тогда

$$Q_1' = z_1(k_0 + k_1), Q_2' = z_1(\beta k_0 + k_3 \alpha). \quad (24)$$

Если сила  $Q_1$  прикладывается к телу массой  $m_1$  и одновременно с этим появляется сила  $Q_2$  той же частоты и начинает действовать по координате  $y_2$ , будучи приложена к массе  $m_2$ , то можно говорить о групповом эффекте. Сила  $Q_1$  подчиняет себе или ставит в управление себе силу  $Q_2$ . При этом  $Q_2 = \alpha Q_1$ . В системе происходят изменения. АЧХ изменяется таким образом, как будто бы изменяется жесткость пружины  $k_2$ . Это изменение жесткости определяется параметром  $\alpha$ , который может иметь отрицательное и положительное значения, проходя через нуль. То есть если  $\alpha < 0$ , то групповое взаимодействие системы внешних сил проявляет себя как введение в систему пружины с соответствующей жесткостью. Вопрос заключается в том, может ли быть такая ситуация реализована. Можно положительно ответить на такой вопрос. Если  $Q_1$  приложено к массе  $m_1$  как одна из сторон взаимодействия, вызванного помещением электродинамического вибратора между  $m_1$  и  $m_2$ , то  $\alpha = -1$  в соответствии с законами механики (действие равно противодействию). Однако ситуация более универсальная может быть предложена на основе использования двух пар инерционных возбудителей. В принципе, подход может быть распространен и на систему с несколькими степенями свободы. Но суть остается одинаковой – связи между силами эквивалентны по физическому эффекту.

Таким образом,

$$Q_1 = Q_1 + k_1 z_1 = Q_1 \left(1 + \frac{k_1 z_1}{Q_1}\right) = Q_1 \left(1 + \frac{k_1}{k_0}\right). \quad (25)$$

Если  $\frac{Q_1}{z_1} = k_0$ , то

$$Q_2 = Q_1 \left(\beta + \frac{k_3 \alpha z_1}{Q_1}\right) = Q_1 \left(\beta + \frac{k_3 \alpha}{k_0}\right). \quad (26)$$

Тогда передаточные функции системы определяются

$$\frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \left(1 + \frac{k_1}{k_0}\right) \frac{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) + k_2 \left(\beta + \frac{k_3 \alpha}{k_0}\right)}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad (27)$$

$$\frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \left(1 + \frac{k_1}{k_0}\right) k_2 + \left(\beta + \frac{k_3 \alpha}{k_0}\right) (m_1 p^2 + k_1 + k_2), \quad (28)$$

откуда

$$\omega_{1\text{дин}}^2 = \frac{(k_2 + k_3)(k_0 + k_1) + k_2(\beta k_0 + \alpha k_3)}{(k_1 + k_0)m_2}, \quad (29)$$

$$\omega_{2\text{дин}}^2 = \frac{(k_1 + k_0) + k_2(\beta k_0 + \alpha k_3)(k_1 + k_2)}{(k_0 \beta + k_3 \alpha)m_1}. \quad (30)$$



То есть при возмущении  $Q_1$  и установлении связей с остальными силовыми факторами возможны режимы динамического гашения. Отметим, что в выражение для определения частот динамического гашения входят и параметры дополнительно вводимых управляющих сил. В физическом смысле эти силы реализуются как дополнительные упругие элементы, то есть вводимые силы изменяют упругие свойства системы. Подходы, основанные на введении дополнительных сил, управляемых таким образом, чтобы изменять некоторые динамические свойства системы, можно рассматривать как реализацию принципа управления состоянием системы по возмущающему воздействию [7]. Характерным признаком такого управления является возможность изменять только числитель передаточной функции.

**Заключение.** Таким образом, при действии на систему нескольких внешних сил при наличии между ними определенных связей, например, по величинам амплитуд возмущений, а также некоторых фазовых соотношениях, система приобретает ряд признаков, которые можно отнести к возможностям реализации принципа управления по возмущению.

#### Библиографический список

1. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. - Иркутск: Изд-во Ирк. гос. ун-та, 2008. - 523 с.
2. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. - Новосибирск: Наука. 2010. - 430 с.
3. Артюнин, А. И. Применение метода разделения движений для исследования динамики роторной системы с гибким ротором и маятниковым автобалансиром / А. И. Артюнин, Г. Г. Алхунсаев, К. В. Серебренников // Известия вузов. Машиностроение. - 2005. - N 9. - С. 8-14
4. Артюнин, А. И. Об особом режиме движения жесткого ротора с упругими опорами и маятниковыми автобалансирами / А. И. Артюнин, Г. Г. Алхунсаев // Известия вузов. Машиностроение. - 2005. - N 10. - С. 8-14
5. Елисеев С.В., Волков Л.Н., Кухаренко В.П. Динамика механических систем с дополнительными связями. -Новосибирск: Наука. 1990. - 386 с.
6. Вибрации в технике: справочник в 6 т. Т. 6. Защита оборудования от вибраций / под ред. К.В. Фролова. -М.: Машиностроение. -1983.-586 с.
7. Дружинский И.А. Механические цепи. - Ленинград: Машиностроение.- 1977.-247 с.