Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 10. С. 102–116.

DOI: **10.7463/1016.0848907**

Представлена в редакцию: 03.09.2016
Исправлена: 17.09.2016

УДК 621.391; 519.216.1/2

Описание и имитация псевдослучайных сигналов в рамках обобщенной корреляционной теории в одноосновных системах счисления

Сюзев В. В.[1], Гуренко В. В.[1,*]

[*] wgurenko@bmstu.ru

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Для эффективного решения задач, связанных с разработкой и исследованием информационно-управляющих комплексов реального времени различного назначения методами математического моделирования, предложены теоретические и прикладные основы имитации псевдослучайных p-стационарных сигналов в рамках обобщенной корреляционной теории в одноосновных системах счисления с произвольным основанием. Изложены оригинальные методы и алгоритмы канонического и спектрального описания и имитации непрерывных и дискретных псевдослучайных сигналов в базисе Виленкина–Крестенсона. Приведена методика настройки структуры представленных алгоритмов на заданные энергетические характеристики сигналов. Полученные результаты носят обобщенный характер. Их использование приводит как к известным выводам в частотной и секвентной областях, так и к новым алгоритмам различной вычислительной сложности.

Ключевые слова: детерминированные сигналы, псевдослучайные сигналы, мощность, автокорреляционная функция, спектр, имитация сигналов, система счисления

Введение

В процессе решения задач, связанных с разработкой и исследованием информационно-управляющих комплексов реального времени, широко используются стационарные детерминированные и случайные сигналы, энергетические характеристики которых инвариантны относительно временного сдвига в виде обычного алгебраического сложения или в виде поразрядного сложения по модулю два. Сигналы первого класса определяются в рамках классической корреляционной теории, и математическую основу их описания составляет частотное представление в базисе комплексных экспоненциальных функций Фурье [1,2]. Сигналы же второго класса ограничиваются рамками двоичной корреляции и основываются на секвентном представлении сигналов в базисных системах функций Уолша–Хармута [2, 3].

Широта области применения таких сигналов подтверждается совокупностью известных публикаций. Так, в работе [4] при исследовании особенностей применения шумоподобных сигналов в радиолокационных системах дистанционного зондирования активно использованы детерминированные и случайные частотные процессы, составляющие математическую основу как сигналов, несущих полезную информацию, так и сигналов, являющихся моделью различного рода помех и шумов, а в работе [3] при разработке эффективных алгоритмов первичной и вторичной обработки радиолокационной информации используются секвентные детерминированные и случайные сигналы заданной мощности.

В работах [5, 6] решались задачи имитации частотных и секвентных сигналов для отладки управляющих алгоритмов и повышения надежности аппаратуры бортового инфракрасного Фурье-спектрометра для температурно-влажностного зондирования атмосферы Земли. В работе [7] частотные сигналы использовались при реализации передачи изображения поверхности Земли от различных видеодатчиков, установленных на космических и атмосферных летательных аппаратах, а в работе [8] для эффективного сжатия передаваемой при этом информации использовалось секвентное представление обрабатываемых снимков.

Следует, однако, иметь в виду, что частотное и секвентное представления являются частным случаем более общего $p-$стационарного представления сигналов в рамках обобщенной корреляционной теории, основанной на общем сдвиге в виде поразрядного модулированного алгебраического сложения в одноосновной системе счисления с произвольным основанием p и базисных функциях Виленкина–Крестенсона (ВКФ) [2, 9, 10]. Задачей данной статьи поставлена разработка методов и алгоритмов описания и имитации сигналов в рамках такой обобщенной корреляционной теории с оригинальным сочетанием канонического и спектрального их представления в базисе ВКФ, приводящем к эффективным алгоритмам обработки различной вычислительной сложности.

1. Описание p–стационарных сигналов в рамках обобщенной корреляционной теории

Пусть на конечном одностороннем временном интервале $[0, T)$ задан детерминированный сигнал $x(t)$ с конечной мощностью

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt.$$

Его можно представить в виде функций нормированного аргумента $z = t/T$, изменяющегося в диапазоне $[0, 1)$. Если этот аргумент записывается в позиционной системе счисления с основанием p (p – целое положительное число)

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} z_m p^{-m}, \tag{1}$$

где все z_m означают соответствующие разряды позиционного кода ($z_m = 0, 1, \ldots, p-1$), то для сигнала $x(z)$ можно использовать обобщенный сдвиг на нормированную величину $u = \tau/T$ (τ – временной сдвиг), реализуемый с помощью модулярного сложения $z \oplus u$ или вычитания $z \ominus u$, выполняемых по следующим поразрядным правилам:

$$(z \oplus u)_m = (z_m + u_m)(mod\, p),$$

$$(z \ominus u)_m = (z_m - u_m)(mod\, p).$$

Сигналы с таким понятием временного сдвига адекватны системам базисных ВКФ $Wal\,(k,z)$, поскольку последние обладают свойством мультипликативности с базовой операцией в виде тех же обобщенных сложений и вычитаний [2, 9]. Поэтому для них справедливы следующие полезные равенства:

$$\left.\begin{aligned} &Wal(k,z)Wal(\lambda,z) = Wal(k \oplus \lambda, z);\ Wal(k,z)Wal^*(\lambda,z) = Wal(k \ominus \lambda, z);\\ &Wal(k,z)Wal(k,u) = Wal(k, z \oplus u);\ Wal(k,z)Wal^*(k,u) = Wal(k, z \ominus u), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

справедливость которых следует из аналитического описания ВКФ [2, 9]:

– для упорядочения Адамара

$$Wal(k,z) = exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{\infty} k_m z_m\right), \qquad (3)$$

– для упорядочения Хармута

$$Wal(k,z) = exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{\infty} \langle k_m \rangle z_m\right). \qquad (4)$$

В выражениях (2) $Wal^*(k,z)$ есть комплексно-сопряженная ВКФ, в формулах (3) и (4) $j = \sqrt{-1}$, k_m определяет значение *m*-го разряда позиционного кода номера функции k в системе счисления с основанием p:

$$k = \sum_{m=1}^{\infty} k_m p^{m-1}, \qquad (5)$$

а $\langle k_m \rangle$ означает *m*-й разряд обобщенного кода Грея числа k, вычисляемый по правилу: $\langle k_m \rangle = (k_m + k_{m+1})(mod\, p),\ m = 1, 2, \ldots$. ВКФ образуют полный ортонормированный базис, который может использоваться для спектрального описания сигнала $x(z)$. Пара преобразований Фурье в нем имеет следующий вид:

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) Wal(k,z), \qquad (6)$$

$$X(k) = \int_0^1 x(z)\, Wal^*(k,z) dz, \qquad (7)$$

а равенство Парсеваля записывается так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X(k)X^*(k) = \int_0^1 x^2(z)\,dz.$$

В последнем выражении $X^*(k)$ есть спектр, комплексно сопряженный спектру $X(k)$ сигнала $x(z)$. Функция

$$P_x(k) = X(k)X^*(k) = |X(k)|^2 \qquad (8)$$

описывает спектр мощности сигнала $x(z)$ в базисе ВКФ, поэтому равенство Парсеваля можно представить и в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_x(k) = \int_0^1 x^2(z)\,dz. \qquad (9)$$

Если числа k и z представляются кодом с конечным числом разрядов n, то ряд Фурье (6) примет усеченный вид

$$x(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Wal(k,z),$$

а число слагаемых в левой части равенств Парсеваля будет равно N, причем

$$N = p^n. \qquad (10)$$

Функция спектра мощности $P_x(k)$ сигнала $x(z)$ в базисе ВКФ инвариантна по отношению к принятому закону сдвига. Действительно, пусть сигнал $x(z)$, сдвинутый на величину u по оси z, имеет спектр $X_u(k)$, причем

$$X_u(k) = \int_0^1 x(z \ominus u)\,Wal^*(k,z)dz.$$

Умножим этот сигнал на произведение $Wal(k,u)Wal^*(k,u)$, равное 1, и учтем свойства мультипликативности (2) ВКФ. Тогда получим, что

$$X_u(k) = \int_0^1 x(z \ominus u)\,Wal^*(k,z)Wal(k,u)Wal^*(k,u)dz =$$

$$= Wal^*(k,u)\int_0^1 x(z \ominus u)\,Wal^*\big(k,(z \ominus u)\big)dz = X(k)Wal^*(k,u),$$

а спектр мощности будет равен

$$X_u(k)X_u^*(k) = X(k)Wal^*(k,u)X^*(k)Wal(k,u) = X(k)X^*(k)$$

и совпадет со спектром мощности несдвинутого сигнала.

Таким образом, в базисе ВКФ сигнал $x(z)$ (6) является p −стационарным сигналом. Для него можно записать обобщенную автокорреляционную функцию (АКФ)

$$R_x(u) = \int_0^1 x(z)x(z \oplus u)\,dz, \qquad (11)$$

которая будет обладать теми же основными свойствами, что и классическая АКФ при обычном определении сдвига (ее начальное значение при $u = 0$ равно мощности сигнала, она везде будет четной функцией сдвига, и периодические сигналы будут иметь также периодическую обобщенную АКФ с тем же периодом), но отличаться от нее по форме. Обобщенная АКФ (11) сигнала $x(z)$ связана с его спектром мощности. Для определения этой связи представим сдвинутый сигнал в формуле (11) в виде ряда Фурье (6). Тогда с учетом свойств мультипликативности (2) ВКФ после преобразования получим:

$$R_x(u) = \int_0^1 x(z)\left[\sum_{k=0}^{\infty} X(k)Wal\big(k,(z \oplus u)\big)\right]dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} X(k)Wal(k,u)\int_0^1 x(z)Wal(k,z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)X^*(k)\, Wal(k,u) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_x(k)\, Wal(k,u). \quad (12)$$

Можно найти обратную связь $P_x(k)$ с $R_x(u)$. Для этого умножим уравнение (12) на функцию $Wal^*(\lambda, u)$ и проинтегрируем его в пределах от 0 до 1. В этом случае после преобразования и учета свойства ортонормированности ВКФ получим:

$$P_x(k) = \int_0^1 R_x(u)Wal^*(k,u)du. \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) по сути представляют собой уравнения Винера-Хинчина, обобщенные на модулярный сдвиг в одноосновной системе счисления и базис ВКФ. Если в них от относительной переменной u перейти к абсолютной τ, то обобщенные уравнения Винера-Хинчина можно записать в функции времени:

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} P_x(k)\, Wal(k, \tau/T),$$

$$P_x(k) = \frac{1}{T}\int_0^T R_x(\tau)Wal^*(k,\tau/T)d\tau.$$

2. Каноническое представление сигналов

Можно получить еще одно важное для описания сигналов представление обобщенной АКФ. Рассмотрим ее как функцию, определенную на интервале $[0, 1)$, и представим в виде ряда Фурье по ВКФ:

$$R_x(u) = \sum_{k=0}^{\infty} R(k)Wal(k,u),$$

где

$$R(k) = \int_0^1 R_x(u) Wal^*(k,u) du.$$

Поскольку интервал $u = t \,/\, T$ есть нормированное временное расстояние между двумя моментами $z_1 = t_1 \,/\, T$ и $z_2 = t_2 \,/\, T$, задаваемое правилом обобщенного сдвига $u = z_2 \ominus z_1$, то

$$R_x(z_2 \ominus z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} R(k) Wal\big(k, (z_2 \ominus z_1)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} R(k) Wal(k, z_2)\, Wal^*(k, z_1) \qquad (14)$$

и есть каноническое разложение $R_x(u)$ в базисе ВКФ.

Этому разложению соответствует каноническое представление эргодического случайного процесса [11]

$$y(z) = m_y + \sum_{k=1}^{\infty} Y(k) Wal(k,z)\,, \qquad z \in [0,1), \qquad (15)$$

где m_y – его математическое ожидание, а коэффициенты $Y(k)$ являются комплексными некоррелированными случайными величинами с параметрами $(0, |\sigma_k|^2)$.

Каноническое представление (15) можно записать и в абсолютном временном виде

$$y(t) = m_y + \sum_{k=1}^{\infty} Y(k) Wal(k, t/T)\,, \qquad t \in [0,T), \qquad (16)$$

где m_y и $Y(k)$ имеет тот же смысл и те же параметры, что и в уравнении (15). Если при этом учесть, что математическое ожидание

$$m_y = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) dt = X(0) \qquad (17)$$

и совпадает со средним значением детерминированного сигнала $x(t)$, а дисперсии

$$|\sigma_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T R_x(\tau) Wal^*(k, t/T) d\tau = |X(k)|^2, \qquad k = 1,2,\dots, \qquad (18)$$

то канонические представления (15) и (16) можно использовать в качестве описания случайного процесса $y(t)$ с энергетическими характеристиками детерминированного сигнала $x(t)$.

Для подтверждения этого найдем корреляционную функцию процесса $y(z)$ в точках z_1 и z_2:

$$R_y(z_1, z_2) = M[\mathring{y}(z_2)\mathring{y}(z_1)] = M\left[\sum_{k=1}^{\infty} Y(k) Wal(k, z_2) \sum_{m=1}^{\infty} Y^*(m) Wal^*(m, z_1)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Wal(k, z_2) \sum_{m=1}^{\infty} Wal^*(m, z_1) M[Y(k) Y^*(m)].$$

Здесь $\mathring{y}(z)$ означает центрированные значения случайного процесса $y(z)$, а M – операцию вычисления математического ожидания. Поскольку математическое ожидание $M[Y(k)Y^*(m)]$ является взаимокорреляционной функцией комплексных коэффициентов $Y(k)$ и $Y(m)$ и в силу их независимости равно

$$M[Y(k)Y^*(m)] = |\sigma_k|^2\delta_{k,m}\,,$$

где $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера, то

$$R_y(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty}|\sigma_k|^2 Wal^*(k, z_1)Wal(k, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty}|\sigma_k|^2 Wal\big(k, (z_2 \ominus z_1)\big).$$

Однако для p –стационарных процессов

$$R_y(z_1, z_2) = R_y(z_2 \ominus z_1) = R_y(u).$$

Следовательно, с учетом соотношения (18),

$$R_y(u) = \sum_{k=1}^{\infty}|\sigma_k|^2 Wal(k, u) = \sum_{k=1}^{\infty}|X(k)|^2 Wal(k, u) = R_x(u). \quad (19)$$

Таким образом, АКФ случайного процесса $y(z)$ совпадает с АКФ исходного детерминированного сигнала $x(z)$ с нулевым средним.

Случайные процессы (15) и (16) обладают следующими вероятностными характеристиками: их математическое ожидание

$$M[y(t)] = M[y(z)] = M\big[m_y\big] + \sum_{k=1}^{\infty} M[Y(k)]Wal(k, z) = m_y$$

и совпадает с заданной средней величиной $X(0)$ (см. выражение (17)), поскольку все $M[Y(k)] = 0$, а дисперсия

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \sum_{k=1}^{\infty}|\sigma_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|X(k)|^2 \quad (20)$$

и связана со спектром мощности детерминированного сигнала.

3. Канонические алгоритмы имитации псевдослучайных сигналов в рамках обобщенной корреляционной теории

Канонические представления сигналов (15) и (16) можно использовать в качестве алгоритмов имитации псевдослучайных процессов $y(z)$ и $y(t)$ с энергетическими характеристиками, заданными для детерминированных сигналов $x(z)$ или $x(t)$ и являющимися исходными данными для имитации. При этом выражения (17) и (18) будут описывать подготовительную процедуру настройки алгоритма имитации на эти характеристики.

При практическом использовании рассмотренных алгоритмов имитации бесконечные случайные ряды (15) и (16) должны быть заменены конечными рядами. Число их членов N выбирается из условий требуемой точности имитации с учетом формулы (10) для N. Для воспроизведения каждой независимой случайной реализации в этих алгоритмах необходимо сформировать с помощью датчика случайных чисел [12] набор из $(N-1)$ комплексных случайных коэффициентов $Y(k)$ с параметрами $(0,|\sigma_k|^2)$ и вычислить $M = 1 / \Delta z = T / \Delta t$ (здесь Δz и Δt – интервалы дискретизации по времени) значений псевдослучайного сигнала по формуле (15) или (16).

При формировании случайных коэффициентов $Y(k)$ следует учесть их комплексный характер

$$Y(k) = Re[Y(k)] - j\,Im[Y(k)], \tag{21}$$

где Re и Im означают их действительную и мнимую составляющие, и независимо воспроизводить случайные величины $Re[Y(k)]$ и $Im[Y(k)]$ с параметрами $(0, Re^2[\sigma_k])$ и $(0, Im^2[\sigma_k])$ соответственно. Для определения последних можно использовать уравнение (18), которое в этом случае целесообразно записать в виде

$$Re^2[\sigma_k] + Im^2[\sigma_k] = |X(k)|^2, \quad k = 1,2,\ldots,N-1, \tag{22}$$

добавив к нему фазовое соотношение между составляющими дисперсий:

$$Im[\sigma_k] = \lambda_k Re[\sigma_k], \quad k = 1,2,\ldots,N-1, \tag{23}$$

где λ_k принимают произвольные вещественные значения и выбираются при имитации. В самом простом случае можно выбрать все λ_k равными единице. Совместное решение уравнений (22) и (23) позволяет получить простые формулы для вычисления составляющих комплексных дисперсий:

$$Re[\sigma_k] = \sqrt{\frac{|X(k)|^2}{(1+\lambda_k^2)}}, \quad Im[\sigma_k] = \lambda_k \sqrt{\frac{|X(k)|^2}{(1+\lambda_k^2)}}, \quad k = 1,2,\ldots,N-1. \tag{24}$$

Основная вычислительная сложность канонического алгоритма имитации связана с реализацией ряда (15) или (16) и включает в себя в общем случае выполнение MN комплексных умножений, столько же комплексных сложений, а также вычисление $2p$ значений тригонометрических функций. Эти затраты можно существенно сократить, если при вычислении ряда (15) или (16) использовать специальные быстрые алгоритмы [2, 9, 10].

Рассмотренные алгоритмы можно применить и для имитации дискретных псевдослучайных сигналов с заданными энергетическими характеристиками. В этом случае $M = N$, а случайный сигнал $y(i)$ представляется конечным случайным дискретным каноническим рядом и принимает N значений:

$$y(i) = m_y + \sum_{k=1}^{N-1} Y(k) Wal(k, i/N), \quad i = 0,1,\ldots,N-1. \tag{25}$$

В дискретном варианте алгоритмов имитации могут быть использованы все три наиболее изученные способа упорядочения ВКФ: Адамара, Хармута и Пэли [2, 9]:

– упорядочение Адамара

$$Wal(k, i/N) = exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right); \tag{26}$$

– упорядочение Хармута

$$Wal(k, i/N) = exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}\langle k_m\rangle i_m\right); \tag{27}$$

– упорядочение Пэли

$$Wal(k, i/N) = exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}k_{n-m+1}i_m\right), \tag{28}$$

что расширяет возможный ассортимент алгоритмов имитации. В формулах (26) – (28) i_m означает m-й разряд позиционного -разрядного кода дискретного времени i в односновной системе счисления с основанием p:

$$i = \sum_{m=1}^{n} i_m p^{m-1}, \quad i_m = 0,1, \dots, p-1.$$

Для повышения вычислительной эффективности целесообразно при реализации случайных рядов (23) использовать быстрые преобразования Виленкина-Крестенсона [2].

4. Спектральные алгоритмы имитации псевдослучайных сигналов в рамках обобщенной корреляционной теории

Рассмотренные канонические алгоритмы имитации можно упростить, если представить случайные комплексные величины $Y(k)$ (21) в следующем виде:

$$Y(k) = \mu_k Re[X(k)] - j\,\gamma_k Im[X(k)], \tag{29}$$

где μ_k и γ_k являются независимыми случайными величинами, равновероятно принимающими значения $+1$ и -1. Поскольку их математические ожидания равны 0, а дисперсии – единице, то математические ожидания самих величин $Y(k)$ равны 0, а дисперсии равны

$$|\sigma_k|^2 = M[Y(k)Y^*(k)] = \mu_k^2 Re^2[X(k)] + \gamma_k^2 Im^2[X(k)] =$$
$$= Re^2[X(k)] + Im^2[X(k)] = |X(k)|^2 \tag{30}$$

и совпадают со спектральными коэффициентами мощности детерминированного сигнала. При выводе выражения (30) учтено, что $\mu_k^2 = \gamma_k^2 = 1$.

Использование случайных величин (27) при записи канонических уравнений (15) и (16) приводит к спектральному способу представления случайных сигналов в базисе ВКФ с детерминированными значениями модулей спектральных коэффициентов $X(k)$ и случайным изменением их знаков:

$$y(z) = X(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\{\mu_k Re[X(k)] - j\,\gamma_k Im[X(k)]\}\,Wal(k, z), \tag{31}$$

$$y(t) = X(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\{\mu_k Re[X(k)] - j\,\gamma_k Im[X(k)]\}\,Wal(k, t/T). \tag{32}$$

При этом АКФ и дисперсии случайных сигналов $y(z)$ и $y(t)$ в силу соотношений (19) и (20) будут совпадать с АКФ и мощностью детерминированных сигналов $x(z)$ и $x(t)$

соответственно, а их математическое ожидание m_y равно нулевому коэффициенту $X(0)$ спектрального разложения детерминированных сигналов. При имитации центрированных случайных сигналов $X(0)$ принимается равным нулю.

Действительные коэффициенты $Re[X(k)]$ и $Im[X(k)]$ случайных рядов (31) и (32) можно получить по заданному спектру мощности детерминированного сигнала из выражения (30), добавив к нему фазовое соотношение для коэффициентов

$$Im[X(k)] = \lambda_k Re[X(k)], \quad k = 1,2, \dots, \tag{33}$$

аналогичное фазовому соотношению (23) между составляющими дисперсий в канонических алгоритмах имитации. В результате решения уравнений (30) и (33) получим:

$$Re[X(k)] = \sqrt{\frac{|X(k)|^2}{(1+\lambda_k^2)}}, \quad Im[X(k)] = \lambda_k \sqrt{\frac{|X(k)|^2}{(1+\lambda_k^2)}}. \tag{34}$$

Выражения (34) описывают подготовительную процедуру настройки спектральных алгоритмов имитации на задаваемые энергетические характеристики детерминированного сигнала.

Поскольку случайные параметры μ_k и γ_k принимают только по два значения, то спектральные алгоритмы имитации (31) и (32) будут обладать цикличностью. При усечении рядов (31) и (32) до N членов, с их помощью можно будет воспроизвести $2^{2(N-1)}$ независимых реализаций псевдослучайных сигналов для каждой комбинации значений фазовых коэффициентов λ_k. Однако данный недостаток может оказаться несущественным для практики моделирования, особенно при больших N.

По простоте реализации спектральные алгоритмы имитации превосходят канонические, поскольку используют в своей структуре случайные параметры, воспроизводимые с помощью простых датчиков случайных событий [12]. Сокращение же числа операций сложения и умножения достигается в них за счет применения быстрых ВКФ- преобразований [2].

Можно достичь еще большего упрощения спектральных алгоритмов, если в рядах (31) и (32) принять

$$\mu_k = \gamma_k = \alpha_k, \quad k = 1,2, \dots .$$

Тогда случайные параметры можно вынести из структуры спектральных коэффициентов и получить

$$y(z) = X(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X(k)\, Wal(k, z), \quad z \in [0,1), \tag{35}$$

$$y(t) = X(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X(k)\, Wal(k, t/T), \quad t \in [0, T). \tag{36}$$

Эта версия спектральных алгоритмов при том же числе сложений и умножений потребует в два раза меньшего числа случайных величин α_k с параметрами $(0, 1)$. Правда, при этом уменьшится и длина цикла имитации, поскольку при усечении рядов (35) и (36) до N членов с их помощью можно будет воспроизвести уже только $2^{(N-1)}$ независимых реализаций для каждого набора фазовых коэффициентов λ_k.

Для имитации псевдослучайных дискретных сигналов алгоритмы приобретают вид дискретных рядов:

$$y(i) = X(0) + \sum_{k=1}^{N-1} \{\mu_k Re[X(k)] + \gamma_k Im[X(k)]\} Wal(k, i/N),$$

$$y(i) = X(0) + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k X(k) Wal(k, i/N), \quad i = 0,1, \dots, N-1.$$

Их реализацию целесообразно выполнять с использованием быстрых дискретных преобразований Виленкина–Крестенсона [2].

Заключение

Таким образом, в статье представлены теоретические и прикладные основы формирования p –стационарных псевдослучайных сигналов в рамках обобщенной корреляционной теории в одноосновной системе счисления с произвольным основанием p. Они включают в себя оригинальные методы и алгоритмы канонического и спектрального описания и имитации непрерывных и дискретных псевдослучайных сигналов в базисе функций Виленкина–Крестенсона. Представлена методика настройки алгоритмов имитации на задаваемые энергетические характеристики. Полученные результаты носят обобщенный характер. При основании системы счисления $p = N$ и $n = 1$ они совпадают с результатами частотного представления, а при $p = 2$ – с секвентным представлением сигналов. При других значениях p представленная теория приводит к новым важным для практики алгоритмам описания и имитации, отличающимся по вычислительной сложности.

Дальнейшее развитие полученных алгоритмов может идти в направлении перехода от комплексного базиса ВКФ к действительному базису обобщенных функций Хартли [13], что позволит исключить операции комплексной арифметики, заменив их на более простые в реализации действительные операции. Разработку таких алгоритмов авторы ставят задачей своих последующих исследований.

Список литературы

1. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов. радио, 1972. 352 с.
2. Сюзев В.В. Основы теории цифровой обработки сигналов. М.: РТ Софт, 2014. 752 с.
3. Harmuth H.F. Sequency theory: foundations and applications. N.Y.: Academic Press, 1977. 574 p.
4. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2007. 544 с.

5. Golovin Yu.M., Zavelevich F.S., Nikulin A.G., Kozlov D.A., Monakhov D.O., Kozlov I.A., Arkhipov S.A., Tselikov V.A., Romanovskii A.S. . Spaceborne Infrared Fourier-Transform Spectrometers for Temperature and Humidity Sounding of the Earth's Atmosphere // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2014. Vol. 50. № 9. Pp. 1004-1015. DOI: 10.1134/S0001433814090096
6. Мошкин Б.Е., Вагин В.А., Жарков А.В., Максименко С.В., Мацицкий Ю.П., Романовский А.С., Хорохорин А.И., Шилов М.А. Многоцелевой Фурье-спектрометр космического базирования (экспериментальный образец) // Приборы и техника эксперимента. 2012. № 6. С. 78-84.
7. Костров Б.В., Гринченко Н.Н., Баюков К.И. Моделирование распределения яркостей в видеопотоке серии ландшафтных изображений // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2015. Вып. 9. С. 70-78.
8. Обработка изображений в авиационных системах технического зрения / Под ред. Л.Н. Костяшкина, М.Б. Никифорова. М.: Физматлит, 2016. 240 с.
9. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
10. Oppenheim A.V., Schafer R.W. Digital Signal Processing. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975. 585 p.
11. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971. 328 с.
12. Четвериков В.Н., Баканович Э.А., Меньков А.В. Вычислительная техника для статистического моделирования. М.: Сов. радио, 1978. 309 с.
13. Сюзев В.В. Обобщенные функции и преобразования Хартли в системах счисления с постоянным основанием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 2(95). С. 63-79.

Science&Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2016, no. 10, pp. 102–116.

DOI: **10.7463/1016.0848907**

Received: 03.09.2016
Revised: 17.09.2016

Description and Simulation of Pseudo-Random Signals in the Framework of the Generalized Correlation Theory in Single-Base Numeral Systems

V.V. Syuzev[1], **V.V. Gurenko**[1,*]

[*]wgurenko@bmstu.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: deterministic signals, pseudo-random signals, power, autocorrelation function, spectrum, signals' simulation, numeral system

When modelling the real-time information and control systems a need arises to simulate the random and deterministic signals with power characteristics being invariant with regard to the time shift. These signals are described either in the framework of the classical theory of correlation in the frequency domain in a Fourier basis of complex exponential functions, or in sequent representation in the basic systems of Walsh- Hartmut functions. However, both of these methods are special cases of more general representation of *p*-stationary signals in the framework of the generalized correlation theory, which is based on the concept of a general shift in monobasic number system with arbitrary base *p* and on the basis functions of Vilenkin-Christenson (VCF). The paper objective is to develop methods and algorithms to describe and reproduce signals of different computational complexity in the framework of this theory using a combination of their canonical and the spectral representation in the CCF basis.

The paper describes the *p*-stationary signals in the framework of the generalized correlation theory, formulates the mathematical ratios of a total time shift, shows the compliance of these signals with the systems of the basis CCF, proves the invariance of function of the signal power spectrum in the CCF basis for considered time shift, as well as analyses the relation of the signal power spectrum with its autocorrelation function.

Canonical signal representation, which is useful for describing a random process with power characteristics of deterministic signal, is considered as a generalized autocorrelation function. Coincidence autocorrelation function of a random process and a deterministic signal with zero mean is proved.

The paper puts a focus on the canonical algorithms to simulate the pseudo-random signals with power characteristics specified for deterministic signals and gives ground for a possibility to use them for reproducing digital pseudo-random signals. Illustrates the possibility for the three most well known ways of VCF ordering relation: Hadamard, Hartmut and Paley.

Shows a transition to the spectral method to represent the random signals in the CCF basis with deterministic values of modules of spectrum factors and with a random change of their signs, gives a technique to tune the spectral algorithms to simulate the specified power characteristics of a deterministic signal.

The obtained results are of generalized nature and provide both frequency and sequent representation of signals and in some cases lead to new algorithms of description and simulation of various computational complexities, which are vital for practice. In the future their development should be considered by changing from an integrated CCF basis to the real basis of generalised Hartley functions to simplify the simulation process through changing the operations of complex arithmetic for the valid ones.

References

1. Trakhtman A.M. *Vvedenie v obobschennuyu spektralnuyu teoriyu signalov* [Introduction to generalized spectral theory of signals]. Moscow: Sov.radio, 1972. 352 p.
2. Syuzev V.V. *Osnovy teorii tsifrovoj obrabotki signalov* [Basic theory of digital signal processing]. Moscow: RT Soft, 2014. 749 p.
3. Harmuth H.F. Sequency theory: foundations and applications. N.Y.: Academic Press, 1977. 574 p.
4. *Tsifrovaia obrabotka signalov i izobrazhenij v radiofizicheskikh prilozheniiakh* [Digital signal and image processing in radiophysical applications]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2007. 544 p.
5. Golovin Yu.M., Zavelevich F.S., Nikulin A.G., Kozlov D.A., Monakhov D.O., Kozlov I.A., Arkhipov S.A., Tselikov V.A., Romanovskii A.S. . Spaceborne Infrared Fourier-Transform Spectrometers for Temperature and Humidity Sounding of the Earth's Atmosphere. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2014, vol. 50, no. 9, pp. 1004-1015. DOI: 10.1134/S0001433814090096
6. Moshkin B.E., Zharkov A.V., Maksimenko S.V., Matsitskii Yu.P., Vagin V.A., Khorokhorin A.I., Romanovskii A.S., Shilov M.A. A prototype of the multipurpose space-based Fourier spectrometer. *Instruments and Experimental Techniques*, 2012, vol. 55, no.6, pp. 680-686. DOI: 10.1134/S0020441212050053
7. Kostrov B.V., Grinchenko N.N., Bayukov K.I. Modeling of brightness distribution within video flow of set of landscape images. *Izvestiia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki.* [News of the Tula State University.Technics], 2015, no. 9, pp. 70-78 (in Russ.).
8. *Obrabotka izobrazhenij v aviatsionnykh sistemakh tekhnicheskogo zreniia* [Image processing in aircraft vision systems]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2016. 240 p.
9. Trakhtman A.M., Trakhtman V.A. *Osnovy teorii diskretnykh signalov na konechnykh intervalakh* [Fundamentals of the theory of discrete signals on finite intervals]. Moscow: Sov.radio, 1975. 208 p.

10. Oppenheim A.V., Schafer R.W. Digital Signal Processing. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975. 585 p.
11. Bykov V.V. *Tsifrovoe modelirovanie v statisticheskoj radiotekhnike* [Digital modeling in statistical radio engineering]. Moscow: Sov. radio, 1971. 328 p.
12. Chetverikov V.N., Bakanovich E.A., Men'kov A.V. *Vychislitel'naia tekhnika dlia statisticheskogo modelirovaniia* [Computational technique for statistical modeling]. Moscow: Sov. radio, 1978. 309 p.
13. Syuzev V.V. Generalized functions and Hartley transforms in number systems with a permanent base. *Vestnik MSTU im. N.E.Baumana. Ser. Priborostroenie* [The Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Instrument Engineering], 2014, no. 2(95), pp. 63-79 (in Russ.).