

УДК 629.735.45 - 621.833.24

## **Нелинейные колебания в планетарных редукторах с податливыми опорами центральных колес**

Калинин Д. В.<sup>1,\*</sup>

<sup>\*</sup>[kalinin@ciam.ru](mailto:kalinin@ciam.ru)

<sup>1</sup>Центральный институт авиационного моторостроения  
имени П.И. Баранова, Москва, Россия

---

Зубчатые колеса планетарных редукторов авиационных двигателей работают в условиях высоких динамических нагрузок и вибраций, возбуждаемых в зацеплениях, и передающихся на остальные детали двигателя. Разработана динамическая модель планетарного редуктора, позволяющая определять НДС всех зубчатых колес редуктора во всем диапазоне частот вращения. Исследовано влияние податливости опор центральных колес на динамические напряжения в системе, а также влияние соотношения фаз зацепления сателлитов. Показано, что максимальные напряжения в венцовой шестерне возникают в результате ее колебаний по изгибным формам. На основе разработанной динамической модели выработаны рекомендации, обеспечивающие снижение динамических нагрузок.

**Ключевые слова:** зубчатые передачи, планетарный редуктор, динамическая модель, параметрические колебания, метод конечных элементов, динамические напряжения

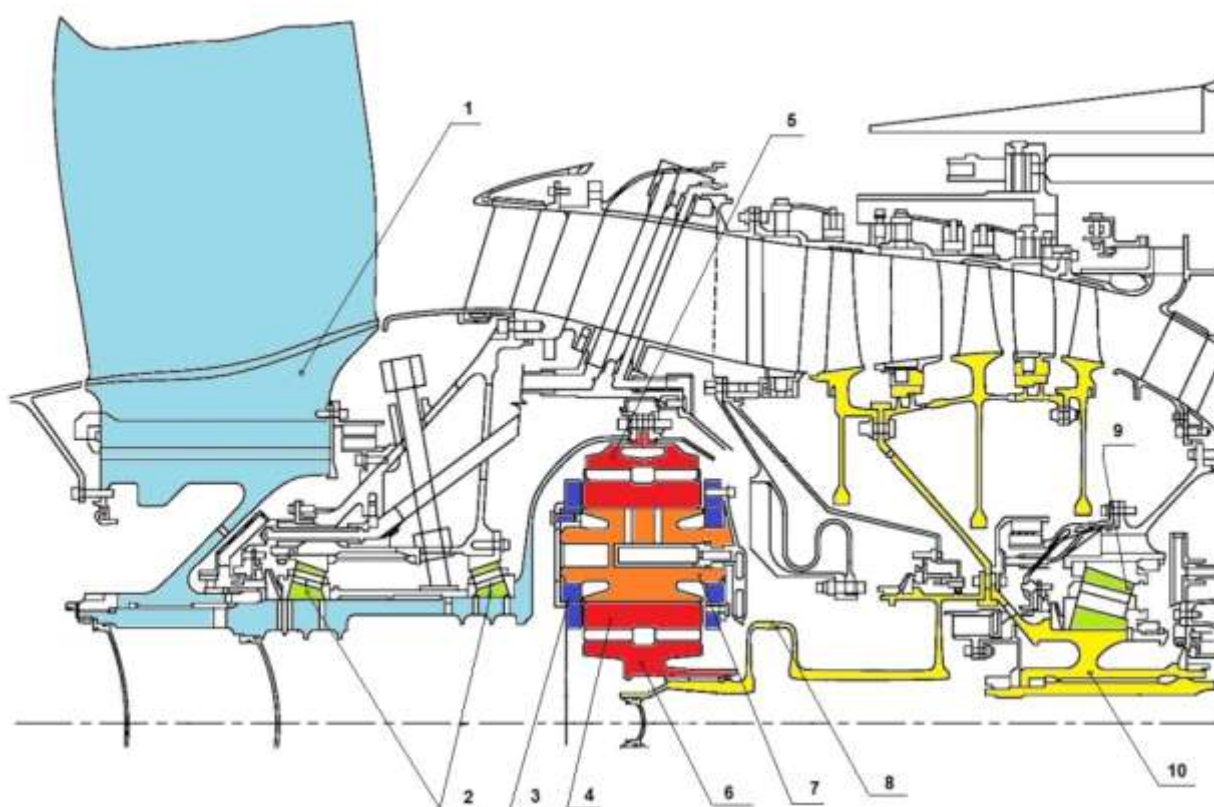
---

### **1 Введение**

В редукторных турбореактивных двухконтурных двигателях (ТРДД) применение редуктора (рис. 1) [1] обеспечивает оптимальную частоту вращения вентилятора при использовании малоступенчатой быстроходной турбины низкого давления (ТНД), в результате чего достигается высокая топливная экономичность, снижение шума и эмиссии выхлопных газов двигателя [2].

Зацепления зубчатых колес в редукторах и трансмиссиях являются источниками возбуждения динамических нагрузок и высокочастотных вибраций во всем механизме. При проектировании редукторов транспортного машиностроения в расчетах на прочность зубчатых колес в соответствии с требованиями стандартов ISO 6336 [3], DIN 3990 [4], ГОСТ 21354-87 [5] динамические нагрузки учитываются через коэффициент динамичности  $K_v$ , зависящий от частоты вращения колес и точности их изготовления. Влияние податливости опор, параметров зацепления и элементов конструкции редуктора не учитыва-

ется, а вибрации замыкаются обычно на массивных корпусах редукторов. Для редуктора привода вентилятора перспективного ТРДД такой подход не достаточен, поскольку в его конструкции применяются технические решения, направленные на снижение динамических нагрузок. Кроме того, высокий уровень вибраций, возбуждаемых в редукторе, представляет опасность для всего двигателя и обуславливает необходимость разработки методов оценки вибрационных нагрузок. На стадии проектирования влияние динамических нагрузок оценивается расчетным способом с использованием динамических моделей редуктора.



**Рисунок 1** - Схема редукторного двигателя: 1 - вентилятор; 2 – конические подшипники вала привода вентилятора; 3 – водило; 4 – сателлит; 5- эпицикл; 6 – солнечная шестерня; 7 – ось сателлита (подшипник скольжения); 8 – муфта; 9 – конические подшипники опоры ТНД; 10 – турбины низкого давления (ТНД).

Для исследования динамических процессов в планетарных редукторах обычно применяются два типа динамических моделей: математические модели с сосредоточенными параметрами, в которых зубчатое зацепление представляется в виде жестких дисков, соединенных упруго-демпфирующей связью [11], и модели, основанные на использовании метода конечных элементов [9,10], которые позволяют наиболее точно учитывать податливость всех элементов системы. В работах Э.Л. Айрапетова и М.Д. Генкина [6,7] предлагается использовать метод динамических податливостей, предполагающий разбиение динамической системы планетарного механизма на подсистемы, связанные условиями со-

вместности деформаций. Для сателлитов и солнечной шестерни планетарных механизмов предлагается динамическая модель с сосредоточенными параметрами, которая рассматривает крутильные колебания тел колес и перемещения точек их центров масс. Для эпициклической шестерни типичных планетарных механизмов используется модель с распределенными параметрами, позволяющие учитывать изгибные колебания самого тела шестерни вследствие ее высокой податливости. В работах А. Кахрамана [8,9] и Р. Паркера [10] используются конечно-элементные модели планетарных механизмов в динамической постановке на основе программного пакета МКЭ собственной разработки. В этих моделях более точно учитываются деформации тел зубчатых колес и их опор, однако данный способ требует больших затрат машинного времени и для упрощения задачи расчеты проводятся на упрощенной конечно-элементной сетке, т.е. подробное влияние кинематической погрешности зацепления не учитывается.

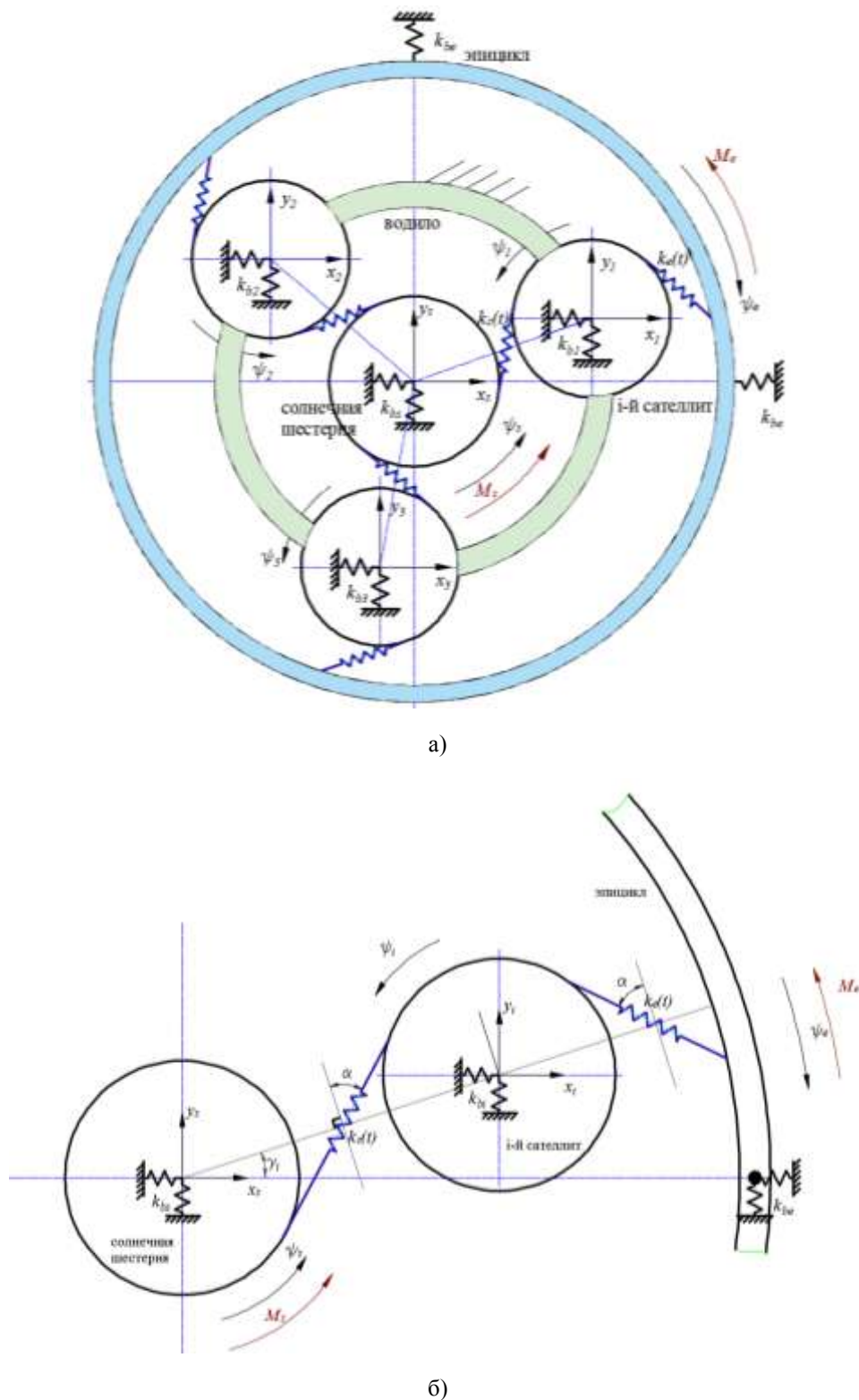
В статье рассматривается разработанная гибридная динамическая модель планетарного редуктора, сочетающая преимущества моделирования зацепления зубчатых колес в МКЭ и решения задач динамики аналитическими методами.

## **2 Гибридная динамическая модель планетарного редуктора**

На рис.1 представлена схема редукторного двигателя типа Pratt&Whitney серии 1000G, который имеет кинематическую схему редуктора типа «звезда», т.е. водило является неподвижным элементом, в котором установлены оси сателлитных шестерен. Динамическая модель с сосредоточенными параметрами для планетарного ряда с остановленным водилом представлена на рисунке 2,а. Для упрощения системы рассматривается планетарный ряд с тремя сателлитами. Основной подсистемой динамической модели редуктора является гибридная динамическая модель зацепления пары зубчатых колес (рис. 2,б). В работе [12] показано, что для наиболее точной оценки основного источника возбуждения в зацеплении пары зубчатых колес – кинематической погрешности, включающей как деформации зубьев под нагрузкой, так и технологические отклонения, эффективным является моделирование функции переменной жесткости зацепления с помощью МКЭ в квазистатической постановке. Для такой модели исследуются параметрические колебания системы с кинематическим возбуждением за счет переменной жесткости зацепления и нелинейными эффектами, определяемыми моделированием условия потери контакта зубьев [12]. Показано, что максимальный уровень динамических напряжений в зацеплении при проходе через резонанс не превышает определенного значения, обусловленного присутствием разрывных колебаний в системе.

Для оценки поведения нелинейной системы зубчатых колес планетарного механизма рассмотрим систему с  $N=n+2$  сосредоточенными присоединенными массами (рис. 2,а), со-

единенными упруго-демпфирующими связями, где  $n$  – количество спутников планетарного редуктора. Система уравновешена приложенными к солнечной шестерне и эпициклу крутящими моментами  $M_e$  и  $M_s$  соответственно.



**Рисунок 2** - Схема динамической модели планетарного механизма с сосредоточенными параметрами:  
 а – общий вид модели редуктора; б – подсистема «солнце-спутник-эпицикл».

Записав для модели уравнения Лагранжа с обобщенными координатами  $\varphi$ ,  $x$  и  $y$  для каждого тела, получим систему уравнений (1):

- система уравнений движения солнечной шестерни:

$$\begin{aligned} J_s \ddot{\varphi}_s + \sum_{i=1}^n (r_{bs} F_{si}^{dyn} + r_{bs} F_{si}^{damp}) &= M_s(t) \\ m_s \ddot{x}_s + k_{bx_s} x_s + c_{bx_s} \dot{x}_s + \sum_{i=1}^n (F_{si}^{dyn} + F_{si}^{damp}) \cdot \sin(\alpha + \gamma_i) &= 0 \\ m_s \ddot{y}_s + k_{by_s} y_s + c_{by_s} \dot{y}_s + \sum_{i=1}^n (F_{si}^{dyn} + F_{si}^{damp}) \cdot \cos(\alpha + \gamma_i) &= 0 \end{aligned}$$

- система уравнений движения  $i$ -го сателлита:

$$\begin{aligned} J_i \ddot{\varphi}_i + (r_{bi} F_{si}^{dyn} + r_{bi} F_{si}^{damp}) - (r_{bi} F_{ei}^{dyn} + r_{bi} F_{ei}^{damp}) &= 0 \quad (1) \\ m_i \ddot{x}_i + k_{bi} x_i + c_{bx_i} \dot{x}_i + (F_{si}^{dyn} + F_{si}^{damp}) \cdot (-\sin(\alpha + \gamma_i)) + (F_{ei}^{dyn} + F_{ei}^{damp}) \cdot \sin(\alpha + \gamma_i) &= 0 \\ m_i \ddot{y}_i + k_{by_i} y_i + c_{by_i} \dot{y}_i + (F_{si}^{dyn} + F_{si}^{damp}) \cdot (-\cos(\alpha + \gamma_i)) + (F_{ei}^{dyn} + F_{ei}^{damp}) \cdot \cos(\alpha + \gamma_i) &= 0 \end{aligned}$$

- система уравнений движения эпицикла:

$$\begin{aligned} J_e \ddot{\varphi}_e - \sum_{i=1}^n (r_{be} F_{ei}^{dyn} + r_{be} F_{ei}^{damp}) &= -M_e(t) \\ m_e \ddot{x}_e + k_{bx_e} x_e + c_{bx_e} \dot{x}_e + \sum_{i=1}^n (F_{ei}^{dyn} + F_{ei}^{damp}) \cdot \sin(\alpha + \gamma_i) &= 0 \\ m_e \ddot{y}_e + k_{by_e} y_e + c_{by_e} \dot{y}_e + \sum_{i=1}^n (F_{ei}^{dyn} + F_{ei}^{damp}) \cdot \cos(\alpha + \gamma_i) &= 0 \end{aligned}$$

Упругие динамические  $F_{si}^{dyn}$ ,  $F_{ei}^{dyn}$  и демпфирующие силы  $F_{si}^{damp}$ ,  $F_{ei}^{damp}$  в зацеплениях колес редуктора также зависят от взаимного перемещения тел колес:

$$\begin{aligned} F_{si}^{dyn} &= (k_z(t)[r_{bs}\varphi_s + r_{bi}\varphi_i + e_s(t) + (y_s - y_i)\cos(\alpha + \gamma_i) + (x_s - x_i)\sin(\alpha + \gamma_i)]) \\ F_{ei}^{dyn} &= (k_e(t)[r_{be}\varphi_e + r_{bi}\varphi_i + e_i(t) + (y_e - y_i)\cos(\alpha + \gamma_i) - (x_e - x_i)\sin(\alpha + \gamma_i)]) \end{aligned}$$

$$F_{si}^{damp} = c_z[r_{bs}\dot{\varphi}_s + r_{bi}\dot{\varphi}_i + \dot{e}_s(t) + (\dot{y}_s - \dot{y}_i)\cos(\alpha + \gamma_i) + (\dot{x}_s - \dot{x}_i)\sin(\alpha + \gamma_i)]$$

$$F_{ei}^{damp} = c_z[r_{be}\dot{\varphi}_e + r_{bi}\dot{\varphi}_i + \dot{e}_e(t) + (\dot{y}_e - \dot{y}_i)\cos(\alpha + \gamma_i) - (\dot{x}_e - \dot{x}_i)\sin(\alpha + \gamma_i)]$$

где  $\varphi_s, \varphi_i, \varphi_e, x_s, x_i, x_e, y_s, y_i, y_e$  – угловые, горизонтальные и вертикальные перемещения солнечной шестерни,  $i$ -го сателлита и эпицикла соответственно;  $M_s(t), M_e(t)$  – внешние крутящие моменты, приложенные к солнцу и эпициклу соответственно;  $\gamma_i = 2\pi \cdot i/n$  – угловая координата положения оси сателлита;  $k_z(t), k_e(t)$  – периодические функция жёсткости зацеплений «солнце-сателлит» и «сателлит-эпицикл»;  $c_z, c_e$  – коэффициенты демпфирования зацеплений «солнце-сателлит» и «сателлит-эпицикл» (выбирается на основе результатов экспериментов);  $r_{bs}, r_{bi}, r_{be}$  – радиусы основных окружностей зубчатых колес;  $J_s, J_i, J_e, m_s, m_i, m_e$  – моменты инерции и массы тел зубчатых колес редуктора;  $k_{b(x,y)s}, k_{b(x,y)i}, k_{b(x,y)e}$  – жесткости опор зубчатых колес;  $e(t)$  – функция кинематической погрешности зацепления, задающая дополнительное перемещение профилей зубьев друг относительно друга. На практике отклонение окружного шага отличается для каждого зуба, поэтому данная функция изменяется с роторной частотой. В исследовании рассматривались варианты погрешности профиля через ошибки окружного шага по гармоническому закону с амплитудой, соответствующей степени точности изготовления колес, либо кинематическая погрешность принималась постоянной для каждого зуба, что допустимо при высказанном выше предположении малого влияния данного источника возбуждения для колес, изготовленных с высокой степенью точности (4-й и выше).

Жесткость опоры солнечной шестерни  $k_{bs}$  на несколько порядков ниже аналогичных жесткостей для сателлитов и венцовой шестерни, чьи оси установлены на подшипниковых опорах, для которых значение  $k_b$  выбирается из справочной литературы. Для компенсации неравномерности распределения нагрузок между зацеплениями сателлитов в высоконагруженных планетарных редукторах солнечная шестерня устанавливается на так называемой «плавающей подвеске», которая обычно представляет собой консольно закрепленное на шлицах рессоры зубчатое колесо. Однако параметры податливости плавающей подвески, используемой как основной способ снижения вибраций в планетарных редукторах, не могут быть рассчитаны без подробной динамической модели планетарного редуктора.

Жёсткость зацепления  $k_z(t, M)$  является функцией времени и нагрузки и зависит в первую очередь от числа находящихся в зацеплении в данный момент времени зубьев. Основываясь на результатах экспериментов [7], подтверждающих определяющее влияние на динамическое поведение передачи параметров зацепления через параметрическое возбуждение переменной функции жесткости  $k_z(t, M)$ , проводится подробное моделирование процесса зацепления колес с помощью МКЭ [12], учитывающие влияние геометрии зубьев на характер кинематической погрешности зацепления (рис. 3).

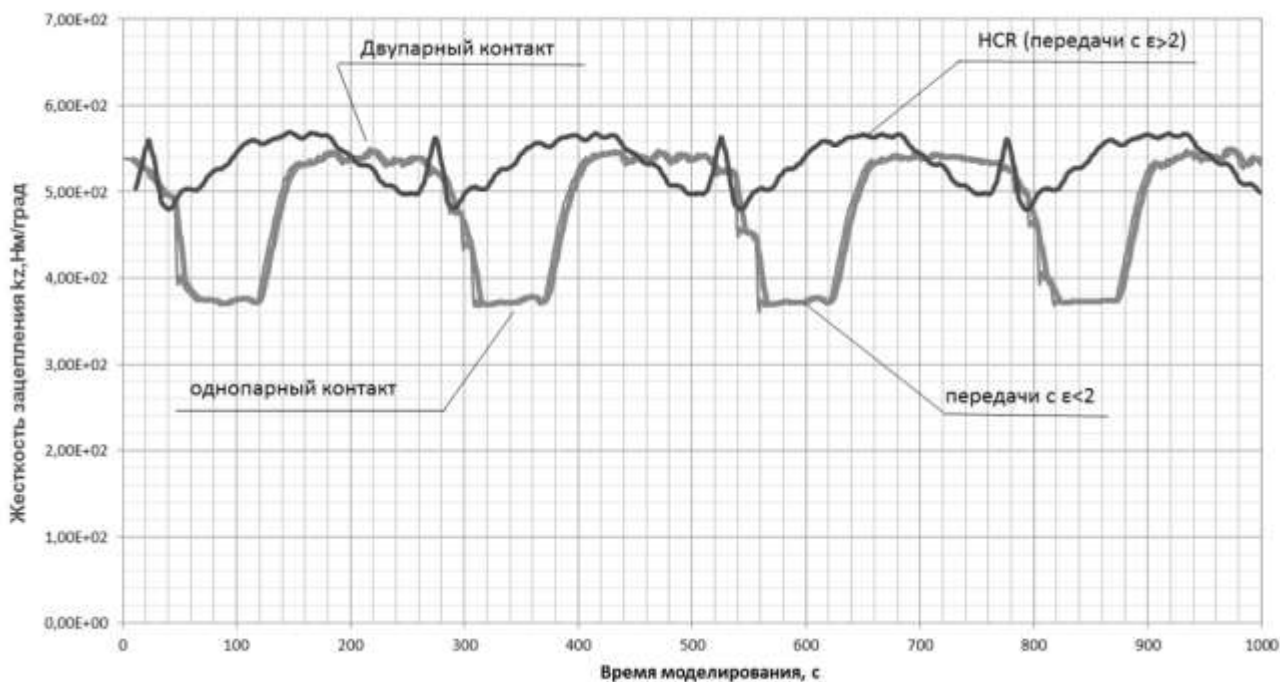


Рисунок 3 - Жёсткость зацепления для передач с  $\epsilon < 2$  и  $\epsilon > 2$ ? полученная расчётом в МКЭ.

На рис. 3 представлены результаты моделирования с помощью МКЭ жёсткости зацепления зубчатой пары с коэффициентом перекрытия  $\epsilon < 2$  и высоким коэффициентом перекрытия  $\epsilon > 2$  с аналогичными параметрами профиля зубьев. Полученная с помощью МКЭ периодическая функция жёсткости  $k_z(t)$  может быть использована при решении системы уравнений как аппроксимация через разложение функции в ряд Фурье (2):

$$k_z(t) = k_0 + \sum_{n=1}^N k_n \cdot \cos(n\omega_z t + \gamma_n) \quad (2)$$

где  $\omega_z$  – частота пересопряжения зубьев (количество входов в зацепление зубьев за единицу времени);  $\gamma_n$  – фазовый угол  $n$ -ной гармоники;  $k_0$  – средняя постоянная жесткость зацепления.

Экспериментальные исследования динамики зубчатых передач показывают, что на резонансных режимах работы зубчатой передачи динамические нагрузки возрастают в 2÷4 раз, а работа передачи может сопровождаться размыканием зубьев [2, 7]. Возможность размыкания зубьев в модели учитывается условием потери упругой и демпфирующей связей в зацеплении в момент отрицательного значения разности взаимных перемещений зубьев до выборки бокового зазора  $j_{n \min}$ , после чего восстанавливается контакт передачи между нерабочими боковыми поверхностями зубьев [12]:

$$F_{\text{дин}}(t, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} k_z(t) \cdot (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2}) + c_z \cdot (\dot{\varphi}_1 \cdot r_{b1} + \dot{\varphi}_2 \cdot r_{b2}) & \text{если } (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2}) > 0 \\ 0 & \text{если } (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2}) \leq 0 \\ & \text{и } |(\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2})| \leq j_{n \min} \\ k_z(t) \cdot (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2} - j_{n \min}) + c_z \cdot (\dot{\varphi}_1 \cdot r_{b1} + \dot{\varphi}_2 \cdot r_{b2}) & \text{если } (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2}) \leq 0 \\ & \text{и } |(\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2})| \geq j_{n \min} \end{cases} \quad (3)$$

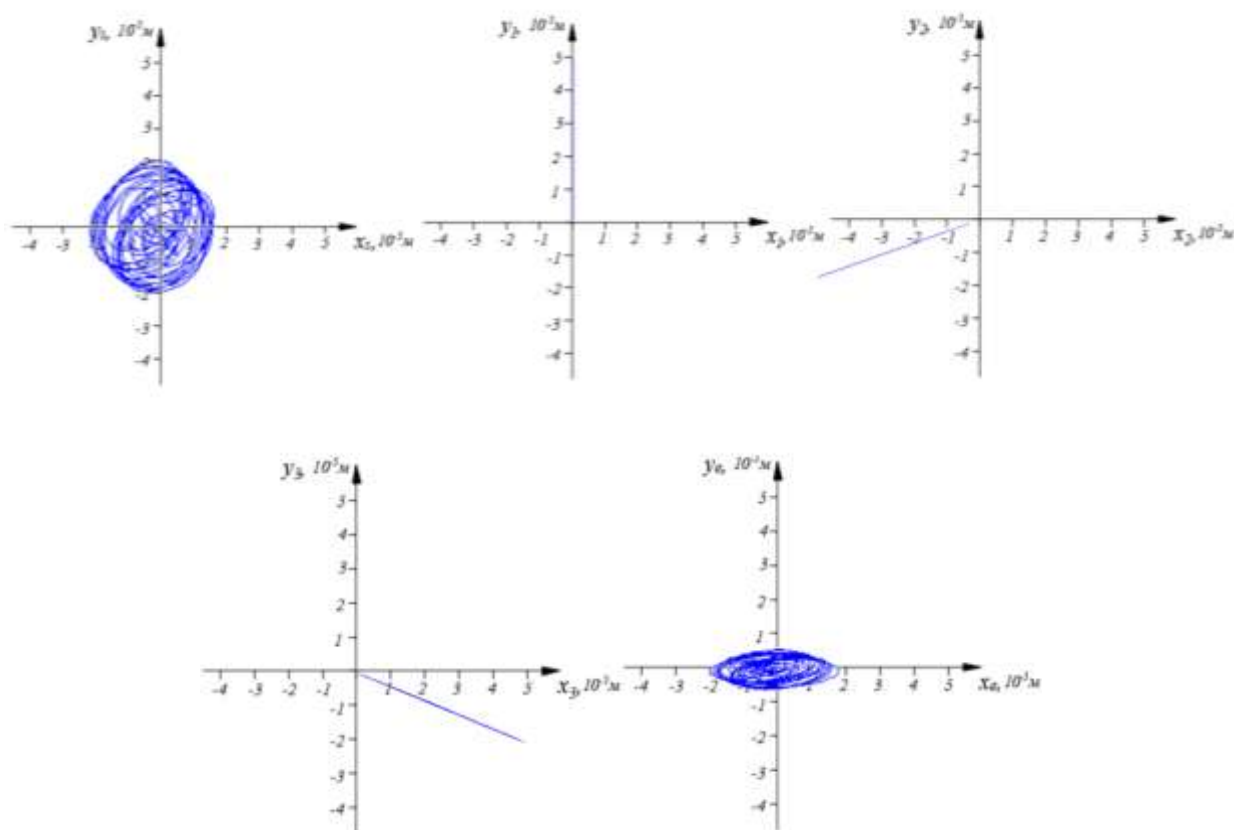
Таким образом, задача динамики зубчатого зацепления сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых связаны условиями потери контакта зубьев (3).

### 3 Результаты моделирования

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с ограничениями использован пакет Matlab Simulink с построением математической модели планетарного редуктора в виде блочной схемы и численным решением системы уравнений (1) на основе одношаговых явных методов Рунге-Кутты 4-го и 5-го порядка.

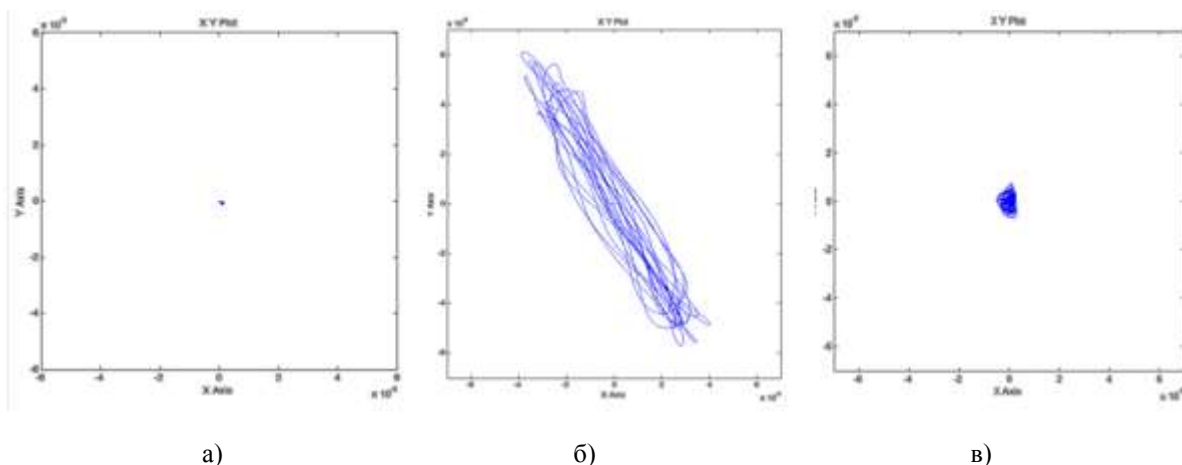
Влияние параметров геометрии зубчатых колес, нелинейной жесткости зацепления и условий потери контакта зубьев на уровни динамических нагрузок подробно рассмотрено в работах [12, 13]. Результаты моделирования динамической системы планетарного редуктора анализируются по траекториям центров масс зубчатых колес редуктора. На рис. 4 показаны траектории колебаний центров масс колес планетарного редуктора с тремя сателлитами и плавающей опорой солнечной шестерни ( $k_{bs} = 5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ ). Из схемы видно, что сателлитные шестерни совершают колебательные движения вдоль линии суммарного действия сил в зацеплениях с солнечной шестерней и эпициклом. Вид траектории солнечной шестерни (рис. 4) обусловлен сдвигом фаз зацеплений с сателлитами, в результате которого жесткости связей солнца, его опоры и сателлитов распределяются несимметрично относительно центра системы планетарного редуктора.

В реальных конструкциях планетарных редукторов смещение положения солнечной шестерни также вызывается несогласованностью ошибок шагов и погрешностей профилей сателлитов, т.е. происходит выравнивание статической нагрузки в зацеплении за счет большей податливости опоры солнечной шестерни. В данной модели рассогласованность ошибок шагов и погрешностей зубьев сателлитов не рассматривалась для сохранения наглядности влияния конструктивных параметров зацепления на динамическое поведение системы. На рис. 5 показаны результаты моделирования для разных значений жесткости опоры солнечной шестерни и сочетания фаз зацеплений с сателлитами.



**Рисунок 4** - Траектории колебаний центров масс колес (солнечного, трех сателлитов и эпицикла) планетарного редуктора при частоте эпицикла 500 об/мин и плавающем подвесе солнечной шестерни.

Совпадение фаз зацеплений «солнце-сателлит», достигаемое кратностью количества зубьев солнечной шестерни числу сателлитов  $n$ , обеспечивает минимальное смещение центра масс солнечной шестерни даже при ее плавающей подвеске и несогласованности фаз зацеплений «сателлит-эпицикл» (рис. 5, а). На рис. 5,б показана траектория солнечной шестерни на плавающей опоре при случайном сдвиге фаз в зацеплениях с сателлитами, в результате которого амплитуда колебаний его центра масс значительно возрастает, а траектория имеет несимметричный характер. На рис. 5,в показана траектория солнечной шестерни при ее установке на подшипниковых опорах, чья жесткость может превышать жесткость зацеплений. Амплитуда колебаний центра масс уменьшается в сравнении с плавающей опорой, однако при этом возрастают динамические нагрузки в зацеплениях, особенно при больших ошибках шагов и погрешностей зацеплений.

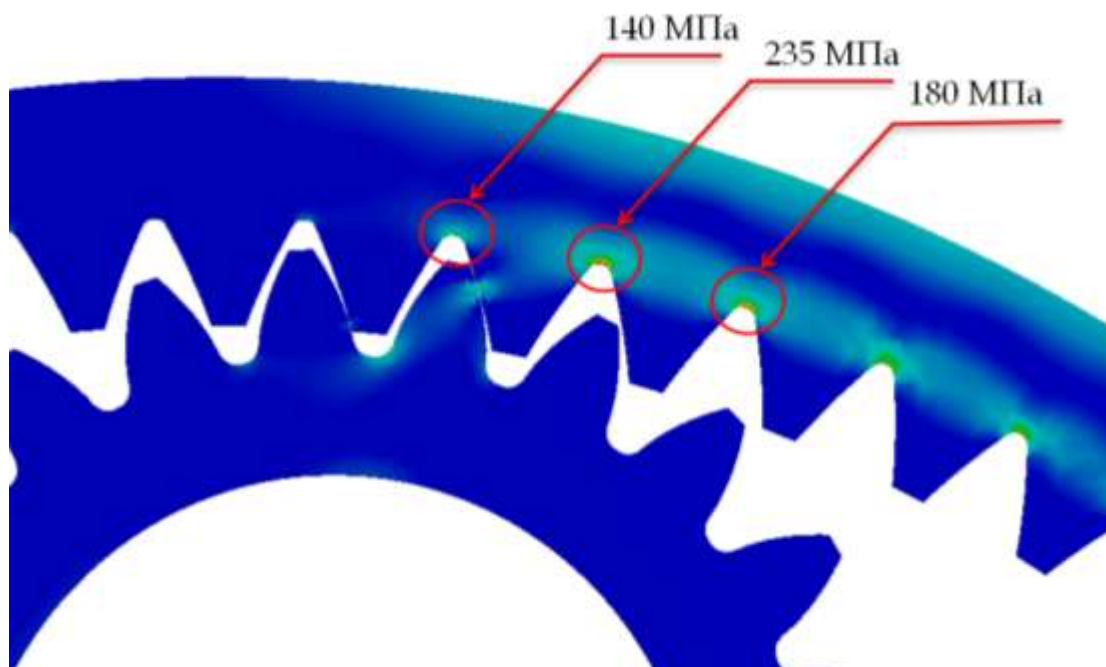


**Рисунок 5** – Траектории колебаний центра масс солнечной шестерни: а) – синфазное зацепление всех сателлитов и солнечной шестерни на «плавающей опоре»; б) случайный сдвиг фаз зацеплений сателлитов и солнечной шестерни на «плавающей опоре»; в) случайный сдвиг фаз зацеплений сателлитов и солнечной шестерни, установленной на подшипниковых опорах.

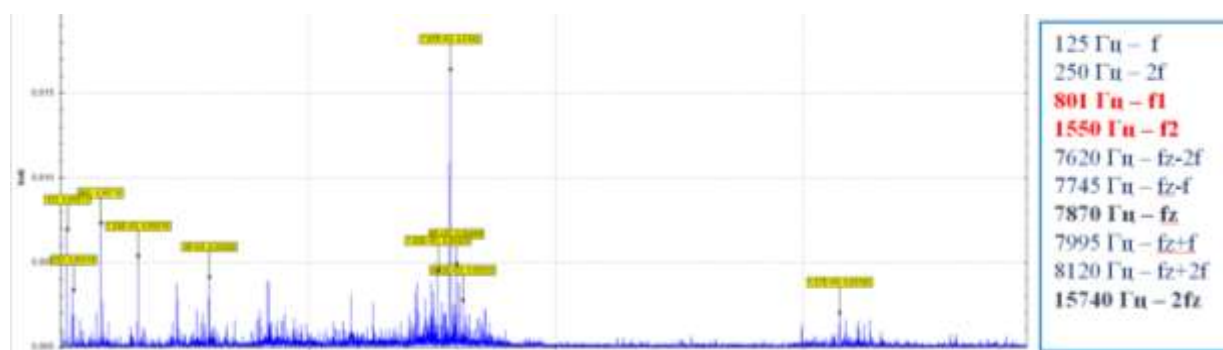
Для анализа напряженного состояния деталей планетарного редуктора при действии динамических нагрузок, а также оценки степени влияния податливости венцовой шестерни проведено динамическое моделирование планетарного ряда с помощью конечно-элементного программного комплекса в модуле динамического анализа, использующем метод Ньюмарка. Рассматривалась трехмерная модель планетарного ряда с тремя сателлитами, установленными на неподвижных осях. Конечно-элементная модель построена с использованием объёмных 20-узловых элементов и контактных элементов [13] с размером грани 0,8 мм. Система приводится в движение с плавным нагружением крутящим моментом, приложенным к солнечной шестерне, и плавным увеличением ее частоты вращения для устранения влияния динамических факторов при разгоне из положения покоя. Временной шаг интегрирования выбирался в диапазоне  $1 \times 10^{-5} \div 5 \times 10^{-5}$  с.

Моделирование с помощью МКЭ в динамической постановке неявным методом (метод Ньюмарка) показало, что изгибные колебания податливого кольца венцовой шестерни могут вызывать высокие значения растягивающих напряжений во впадине зубьев эпицикла (рис.6). Для разных величин толщины обода венцовой шестерни по результатам моделирования получена картина напряженно-деформированного состояния (НДС), в которой максимальные напряжения во впадине зубьев возникают не в процессе зацепления с зубьями сателлитов, а после выхода из зацепления в положении, соответствующем максимальному прогибу кольца венцовой шестерни (рис. 6). При этом в выходном сигнале кинематической погрешности планетарного ряда появляется гармоника собственных колебаний тела венцовой шестерни. Данный результат был проверен на сигналах вибраций корпуса экспериментального редуктора привода вентилятора ТРДД, испытанного в ЦИАМ им. П.И. Баранова. На рис. 7 показан спектр вибраций корпуса редуктора, в котором

помимо гармоник, кратных роторной и зубцовой частотам, присутствует частоты 801 Гц и 1550 Гц, не зависящие от роторной частоты и являющиеся проявлением собственных колебаний венцовой шестерни по 1-й и 2-й изгибным формам.



**Рис. 6.** НДС венцовой шестерни планетарного редуктора при возбуждении колебаний нагрузками в зацеплении.



**Рис. 7.** Спектр вибраций экспериментального редуктора при испытаниях в ЦИАМ.

Недостатком способа моделирования планетарного редуктора с помощью МКЭ в динамической постановке для большого числа контактных пар (не менее 200) являются значительные временные затраты и высокие требования к вычислительной технике. Данный способ эффективен для верификации динамических моделей и оценки влияния собст-

венных колебания тел колес на динамические нагрузки в зацеплениях зубьев планетарного редуктора.

#### **4 Заключение**

С помощью разработанной гибридной динамической модели планетарного редуктора исследовано влияние плавания солнечной шестерни и соотношения фаз зацеплений сателлитов на динамические нагрузки в редукторе. Сочетание аналитических методов и метода конечных элементов позволяет получать точные оценки динамических нагрузок в зацеплениях при невысоких временных затратах, достигаемые моделированием процесса зацепления колес в МКЭ и учета условия возможной потери контакта зубьев. Результаты моделирования показывают возможность снижения динамических нагрузок в зацеплениях планетарных редукторов за счет подбора синфазности зацеплений сателлитов с центральными колесами. Моделирование зацепления колес планетарного редуктора с помощью МКЭ в динамической постановке показало, что изгибные колебания податливого кольца венцовой шестерни могут вызывать высокие значения растягивающих напряжений во впадине зубьев эпицикла. Данный результат также подтверждается результатами экспериментальных исследований планетарного редуктора ТРДД в ЦИАМ им. П.И. Баранова.

#### **Список литературы**

1. Coupling system for a star gear train in a gas turbine engine: US patent 8585538 B2 / W. G. Sheridan, M. E. McClune, A. Pescosolido; United Technologies Corporation. 10 Nov 2013.
2. Григорьев В.В., Еланский А.В., Попуга А.И. Перспективные схемы авиационных двигателей с высокой топливной эффективностью // Авиационно-космическая техника и технология. 2013. № 9. С. 231-236. Режим доступа: <http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit> 2013 9 39.
3. ISO 6336-6:2006/Cor 1:2007. Calculation of load capacity of spur and helical gears. Pt. 6: Calculation of service life under variable load. 2006.
4. DIN 3990-2-1987. Calculation of load capacity cylindrical gears. Calculation of pitting resistance. 01.12.1987.
5. ГОСТ 21354-87. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность. М.: Изд-во стандартов, 1989. 129 с.
6. Айрапетов Э.Л., Генкин М.Д. Динамика планетарных механизмов. М.: Наука, 1980. 256 с.
7. Айрапетов Э.Л., Апархов В.И., Генкин М.Д., Косарев О.И.. Возмущающие силы в зубчатом зацеплении // Всесоюзн. науч.-техн. совещания «Повышение качества зубча-

- тых передач конструктивными и технологическими методами». Тезисы докладов. Ч.2. М., 1976. С. 253-256.
8. Kahraman A., Vijayakar S. Effect of internal gear flexibility on the quasi-static behavior of a planetary gear set // Transactions of ASME. Journal of Mechanical Design. 2001. Vol. 123. № 3. P. 408–415. DOI: [10.1115/1.1371477](https://doi.org/10.1115/1.1371477)
  9. Kahraman A., Kharazi A.A., Umrani M. A deformable body dynamic analysis of planetary gears with thin rims // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol.262. № 3. P. 752–768. DOI: [10.1016/S0022-460X\(03\)00122-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00122-6)
  10. Parker R.G., Vijayakar S.M., Imajo T. Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons // Journal of Sound and Vibration. 2000. Vol. 237. № 3. P. 435-455. DOI: [10.1006/jsvi.2000.3067](https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3067)
  11. August R., Kasuba R., Frater J.L. Dynamics of planetary gear trains. Wash.: NASA, 1984.
  12. Калинин Д.В., Темис Ю.М. Моделирование нелинейных колебаний цилиндрических зубчатых передач авиационных приводов // Вестник Самарского гос. аэрокосмического ун-та им. акад. С.П. Королева. 2015. Т. 14. № 3. Ч.1. С.193-202.
  13. Калинин Д.В. Динамический анализ зубчатой передачи // Изв. МГТУ МАМИ. 2015. Т.4. № 3(25). С.84-93.
  14. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.

## **Non-Linear Vibration of Planetary Set with Flexible Supports of Sun and Ring Gears**

**D.V. Kalinin<sup>1,\*</sup>**

[\\*kalinin@ciam.ru](mailto:kalinin@ciam.ru)

<sup>1</sup>Central Institute of Aviation Motors n. a. P.I. Baranov,  
Moscow, Russia

---

**Keywords:** gears, planetary set, dynamic model, parametric vibration, finite elements analysis

---

The paper studies a dynamic behavior of the planetary gear units of the turbojet fan drive using a developed hybrid dynamic model of the planetary gear. These studies are relevant owing to advantages of using a fan drive gear in advanced turbofan engines with high bypass ratio, and because there is a need to improve computational methods of estimating dynamic loads in the gears of aircraft engines. Existing analytical dynamic models of planetary gear units commonly use a simplified model of a gear mesh without taking into account the nature of the parametric gear vibration due to a periodic function of mesh stiffness. Such an approach makes it impossible to consider the impact of structural factors to reduce dynamic loads in the gear unit. Dynamic models based on the finite element analysis are either inefficient in their using as a tool to choose the optimal design parameters of the gear unit because of much time-consuming calculations. The paper proposes a hybrid dynamic model of the planetary gear unit in which a system with lumped parameters is used. The bodies of gears are connected by the elastically damping springs whose characteristics are modeled using the finite element method in quasi-static formulation. This method allows an accurate calculation of mesh stiffness, transmission error, and bending and contact stresses for one cycle of gear meshing. The model takes into account the condition of a possible loss of teeth contact, which causes a system non-linearity in the area of parametric resonance. The model also takes into consideration the support bearing stiffness of gears and friction in mesh. To solve a system of nonlinear differential equations with constraints a Matlab Simulink package with the numerical solution of equations based on the one-step explicit Runge-Kutta of the 4-th and 5-th order is used. The developed model allowed us to analyze how the sun gear and the relationship of phases of satellite mesh effect on dynamic loads in the gear unit. The modeling results have shown a possibility to reduce dynamic loads in the meshes of planetary gear units by selection of the satellite meshes in-phase with the sun wheels. To conduct simulation of the planetary gear unit in dynamic formulation was used a finite element method. The article has shown that bending vibrations of a pliable ring gear can cause high values of tensile stresses in the teeth space of the epicycle. The results of experimental studies of the planetary

gear turbofan, conducted in the Central Institute of Aviation Motors n. a. P.I. Baranov, proved this result.

## References

1. Coupling system for a star gear train in a gas turbine engine: US patent 8585538 B2 / W. G. Sheridan, M. E. McClune, A. Pescosolido; United Technologies Corporation. 10 Nov 2013.
2. Grigoriev V.V., Elanskij A.V., Popuga A.I. Perspective schemes of aircraft engines with high fuel efficiency. *Aviatsionno-kosmicheskaja tekhnika i tekhnologija* [Aerospace engineering and technology], 2013, no. 9, pp. 231-236. Available at: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit\\_2013\\_9\\_39](http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2013_9_39).
3. ISO 6336-6:2006 / Cor 1:2007. Calculation of load capacity of spur and helical gears. Pt. 6: Calculation of service life under variable load. 2006.
4. DIN 3990-2-1987. Calculation of load capacity cylindrical gears. Calculation of pitting resistance. 01.12.1987.
5. *GOST 21354-87. Peredachi zubchatye tsilindricheskie evol'ventnye vneshnego zatsepleniia. Raschet na prochnost'* [The cylindrical evolvent gears of external gearing strength calculation]. Moscow: Standard Publ., 1980. 129 p.
6. Ajrapetov E.L., Genkin M.D. *Dinamika planetarnykh mekhanizmov* [Dynamics of planetary mechanisms]. Moscow: Nauka Publ., 1980. 256 p.
7. Ajrapetov E. L., Aparkhov V.I., Genkin M.D., Kosarev O.I. Vozmuschayushchie sily v zubchatom zatseplenii [Disturbing forces in the gear teeth]. *Vsesoyuznoe nauchno-tekhnicheskoe soveshanie «Povyshenie kachestva zubchatykh peredach konstruktivnymi i tekhnologicheskimi metodami»*. *Tezisy dokladov* [All-Union scientific and technical meeting «Improving the quality of gears by constructive and technological methods»] Moscow, 1976, pt. 2, pp. 253-256.
8. Kahraman A., Vijayakar S. Effect of internal gear flexibility on the quasi-static behavior of a planetary gear set. *Transactions of ASME. Journal of Mechanical Design*, vol. 123, № 3, pp. 408–415. DOI: [10.1115/1.1371477](https://doi.org/10.1115/1.1371477)
9. Kahraman A., Kharazi A.A., Umrani M. A deformable body dynamic analysis of planetary gears with thin rims. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 262, № 3, pp. 752–768. DOI: [10.1016/S0022-460X\(03\)00122-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00122-6)
10. Parker R.G., Vijayakar S.M., Imajo T. Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol. 237, № 3, pp. 435-455. DOI: [10.1006/jsvi.2000.3067](https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3067)
11. August R., Kasuba R., Frater J.L. Dynamics of planetary gear trains. Wash.: NASA, 1984.
12. Kalinin D.V., Temis Yu.M. Simulation of nonlinear vibrations of cylindrical gears, aircraft actuators. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. S.P. Koroleva* [Herald of the Korolev Samara state aerospace university], 2015, vol.14, № 3, pt.1, pp.193-202.

13. Kalinin D.V. Dynamic analysis of gear pair. *Izvestiia MGTU MAMI* [News of the Moscow State University MAMI], 2015, vol. 4, no. 3(25), pp. 84-93.
14. Basov K.A. *ANSYS: spravochnik pol'zovatelia* [ANSYS: User's manual]. Moscow: DMK Press, 2005. 640 p.