

УДК 62-752+62-755

Влияние автобалансира на критические скорости вращения двухопорного ротора

Горбенко А. Н.^{1,*}

*gan0941@yandex.ru

¹Керченский государственный морской технологический университет,
Керчь, Россия

В работе выполнен анализ влияния массы автобалансира на критические скорости вращения ротора, совершающего пространственное движение. Задача рассматривается с учетом того, что массы автобалансира и дисбаланса могут быть сопоставимы с массой ротора. Показано, что установка автобалансира на ротор приводит к качественным и количественным изменениям спектра критических скоростей. Составной ротор приобретает свойство инерционной анизотропии и происходит раздваивание его критических скоростей. Получена точная формула для критических скоростей при произвольном расположении ротора на опорах, а также приближенные формулы для частных случаев. Выполнен анализ влияния параметров ротора и автобалансира на количество и значения критических скоростей. Предложен критерий чувствительности ротора к массе автобалансира.

Ключевые слова: ротор, автобалансир, критические скорости, спектр, уравнения движения, анизотропия

Введение

Среди способов снижения вибрации роторных машин находят применение автобалансирующие устройства (АБУ) пассивного типа. Они способны автоматически компенсировать дисбаланс ротора и снижать уровень вибрации роторной машины при её работе.

Традиционно в существующих работах по теории автобалансировки (см. например [1-11] и др.) в явном или неявном виде используется допущение о малости масс компенсирующих грузов (КГ) и дисбалансной массы (ДМ) по сравнению с массой ротора, что позволяет упростить математическую модель и использовать для ее приближенного решения один из методов малого параметра. Высокая сложность уравнений движения механической системы (МС), особенно в случае пространственного движения ротора с АБУ, обуславливает желание использовать данное допущение для упрощения анализа. Такой подход, однако, может оказаться неприменимым в случае уравнивания роторов, в которых массы дисбаланса и АБУ сопоставимы с массой ротора.

Необходимость учета конечной массы грузов автобалансира и дисбаланса ротора показана в работе [12], где получены уточненные дифференциальные уравнения пространственного движения системы. На основе этого в работе [13] был выполнен анализ и показано, что в результате установки автобалансира на ротор имеет место качественное изменение его инерционных характеристик, прежде всего в его угловых колебаниях. А именно, ротор с АБУ приобретает свойство инерционной анизотропии, причем в случае применения многомассового автобалансира значения суммарных моментов инерции носят интервальный характер. При этом инерционная анизотропия ротора с АБУ имеет место даже в режиме движения МС при абсолютно идеальной автобалансировке, при котором КГ АБУ точно заняли автобалансирующие положения и неподвижны относительно ротора.

Указанные факторы приводят к количественному и качественному изменению спектра критических частот вращения ротора. В то же время известно, что количество и расположение областей устойчивости автобалансировки роторной машины тесно связано с критическими скоростями вращения [1-6]. Изучение литературных источников показало, что задача анализа изменения количества и значений критических частот вращения, вследствие установки АБУ на ротор, не исследовалась. Поэтому анализ динамики ротора с АБУ, совершающего пространственное движение, с учетом влияния конечной массы грузов автобалансира является актуальной задачей.

Целью работы является анализ влияния массы автобалансира на критические скорости вращения ротора, совершающего пространственное движение. Настоящая работа является продолжением работ [12, 13] и ориентирована на дальнейшее исследование динамики и устойчивости механической системы.

1. Физическая модель и уравнения движения механической системы

Механическая система состоит из ротора и прикрепленного к нему автобалансирующего устройства пассивного типа (рис. 1). Вращающийся ротор установлен на двух упруго-вязких изотропных опорах и имеет свободу поперечных и угловых движений (рис. 2а). Ротор моделируется осесимметричным телом массой M_r с центром масс в точке G и вращается с угловой скоростью ω . Статический дисбаланс s моделируется точечной дисбалансной массой (ДМ) m_0 , прикрепленной к ротору на расстоянии R_0 от его продольной оси в плоскости $z=z_A$.

Автобаланси́р расположен в поперечном сечении A (плоскость $z=z_A$) и представляет собой набор компенсирующих грузов (шары, маятники, ролики или т.п.), которые свободно могут двигаться по окружности радиусом R_j . КГ моделируются материальными точками массой m_j каждая. Количество грузов равно n . При движении грузов относительно АБУ (ротора) на них действует сила вязкого сопротивления с коэффициентом h_A ($\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}$).

Компенсирующие грузы АБУ совершают сложное пространственное движение (рис.2б). Все КГ АБУ полагаем одинаковыми, т.е. $m_j = m$, $R_j = R$, $j = 1, \dots, n$. Для всех точечных масс используется единая нумерация: $j = 1, \dots, n$ – для КГ АБУ; $j = 0$ – для ДМ.

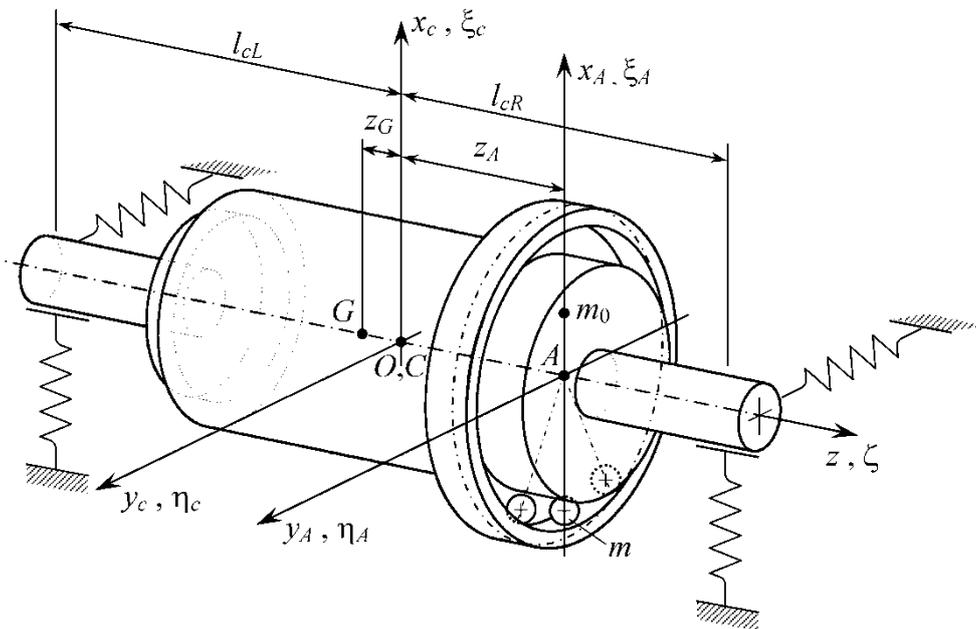


Рис. 1. Механическая система «ротор – многомассовый автобаланси́р»

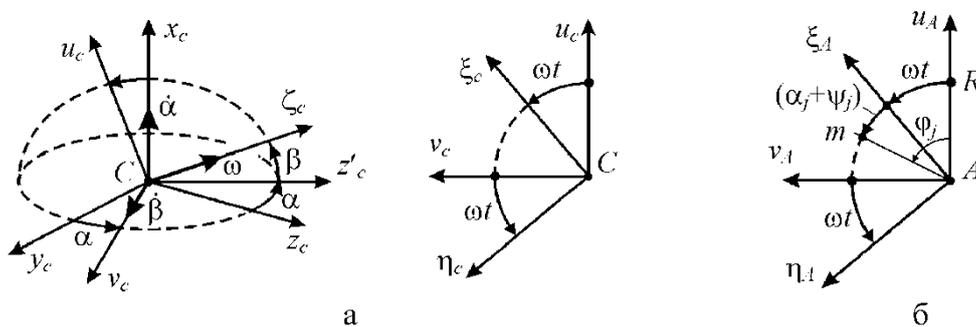


Рис. 2. Кинематика пространственного движения ротора (а) и компенсирующих грузов автобаланси́ра (б)

Общий центр масс системы «ротор-АБУ» при основном (автобалансирующем) режиме движения МС находится в точке C на оси вращения ротора. Поперечные колебания ротора описываются смещениями точки C .

Геометрические и физические параметры механической системы:

A_r , C_r – экваториальный и полярный моменты инерции ротора относительно его собственных осей, кг·м²;

x_c , y_c , x_A , y_A – текущие координаты точек C и A на оси ротора в неподвижных осях $Oxyz$, м;

α , β – текущие угловые отклонения оси вращения ротора;

c_L, c_R, h_L, h_R – коэффициенты жесткости (Н/м) и вязкого демпфирования ($\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}$) левой и правой опор;

z_G, z_A – расстояния от общего центра масс МС (точка C) до центра масс ротора G и до точки A крепления автобалансира соответственно (с учетом знака), связанные соотношением $M_r z_G + (m_0 + nm) z_A = 0$;

$l = l_{cL} + l_{cR}$ – межопорное расстояние ротора, м;

l_{cL}, l_{cR} – расстояния от общего центра масс системы (точки C) до левой и правой опор, которые считаются положительными, если диск расположен между опорами (при консольном расположении диска ротора величина l_{cR} считается отрицательной), м;

$\varphi_0 = \omega t + \alpha_0$ – абсолютная угловая координата ДМ; при этом $\psi_0 = 0$;

$\varphi_j = \omega t + \alpha_j + \psi_j, j = 1, \dots, n$ – абсолютная текущая угловая координата j -го КГ;

$\alpha_j = \text{const}, j = 1, \dots, n$ – средняя постоянная угловая координата j -го КГ относительно ротора в плоскости АБУ;

$\psi_j, j = 1, \dots, n$ – текущая угловая координата j -го КГ относительно α_j в плоскости АБУ.

В отличие от существующих моделей рассматриваемой МС здесь учитывается, что массы КГ m и дисбаланса m_0 являются немалыми величинами того же порядка, что масса ротора M_r .

Движение МС рассматривается как в неподвижной системе координатных осей $Cx_c y_c$, так и в системе координат $C\xi\eta$, вращающихся с угловой скоростью ω . Последний вариант необходим для приведения уравнений движения к автономному виду, в котором исключены переменные коэффициенты, периодически зависящие от времени t .

Полное описание физической модели МС, кинематики пространственного движения компенсирующих грузов АБУ и ротора, а также особенности массо-инерционных свойств ротора с АБУ приведены в работах [12, 13].

Обобщенные координаты (ОК) МС:

- в неподвижных осях:

$$\{z_c\} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix}, \{Y\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}, \{s_w\} = \begin{Bmatrix} s_u \\ s_v \end{Bmatrix};$$

- во вращающихся осях:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} \xi_c \\ \eta_c \end{Bmatrix}, \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix}, \{s\} = \begin{Bmatrix} s_\xi \\ s_\eta \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

связанные между собой через матрицу поворота $[T(t)]$:

$$\{z_c\} = [T]\{w\}; \{Y\} = [T]\{\chi\}; \{s_w\} = [T]\{s\},$$

где

$$\{s_w\} = \begin{Bmatrix} s_u \\ s_v \end{Bmatrix} = m_0 R_0 \begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \alpha_0) \\ \sin(\omega t + \alpha_0) \end{Bmatrix} + mR \sum_{j=1}^n \begin{Bmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \end{Bmatrix};$$

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} s_\xi \\ s_\eta \end{Bmatrix} = m_0 R_0 \begin{Bmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{Bmatrix} + mR \sum_{j=1}^n \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_j + \psi_j) \\ \sin(\alpha_j + \psi_j) \end{Bmatrix}; [T] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix};$$

s_u, s_v и s_ξ, s_η – проекции текущего суммарного дисбаланса, образуемого всеми КГ АБУ и ДМ, на поворотно-подвижные оси Auv и на собственные (вращающиеся) оси ротора $A\xi\eta$ соответственно. Обобщенные координаты s_u, s_v и s_ξ, s_η геометрически описывают текущее положение общего центра масс системы материальных точек «КГ АБУ - ДМ».

Механическая система «ротор – многомассовый АБУ» имеет шесть степеней свободы. Приведенный набор ОК системы является достаточным для изучения динамики и устойчивости МС и не зависит от числа n грузов автобалансира, см. [2., 3, 12].

Рассматриваются малые колебания ОК МС, которые совершаются при основном (автобалансирующем) движении системы, когда грузы АБУ занимают угловые положения α_j , компенсирующие дисбаланс ротора. При этом используем матричную форму записи как наиболее удобную форму для систем с большим количеством степеней свободы.

Движение рассматриваемой МС во вращающихся координатах описывается следующей системой дифференциальных уравнений (вывод уравнений см. в работах [12, 13]):

$$M_s \{\ddot{w}\} + [H_w] \{\dot{w}\} + [K_w] \{w\} + h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{\chi}\} + [K_{w\chi}] \{\chi\} + \{\dot{s}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{s}\} - \omega^2 \{s\} = \{0\}; \quad (2)$$

$$[I_c] \{\ddot{\chi}\} + [H_\chi] \{\dot{\chi}\} + [K_\chi] \{\chi\} - h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{w}\} - [K_{w\chi}] \{w\} + z_A [E_c] (\{\dot{s}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{s}\} - \omega^2 \{s\}) = \{0\};$$

$$\{\ddot{s}\} + h_s \{\dot{s}\} + \frac{1}{2} nm [d_A] \left(\{\ddot{w}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{w}\} - \omega^2 \{w\} - z_A [E_c] (\{\ddot{\chi}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{\chi}\} - \omega^2 \{\chi\}) \right) = \{0\}, \quad (3)$$

где

$$[H_w] = h_x [E] + 2\omega M_s [E_c]; \quad [H_\chi] = h_\alpha [E] + \omega(2A_\Sigma - C_\Sigma) [E_c];$$

$$[K_w] = (c_x - M_s \omega^2) [E] + \omega h_x [E_c]; \quad [K_{w\chi}] = -\omega h_{y\alpha} [E] + c_{y\alpha} [E_c];$$

$$[K_\chi] = c_\alpha [E] - \omega^2 (A_\Sigma - C_\Sigma) [E] + \Delta A \omega^2 [E_A] + \omega h_\alpha [E_c];$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; [E_c] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; [E_A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; (\cdot) \equiv d/dt;$$

$$c_x = c_y = c_L + c_R; \quad c_\alpha = c_\beta = c_L l_{cL}^2 + c_R l_{cR}^2; \quad c_{y\alpha} = c_{x\beta} = c_L l_{cL} - c_R l_{cR};$$

$$h_x = h_y = h_L + h_R; \quad h_\alpha = h_\beta = h_L l_{cL}^2 + h_R l_{cR}^2; \quad h_{y\alpha} = h_{x\beta} = h_L l_{cL} - h_R l_{cR}; \quad h_s = \frac{h_A}{m}; \quad (4)$$

$$M_s = M_r + m_0 + nm;$$

$$[d_{A0}] = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; [d_A] = \begin{bmatrix} 1 - D_A & 0 \\ 0 & 1 + D_A \end{bmatrix};$$

$$D_A = \sqrt{D_c^2 + D_s^2}; \quad D_c = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j; \quad D_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j; \quad 0 \leq D_A \leq 1;$$

$c_x, c_\alpha, c_{y\alpha}$ – коэффициенты жесткости, приведенные к ОК ротора;

$h_x, h_\alpha, h_{y\alpha}$ – коэффициенты вязкого демпфирования, приведенные к ОК ротора;

M_s – суммарная масса ротора с АБУ;

h_s – приведенный коэффициент вязкого сопротивления движению КГ в АБУ;

$[d_{A0}]$, $[d_A]$ – геометрические матрицы, характеризующие расположение ДМ и КГ АБУ относительно ротора соответственно;

D_A – безразмерный геометрический параметр, обобщенно характеризующий расположение грузов в АБУ относительно ротора при идеальной автобалансировке; при $n \geq 2$ параметр D_A является интервальной величиной.

Уравнения (2) описывают поперечные и угловые колебания вращающегося ротора, а уравнения (3) описывают движение многомассового автобалансира. Все матрицы, входящие в уравнения движения имеют размерность 2,2.

В результате установки автобалансира на ротор, совершающий пространственное движение, механическая система «ротор – ДМ – КГ АБУ» (составной ротор) приобретает качественно новые массо-инерционные свойства, что впервые было установлено в работе [13]. При этом учитывается то, что массы грузов автобалансира и ДМ в общем случае сопоставимы с массой ротора.

Дадим необходимые пояснения к инерционным параметрам и матрицам угловых колебаний составного ротора, входящим в уравнения движения (2), (3).

Суммарный полярный момент инерции C_Σ и суммарный тензор инерции $[I_C]$ (относительно собственных осей) ротора с АБУ определяются выражениями [13]:

$$C_\Sigma = C_r + A_{m0} + A_m; \quad [I_C] = \begin{bmatrix} A_{C1} & 0 \\ 0 & A_{C2} \end{bmatrix} = A_s[E] + [I_A^{(AB)}] = A_\Sigma[E] + \Delta A[E_A], \quad (5)$$

где

$$A_{m0} = m_0 R_0^2; \quad A_m = nm R^2; \quad A_s = A_r + M_r z_G^2 + (m_0 + nm) z_A^2;$$

$$A_{C1} = I_{\xi_c} = A_s + \frac{1}{2} A_m (1 - D_A); \quad A_{C2} = I_{\eta_c} = A_s + A_{m0} + \frac{1}{2} A_m (1 + D_A); \quad A_{C1} \leq A_{C2};$$

$$[I_A^{(AB)}] = \begin{bmatrix} A_{A1} & 0 \\ 0 & A_{A2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A_{m0} [d_{A0}] + \frac{1}{2} A_m [d_A];$$

$$A_\Sigma = \frac{1}{2} (A_{C1} + A_{C2}) = A_s + \frac{1}{2} A_{m0} + \frac{1}{2} A_m;$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} (A_{C2} - A_{C1}) = \frac{1}{2} A_{m0} + \frac{1}{2} A_m D_A; \quad A_{C1} = A_\Sigma - \Delta A; \quad A_{C2} = A_\Sigma + \Delta A;$$

$$z_A = \frac{M_r}{M_r + m_0 + nm} z_{GA}; \quad z_G = -\frac{m_0 + nm}{M_r + m_0 + nm} z_{GA};$$

$[I_A^{(AB)}]$ – суммарный тензор инерции АБУ и ДМ;

A_Σ – средний суммарный момент инерции составного ротора с АБУ;

ΔA – инерционная анизотропия составного ротора.

$z_{GA} = z_A - z_G$ – расстояние от точки A до центра масс ротора G крепления АБУ.

Составной ротор с автобалансиром является инерционно анизотропным, в отличие от исходного ротора. Это свойство ротор приобретает вследствие того, что КГ АБУ увеличивают его поперечные моменты инерции в неодинаковой степени, в результате чего $A_{C1} \leq A_{C2}$. В математической модели движения МС анизотропная и изотропная составляющие суммарного тензора инерции учитываются параметрами ΔA и A_Σ , соответственно.

Безразмерные уравнения движения системы во вращающихся осях имеют вид [13]:

$$\begin{aligned} \{\bar{w}\}'' + [\bar{H}_w]\{\bar{w}\}' + [\bar{K}_w]\{\bar{w}\} + \bar{h}_{y\alpha}[E_c]\{\bar{\chi}\}' + [\bar{K}_{w\chi}]\{\bar{\chi}\} + \{\bar{s}\}'' + 2\Omega[E_c]\{\bar{s}\}' - \Omega^2\{\bar{s}\} = \{0\}; \\ [\bar{I}_C]\{\bar{\chi}\}'' + [\bar{H}_\chi]\{\bar{\chi}\}' + [\bar{K}_\chi]\{\bar{\chi}\} - \bar{h}_{y\alpha}[E_c]\{\bar{w}\}' - [\bar{K}_{w\chi}]\{\bar{w}\} + \\ + \bar{z}_A[E_c]\left(\{\bar{s}\}'' + 2\Omega[E_c]\{\bar{s}\}' - \Omega^2\{\bar{s}\}\right) = \{0\}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{s}\}'' + \bar{h}_s\{\bar{s}\}' + \frac{1}{2}\bar{m}[d_A]\left(\{\bar{w}\}'' + 2\Omega[E_c]\{\bar{w}\}' - \Omega^2\{\bar{w}\} - \right. \\ \left. - \bar{z}_A[E_c]\left(\{\bar{\chi}\}'' + 2\Omega[E_c]\{\bar{\chi}\}' - \Omega^2\{\bar{\chi}\}\right)\right) = \{0\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где безразмерные параметры и матрицы:

$$\begin{aligned} [\bar{H}_w] &= \frac{1}{M_s\omega_0}[H_w] = \bar{h}_x[E] + 2\Omega[E_c]; & [\bar{H}_\chi] &= \frac{1}{A_\Sigma\omega_0}[H_\chi] = \bar{h}_\alpha[E] + \Omega(2 - \bar{C}_\Sigma)[E_c]; \\ [\bar{K}_w] &= \frac{1}{M_s\omega_0^2}[K_w] = (\bar{p}_x^2 - \Omega^2)[E] + \Omega\bar{h}_x[E_c]; & [\bar{K}_{w\chi}] &= \frac{1}{\omega_0^2\sqrt{M_sA_\Sigma}}[K_{w\chi}] = -\Omega\bar{h}_{y\alpha}[E] + \bar{c}_{y\alpha}[E_c]; \\ [\bar{K}_\chi] &= \frac{1}{A_\Sigma\omega_0^2}[K_\chi] = (\bar{p}_\alpha^2 - \Omega^2(1 - \bar{C}_\Sigma))[E] + \Delta\bar{A}\Omega^2[E_A] + \Omega\bar{h}_\alpha[E_c]; \\ [\bar{I}_C] &= \frac{1}{A_\Sigma}[I_C] = \begin{bmatrix} \bar{A}_{C1} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{C2} \end{bmatrix} = \bar{A}_s[E] + [\bar{I}_A^{(AB)}] = [E] + \Delta\bar{A}[E_A]; \\ [\bar{I}_A^{(AB)}] &= \frac{1}{A_\Sigma}[I_A^{(AB)}] = \frac{1}{2}\bar{A}_{m0}[d_{A0}] + \frac{1}{2}\bar{A}_m[d_A]; \\ \Omega &= \frac{\omega}{\omega_0}; & \bar{p}_x^2 &= \frac{c_x}{M_s\omega_0^2} = 1; & \bar{p}_\alpha^2 &= \frac{c_\alpha}{A_\Sigma\omega_0^2}; & \bar{c}_{y\alpha} &= \frac{c_{y\alpha}}{\omega_0^2\sqrt{M_sA_\Sigma}}; \\ \bar{h}_x &= \frac{h_x}{M_s\omega_0}; & \bar{h}_\alpha &= \frac{h_\alpha}{A_\Sigma\omega_0}; & \bar{h}_{y\alpha} &= \frac{h_{y\alpha}}{\omega_0\sqrt{M_sA_\Sigma}}; & \bar{h}_s &= \frac{h_s}{\omega_0} = \frac{h}{m\omega_0}; \\ \bar{C}_\Sigma &= \frac{C_\Sigma}{A_\Sigma}; & \bar{C}_r &= \frac{C_r}{A_\Sigma}; & \bar{A}_s &= \frac{A_s}{A_\Sigma}; & \bar{A}_{m0} &= \frac{m_0R_0^2}{A_\Sigma}; & \bar{A}_m &= \frac{nmR^2}{A_\Sigma}; \\ \Delta\bar{A} &= \frac{\Delta A}{A_\Sigma} = \frac{1}{2}(\bar{A}_{C2} - \bar{A}_{C1}) = \frac{1}{2}\bar{A}_{m0} + \frac{1}{2}\bar{A}_mD_A; & \bar{A}_s &+ \frac{1}{2}\bar{A}_{m0} + \frac{1}{2}\bar{A}_m = 1; \\ \bar{A}_{C1,2} &= \frac{A_{C1,2}}{A_\Sigma} = 1 \mp \Delta\bar{A}; & \bar{z}_A &= z_A\sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}}; & \bar{m} &= \frac{nm}{M_s}; & ()' &\equiv d/d\tau; & \tau &= \omega_0 t; \end{aligned} \quad (8)$$

τ – безразмерное время;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_x}{M_s}}$ – «сепаратная» (парциальная) «недемпфированная» собственная частота

поперечных колебаний составного ротора;

Ω – безразмерная угловая скорость вращения ротора.

Размерные параметры $M_s, A_\Sigma, \Delta A, A_s$ см. формулы (4), (5).

Безразмерные ОК МС $\{\bar{w}\}, \{\bar{\chi}\}, \{\bar{s}\}$, которые входят в уравнения движения системы (6), (7), определяются выражениями

$$\{\bar{w}\} = \frac{1}{l_w} \{w\} = \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_c \\ \bar{\eta}_c \end{Bmatrix}; \quad \{\bar{\chi}\} = \frac{1}{l_\chi} \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix}; \quad \{\bar{s}\} = \frac{1}{l_s} \{s\} = \begin{Bmatrix} \bar{s}_\xi \\ \bar{s}_\eta \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

где коэффициенты масштаба l_w, l_χ, l_s связаны между собой соотношениями:

$$\frac{l_\chi}{l_w} = \sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}}; \quad \frac{l_s}{l_w} = M_s; \quad \frac{l_s}{l_\chi} = \sqrt{M_s A_\Sigma}.$$

Отметим, что множитель $\rho_s = \sqrt{A_\Sigma/M_s}$ в выражениях для относительных параметров МС, представляет собой радиус инерции составного ротора.

Безразмерный параметр $\bar{C}_\Sigma = C_\Sigma/A_\Sigma$, который входит в (6)-(8), отражает общепринятую классификацию типов ротора:

- длинный ротор, $\bar{C}_\Sigma < 1$ ($C_\Sigma < A_\Sigma$);
- сферический ротор, $\bar{C}_\Sigma = 1$ ($C_\Sigma = A_\Sigma$);
- короткий ротор, $\bar{C}_\Sigma > 1$ ($C_\Sigma > A_\Sigma$).

В уравнения движения МС (6), (7) также входят безразмерные коэффициенты жесткости и демпфирования. Приведем расчетные формулы для этих параметров в случае, когда ротор установлен на двух одинаковых изотропных опорах ($c=c_L=c_R$; $h=h_L=h_R$), полученные на основе (4), (8) [13]:

$$\begin{aligned} \bar{p}_x^2 = \bar{c}_x = \frac{p_x^2}{\omega_0^2} = 1; \quad \bar{p}_\alpha^2 = \bar{c}_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{\omega_0^2 A_\Sigma} = \frac{c_\alpha}{c_x A_\Sigma} = \frac{c_\alpha M_s}{c_x A_\Sigma} = \frac{\bar{l}_L^2 + (1 - \bar{l}_L)^2}{2\bar{\rho}_s^2}; \\ \bar{c}_{y\alpha} = \frac{c_{y\alpha}}{\omega_0^2 \sqrt{M_s A_\Sigma}} = \frac{c_{y\alpha}}{c_x} \sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}} = \frac{2\bar{l}_L - 1}{2\bar{\rho}_s}; \\ \bar{h}_x = \frac{h_x}{M_s \omega_0} = \frac{2h}{M_s p_x}; \quad \bar{h}_\alpha = \frac{h_\alpha}{A_\Sigma \omega_0} = \bar{h}_x \frac{\bar{l}_L^2 + (1 - \bar{l}_L)^2}{2\bar{\rho}_s^2}; \quad \bar{h}_{y\alpha} = \frac{h_{y\alpha}}{\omega_0 \sqrt{M_s A_\Sigma}} = \bar{h}_x \frac{2\bar{l}_L - 1}{2\bar{\rho}_s}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{l}_L = \frac{l_{cL}}{l}$; $\bar{\rho}_s = \frac{\rho_s}{l}$; $\rho_s = \sqrt{\frac{A_\Sigma}{M_s}}$.

Относительные (безразмерные) параметры, входящие в (10):

$\bar{l}_L = l_{cL}/l$ – относительное расстояние от центра масс составного ротора до левой опоры; при $0 < \bar{l}_L < 1$ – межопорный ротор, при $\bar{l}_L = 0,5$ – симметрично расположенный ротор, а при $\bar{l}_L > 1$ – консольный ротор;

$\bar{\rho}_s$ – относительный радиус инерции ротора.

2. Критические скорости вращения ротора с АБУ при идеальной автобалансировке

Рассмотрим движение ротора с АБУ в режиме идеальной автобалансировки, при котором компенсирующие грузы полностью уравновесили дисбаланс ротора. При этом КГ АБУ занимают автобалансирующие положения и жестко прикреплены к ротору, вращаясь вместе с ним. При таком движении МС заметно упрощается математическая модель движения, поскольку не учитываются колебания грузов относительно ротора. Однако, как показано ниже, его рассмотрение позволяет аналитически точно определить критические частоты вращения с учетом наличия автобалансира. Это дает информацию об изменении базовых свойств ротора после установки на него АБУ. Отметим, что при традиционных подходах в теории автобалансировки такое упрощение модели сводит задачу к анализу практически исходного ротора (без АБУ). Однако в данной работе учитывается, что массы КГ и ДМ соизмеримы с массой ротора, поэтому даже идеально сбалансированный ротор приобретает инерционную анизотропию из-за наличия прикрепленных к нему точечных масс, что отражается в получаемых уравнениях движения.

Основным фактором, приводящим к качественному изменению спектра критических частот вращения, является приобретение ротором свойства инерционной анизотропии, т.е. неодинаковости двух экваториальных моментов инерции составного ротора относительно его поперечных осей. Влияние инерционной (подвижной) анизотропии на динамику вращающегося ротора (без АБУ) изучалось в ряде работ [14-17] и др. В них показано, что данный фактор в общем случае приводит к удвоению (расщеплению) критических частот вращения и к появлению дополнительных областей неустойчивости движения. Однако в существующих работах рассматривалась динамика роторов без автобалансира.

Найдем выражение для критических скоростей вращения ротора с АБУ при идеальной автобалансировке.

В случае идеальной автобалансировки обобщенные координаты АБУ (т.е. суммарный дисбаланс КГ АБУ и ДМ) тождественно равны нулю:

$$\begin{aligned} \varphi_j = \tilde{\varphi}_j = \omega t + \alpha_j; \quad \psi_j = \tilde{\psi}_j = 0; \quad j = 1, \dots, n; \\ \bar{s}_\xi = \tilde{s}_\xi = 0; \quad \bar{s}_\eta = \tilde{s}_\eta = 0; \quad \{\bar{s}\} = \{\tilde{s}\} = \{0\}; \quad \{\bar{s}_w\} = \{\tilde{s}_w\} = \{0\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Безразмерные уравнения движения составного ротора с АБУ в режиме идеальной автобалансировки получаем из (6), (7) с учетом (11):

$$\begin{aligned} \{\bar{w}\}'' + [\bar{H}_w]\{\bar{w}\}' + [\bar{K}_w]\{\bar{w}\} + \bar{h}_{y\alpha}[E_c]\{\bar{\chi}\}' + [\bar{K}_{w\chi}]\{\bar{\chi}\} = \{0\}; \\ [\bar{I}_c]\{\bar{\chi}\}'' + [\bar{H}_\chi]\{\bar{\chi}\}' + [\bar{K}_\chi]\{\bar{\chi}\} - \bar{h}_{y\alpha}[E_c]\{\bar{w}\}' - [\bar{K}_{w\chi}]\{\bar{w}\} = \{0\}; \end{aligned}$$

или

$$[\bar{M}]\{\bar{q}\}'' + [\bar{H}]\{\bar{q}\}' + [\bar{K}]\{\bar{q}\} = \{0\}, \quad (12)$$

где

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} [E] & [0] \\ [0] & [\bar{I}_C] \end{bmatrix}; \quad [\bar{H}] = \begin{bmatrix} [\bar{H}_w] & \bar{h}_{y\alpha}[E_c] \\ -\bar{h}_{y\alpha}[E_c] & [\bar{H}_\chi] \end{bmatrix}; \quad [\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_w] & [\bar{K}_{w\chi}] \\ -[\bar{K}_{w\chi}] & [\bar{K}_\chi] \end{bmatrix}; \quad \{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{w}\} \\ \{\bar{\chi}\} \end{Bmatrix}.$$

Уравнения (12) описывают собственные колебания вращающегося ротора, который имеет инерционную анизотропию, обусловленную прикреплением к нему автобалансира. Анизотропная составляющая учитывается параметром ΔA , входящим в матрицы $[\bar{I}_C]$, $[\bar{K}_\chi]$.

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнениям колебаний (12), имеет вид:

$$|[\bar{M}]\lambda_r^2 + [\bar{H}]\lambda_r + [\bar{K}]| = 0, \quad (13)$$

где λ_r – собственное число МС во вращающихся координатах.

При рассмотрении движения МС во вращающихся осях, критическим недемпфированным (т.е. при отсутствии трения) скоростям прямой прецессии ротора соответствуют равенства, см. [15]:

$$\lambda_r = 0; \quad \bar{h}_x = 0; \quad \bar{h}_\alpha = 0; \quad \bar{h}_{y\alpha} = 0.$$

Частотное уравнение, корнями которого являются критические скорости вращения ротора с АБУ, получаем путем подстановки последних выражений в (13):

$$|\bar{K}_1| = \begin{vmatrix} [\bar{K}_{w1}] & [\bar{K}_{w\chi1}] \\ -[\bar{K}_{w\chi1}] & [\bar{K}_{\chi1}] \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

где

$$[\bar{K}_{w1}] = (1 - \Omega^2)[E] = k_x[E];$$

$$[\bar{K}_{\chi1}] = (\bar{p}_\alpha^2 - \Omega^2(1 - \bar{C}_\Sigma))E + \Delta A \Omega^2[E_A] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}; \quad [\bar{K}_{w\chi1}] = \bar{c}_{y\alpha}[E_c].$$

Здесь для удобства введены обозначения:

$$k_x = 1 - \Omega^2; \quad k_{1,2} = \bar{p}_\alpha^2 - \Delta \bar{I}_{1,2} \Omega^2; \quad \Delta \bar{I}_{1,2} = 1 - \bar{C}_\Sigma \pm \Delta A;$$

$\Delta \bar{I}_{1,2}$ – разности полярного и поперечных моментов инерции составного ротора.

Анализ показывает, что частотное уравнение (14) допускает получение точного решения в явном виде. Преобразуем (14), используя свойства блочных определителей [18]:

$$|\bar{K}_1| = |[\bar{K}_{w1}][\bar{K}_{\chi1}] + [\bar{K}_{w\chi1}]^2| = \left| k_x \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \bar{c}_{y\alpha}^2[E] \right| = 0$$

или в виде произведения

$$|\bar{K}_1| = \Delta_1 \Delta_2 = 0, \quad (15)$$

где

$$\Delta_{1,2} = k_x k_{1,2} - \bar{c}_{y\alpha}^2 = \Delta \bar{I}_{1,2} \Omega^4 - (\bar{p}_\alpha^2 + \Delta \bar{I}_{1,2}) \Omega^2 + \bar{p}_\alpha^2 - \bar{c}_{y\alpha}^2.$$

Как видим, частотное уравнение (14) удается представить в виде произведения двух сомножителей $\Delta_{1,2}$, которые представляют собой биквадратные уравнения относительно Ω . Далее находим корни частотного уравнения.

Таким образом, критические скорости поперечных и угловых колебаний составного ротора с АБУ определяются следующим выражением, полученным из (15):

$$\Omega_{K1-4}^2 = \Omega_{KX,\alpha}^2 = \frac{1}{2} + \frac{\bar{p}_\alpha^2}{2\Delta_{1,2}} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{\bar{p}_\alpha^2}{\Delta_{1,2}}\right)^2 + 4 \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\Delta_{1,2}}}, \quad (16)$$

где

$$\Delta_{1,2} = 1 - \bar{C}_\Sigma \pm \Delta\bar{A}; \text{ параметры } \bar{p}_\alpha, \bar{c}_{y\alpha} \text{ см. (10).}$$

Здесь инерционная анизотропия составного ротора, обусловленная установкой автобалансира, учитывается параметром $\Delta\bar{A}$, который определяется выражением (см. (8), (5)):

$$\Delta\bar{A} = \frac{1}{2} \bar{A}_{m0} + \frac{1}{2} \bar{A}_m D_A = \frac{1}{2} \bar{m}_0 \bar{R}_0^2 + \frac{1}{2} \bar{m} \bar{R}^2 D_A, \quad (17)$$

где

$$\bar{A}_{m0} = \frac{m_0 R_0^2}{A_\Sigma} = \bar{m}_0 \bar{R}_0^2; \quad \bar{A}_m = \frac{nm R^2}{A_\Sigma} = \bar{m} \bar{R}^2;$$

$$\bar{m}_0 = \frac{m_0}{M_s}; \quad \bar{m} = \frac{nm}{M_s}; \quad \bar{R}_0 = \frac{R_0}{\rho_s}; \quad \bar{R} = \frac{R}{\rho_s}; \quad \rho_s = \sqrt{\frac{A_\Sigma}{M_s}}.$$

Далее для обозначения критических скоростей будем использовать как обозначение Ω_{K1-4} , так и обозначения $\Omega_{KX1,2}$ и $\Omega_{K\alpha1,2}$ с указанием вида доминирующих колебаний – поперечные и угловые.

Полученное выше выражение (16) является аналитически точным и справедливо при произвольном расположении ротора с АБУ относительно опор (симметричном, несимметричном, межопорном, консольном).

Приведем некоторые выражения для квадратов критических скоростей вращения в частных случаях МС, полученные из (16).

Критические скорости составного ротора в случае его симметричного расположения между опорами, когда $\bar{l}_L = 0,5$, $\bar{c}_{y\alpha} = 0$ (при этом поперечные и угловые колебания не влияют друг на друга) определяются выражениями:

$$\Omega_{K1,2}^2 = \Omega_{KX1,2}^2 = 1; \quad \Omega_{K3,4}^2 = \Omega_{K\alpha1,2}^2 = \frac{\bar{p}_\alpha^2}{\Delta_{1,2}} = \frac{\bar{p}_\alpha^2}{1 - \bar{C}_\Sigma \pm \Delta\bar{A}}. \quad (18)$$

Формула (18) совпадает с известным выражением для симметрично установленного анизотропного ротора, см. [14-17].

Приближенные выражения для квадратов критических скоростей в случае расположения ротора, близкого к симметричному, т.е. при малой величине $\bar{c}_{y\alpha}$:

$$\begin{aligned}\Omega_{K1,2}^2 &\approx 1 - \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\bar{p}_\alpha^2 - \Delta\bar{I}_{1,2}} = 1 - \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\bar{p}_\alpha^2 - 1 + \bar{C}_\Sigma \mp \Delta\bar{A}}; \\ \Omega_{K3,4}^2 &\approx \frac{\bar{p}_\alpha^2}{\Delta\bar{I}_{1,2}} + \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\bar{p}_\alpha^2 - \Delta\bar{I}_{1,2}} = \frac{\bar{p}_\alpha^2}{1 - \bar{C}_\Sigma \pm \Delta\bar{A}} + \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\bar{p}_\alpha^2 - 1 + \bar{C}_\Sigma \mp \Delta\bar{A}}.\end{aligned}\quad (19)$$

Выражения (19) имеют приемлемую точность кроме области параметров, где $\bar{p}_\alpha^2 \approx \Delta\bar{I}_{1,2}$, что, однако, нетипично для роторных машин.

Приближенные выражения для квадратов критических скоростей в случае малой анизотропии ротора при его произвольном расположении, т.е. при малой величине $\Delta\bar{A}$:

$$\Omega_{K1-4}^2 = \Omega_{K\chi,\alpha}^2 \approx \Omega_{K0i}^2 \left(1 - \frac{\Omega_{K0i}^2 - 1}{2(1 - \bar{C}_\Sigma)(\Omega_{K0i}^2 - \bar{p}_\alpha^2 - 1 + \bar{C}_\Sigma)} \cdot \Delta\bar{A} \right), \quad (20)$$

где Ω_{K0i} – критические скорости вращения изотропного ротора при $\Delta\bar{A} = 0$, $\Delta\bar{I}_1 = \Delta\bar{I}_2$.

Отметим, что последнее выражение получено путем нахождения производной от неявной функции $\Omega_{K1-4}^2(\Delta\bar{A})$, заданной формулой (15) (см. [18] и др.). Такой способ позволил получить выражение (19) в наиболее компактной и ясной форме.

Из анализа выражений (15)-(20) вытекает, что в общем случае составной ротор с АБУ имеет от 1 до 4 критических скоростей вращения. Имеет место удваивание числа критических скоростей анизотропного ротора с автобалансиром в сравнении с изотропным ротором. Результаты анализа условий существования различного количества критических скоростей сведены в таблицу 1. Колонка, соответствующая изотропному ротору, внесена в таблицу для удобства сравнения.

Информация, приведенная в таблице 1, получена с помощью анализа величин коэффициентов биквадратных уравнений в (15) и формул (16)-(20), учитывая следующее:

- условием вещественности корней Ω_{Ki}^2 биквадратного уравнения в (15) является положительность его дискриминанта; анализ показывает, что корни всегда вещественны;
- можно показать, что при одинаковых изотропных опорах вращающегося ротора всегда выполняется соотношение $(\bar{p}_\alpha^2 - \bar{c}_{y\alpha}^2) > 0$;
- условием действительного существования критической скорости Ω_{Ki} служит выполнение неравенства $\Omega_{Ki}^2 > 0$; при его анализе использовалось известное правило Декарта для знаков коэффициентов уравнения (15) [18].

Полученные выражения (15)-(20) позволяют установить влияние параметров ротора и автобалансира на критические скорости Ω_K .

На рисунке 3 показано качественное изменение спектра критических скоростей вращения ротора вследствие установки на него автобалансира (общий случай, ротор длинного типа). Первоначально изотропный ротор имеет две критические скорости прямой прецессии, рис. 3а. Вследствие установки автобалансира на ротор происходит удваивание (расщепление) критических скоростей, см. рис. 3б, 3в. Причем, если применяется двухмассовый АБУ ($n=2$), то значения критических скоростей определены однозначно (детерминированы), рис. 3б. В случае же применения многомассового АБУ ($n \geq 3$) критические скорости определены неоднозначно (интервально), т.е. их величины могут находиться в некоторых диапазонах значений, рис. 3в. Данная особенность является следствием неоднозначности расположения КГ в многомассовом АБУ и в уравнениях учитывается геометрическим параметром D_A . Вследствие этого степень инерционной анизотропии $\Delta\bar{A}(D_A)$ также является интервальной величиной (см. ф.(8), (17)). На рисунке 3в штриховкой показаны диапазоны возможных значений критических скоростей Ω_{K1-4} в зависимости от значения параметра $D_A \in [0, 1]$.

Таблица 1. Количество критических скоростей вращения ротора с автобалансиром

Параметр и диапазон его значений		Количество критических скоростей вращения МС Ω_K	
\bar{C}_Σ (тип ротора)	$\Delta\bar{I}_{1,2} = 1 - C_\Sigma \pm \Delta\bar{A}$	изотропный ротор ($\Delta\bar{A} = 0$)	анизотропный ротор с АБУ ($\Delta\bar{A} \neq 0$)
Несимметрично установленный ротор ($\bar{c}_{y\alpha} \neq 0$), ф.(16)			
$\bar{C}_\Sigma < (1 - \Delta\bar{A})$, $\bar{c}_{y\alpha} \neq 0$ длинный ротор	$\Delta\bar{I}_{1,2} > 0$	две Ω_K	четыре Ω_K
$(1 - \Delta\bar{A}) < \bar{C}_\Sigma < (1 + \Delta\bar{A})$ ротор, близкий к сферическому	$\Delta\bar{I}_1 > 0$, $\Delta\bar{I}_2 < 0$	одна Ω_K	три Ω_K
$\bar{C}_\Sigma > (1 + \Delta\bar{A})$, короткий ротор	$\Delta\bar{I}_{1,2} < 0$	одна Ω_K (по поперечным колебаниям)	две Ω_K (по поперечным колебаниям)
Симметрично установленный ротор ($\bar{c}_{y\alpha} = 0$), ф.(18)			
$\bar{C}_\Sigma < (1 - \Delta\bar{A})$, $\bar{c}_{y\alpha} = 0$ длинный ротор	$\Delta\bar{I}_{1,2} > 0$	две Ω_K	три Ω_K
$(1 - \Delta\bar{A}) < \bar{C}_\Sigma < (1 + \Delta\bar{A})$ ротор, близкий к сферическому	$\Delta\bar{I}_1 > 0$, $\Delta\bar{I}_2 < 0$	одна Ω_K	две Ω_K
$\bar{C}_\Sigma > (1 + \Delta\bar{A})$, короткий ротор	$\Delta\bar{I}_{1,2} < 0$	одна Ω_K (по поперечным колебаниям)	одна Ω_K (по поперечным колебаниям)

Основным изменением массо-инерционных характеристик ротора с АБУ является возникновение свойства инерционной анизотропии в тензоре инерции его угловых колебаний. Из графиков на рис. 4 (построенных по формуле (17)) видно, что степень инерционной анизотропии составного ротора с АБУ $\Delta\bar{A}$ возрастает при увеличении относительной массы КГ АБУ \bar{m} . Серия графиков на рис. 4 характеризует интервальный характер изменения инерционных динамических свойств составного ротора с многомассовым АБУ в зависимости от геометрического параметра D_A [13].

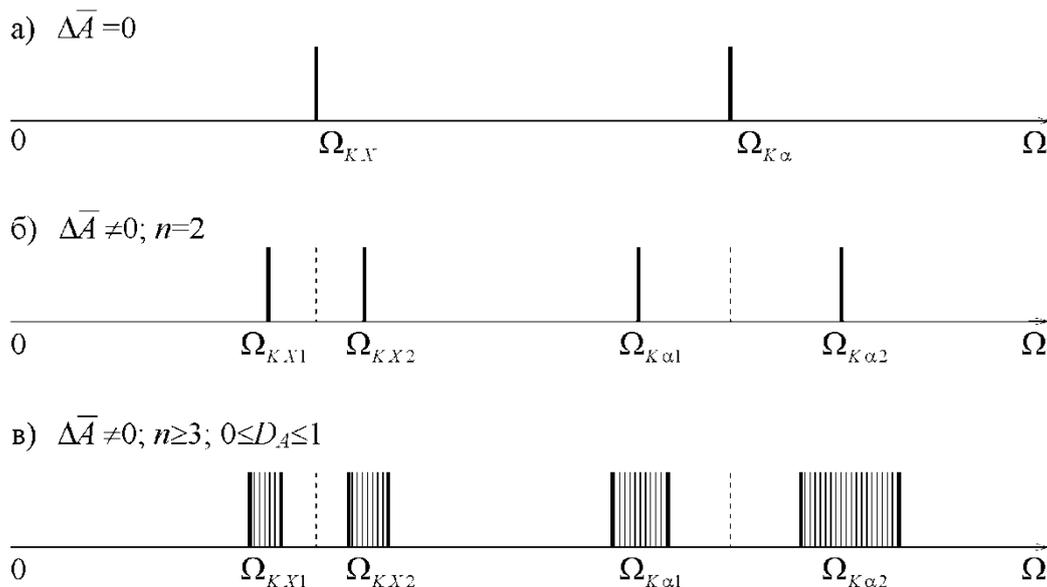


Рис. 3. Изменение спектра критических скоростей вращения ротора вследствие инерционной анизотропии, вызванной автобалансиром: а – ротор без АБУ (изотропный); б – ротор с двухмассовым АБУ (анизотропный); в – ротор с многомассовым АБУ (анизотропный)

Графики на рис. 4-8 рассчитаны и построены при следующих базовых значениях исходных данных: $\bar{C}_\Sigma = 0,75$; $\bar{\rho}_s = 0,4$; $\Delta\bar{A} = 0,1$; $D_A = 0,5$; $\bar{m} = 0,05$; $\bar{R} = 2$; $\bar{m}_0 = 0,025$; $\bar{R}_0 = 2$. При этом $\bar{A}_m = 0,2$; $\bar{A}_{m0} = 0,1$; $E = \bar{m}\bar{R}/(\bar{m}_0\bar{R}_0) = 2$. Кроме того, в случае симметрично установленного ротора ($\bar{l}_L = 0,5$) имеем $\bar{p}_\alpha = 1,25$, $\bar{c}_{y\alpha} = 0$, $\Omega_{K1-4} = (1; 1; 2,11; 3,23)$; для несимметрично установленного ротора ($\bar{l}_L = 0,8$) имеем $\bar{p}_\alpha = 1,46$, $\bar{c}_{y\alpha} = 0,75$, $\Omega_{K1-4} = (0,837; 0,849; 2,52; 3,80)$; и для консольного ротора ($\bar{l}_L = 1,2$) имеем $\bar{p}_\alpha = 2,15$, $\bar{c}_{y\alpha} = 1,75$, $\Omega_{K1-4} = (0,567; 0,575; 3,73; 5,61)$.

Влияние различных параметров МС на критические скорости вращения проиллюстрировано графиками на рисунках 5-8, которые построены по формулам (16) с учетом (10), (8), (17). К значимым параметрам МС относятся: тип ротора \bar{C}_Σ , место расположения ротора относительно опор \bar{l}_L , степень инерционной анизотропии $\Delta\bar{A}$, которая в свою очередь зависит от массы и радиуса расположения КГ АБУ, а также от геометрии расположения грузов (параметра D_A).

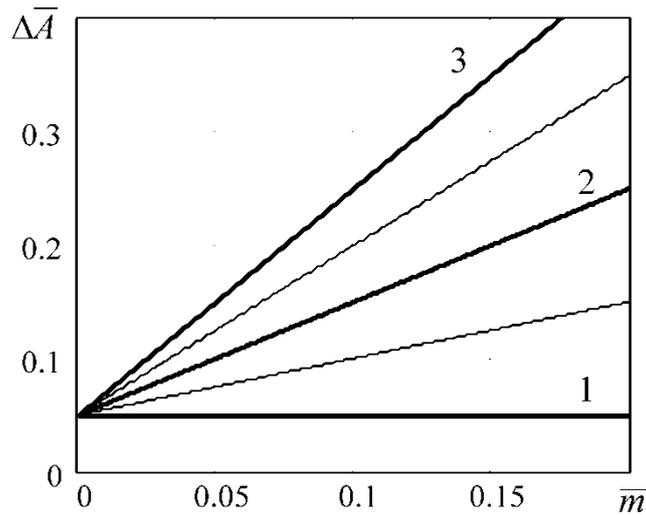


Рис. 4. Зависимость степени инерционной анизотропии составного ротора с АБУ $\Delta\bar{A}$ от массы КГ \bar{m} при различных значениях параметра D_A : 1 – $D_A = 0$; 2 – $D_A = 0,5$; 3 – $D_A = 1$

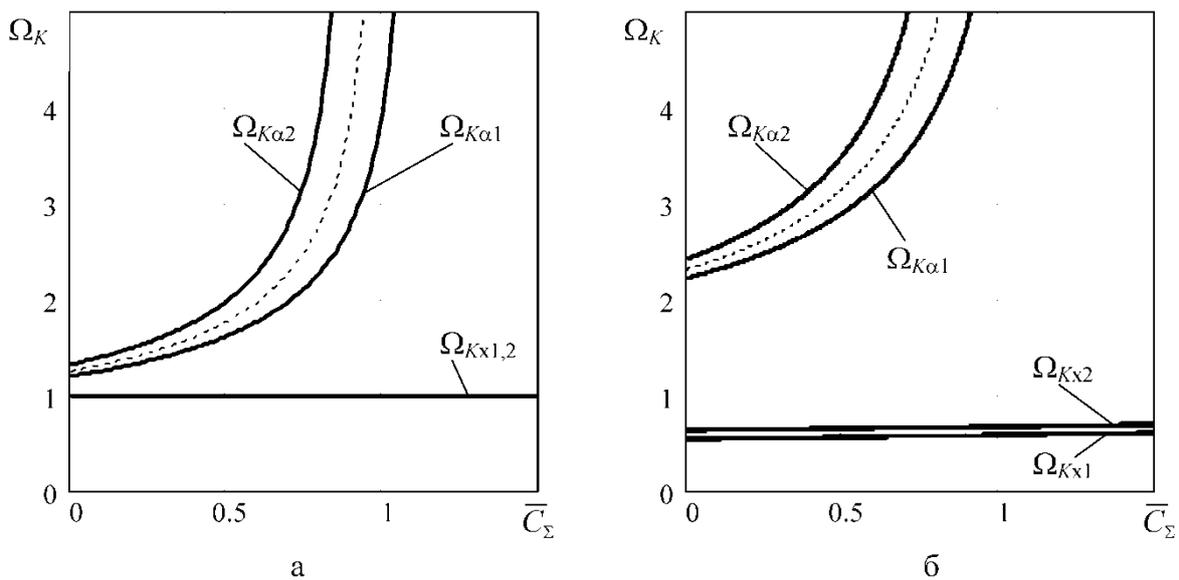


Рис. 5. Критические скорости Ω_K вращения ротора с АБУ в зависимости от типа ротора \bar{C}_Σ : а – симметрично установленный ротор с АБУ, $\bar{l}_L = 0,5$, $\Delta\bar{A} = 0,1$; б – несимметрично установленный ротор с АБУ, $\bar{l}_L = 1,2$, $\Delta\bar{A} = 0,1$; ----- – для изотропного ротора без АБУ, $\Delta\bar{A} = 0$.

Из формул (16)-(20), таблицы 1 и графиков на рис.3-8 можно заключить следующее.

1. Двухпорный ротор с АБУ, совершающий пространственное движение, является инерционно анизотропным ротором. При этом даже незначительная масса \bar{m} грузов может создавать заметную анизотропию $\Delta\bar{A}$ (см. рис. 4), что приводит к качественному и количественному изменению спектра критических скоростей вращения.

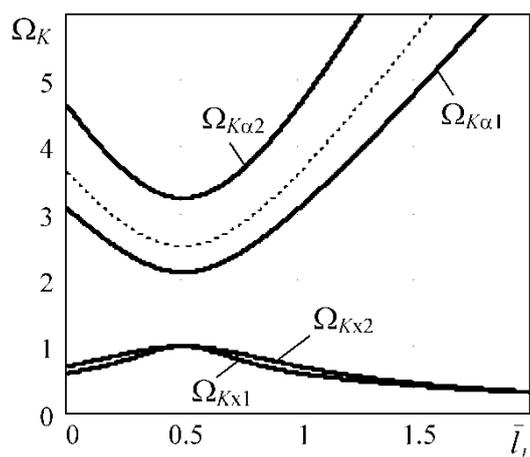


Рис. 6. Критические скорости Ω_K вращения длинного ротора с АБУ в зависимости от места его установки относительно опор \bar{l}_L ($\bar{l}_L > 1$ – консольный ротор; $\bar{l}_L = 0,5$ – симметрично установленный ротор):
 ----- – для изотропного ротора без АБУ, $\Delta\bar{A} = 0$.

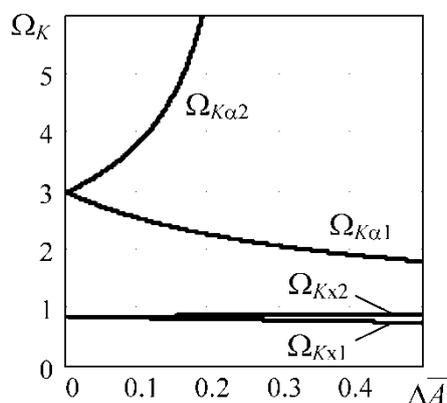


Рис. 7. Критические скорости Ω_K вращения длинного несимметрично расположенного ротора с АБУ ($\bar{l}_L = 0,8$) в зависимости от степени инерционной анизотропии $\Delta\bar{A}$

2. Инерционная анизотропия приводит к удваиванию количества (расщеплению) критических скоростей ротора с АБУ по сравнению с исходным изотропным ротором без АБУ. Причем при типичных значениях параметров роторной машины расщепление критической скорости $\Omega_{K\alpha}$ угловых колебаний существенно больше, чем расщепление критической скорости Ω_{KX} поперечных колебаний (см. рис. 5-7). В случае симметричного расположения ротора расщепляется только скорость $\Omega_{K\alpha}$ угловых колебаний, а критические скорости Ω_{KX} поперечных колебаний остаются без изменений.

3. В общем случае инерционно анизотропный ротор с АБУ имеет от 1 до 4 критических скоростей вращения прямой прецессии. Количество критических скоростей зависит от типа ротора, схемы его установки на опорах и степени анизотропии.

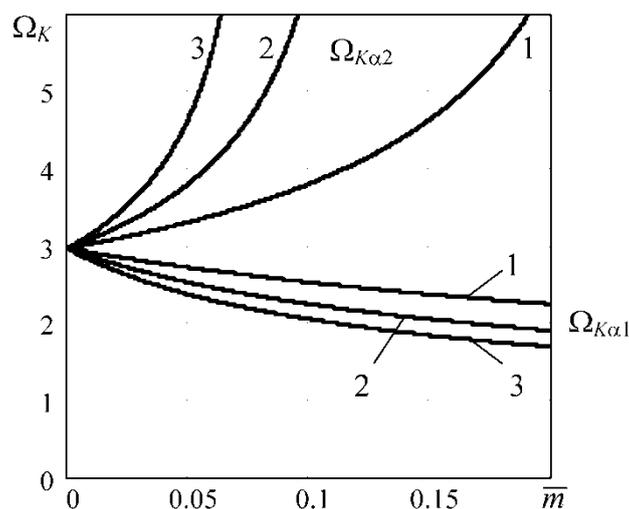


Рис. 8. Критические скорости $\Omega_{K\alpha}$ угловых колебаний длинного несимметрично расположенного ротора с АБУ ($\bar{l}_L = 0,8$) в зависимости от относительной массы грузов при ёмкости АБУ $E=2$ и различных значениях параметра D_A : 1 – $D_A = 0$; 2 – $D_A = 0,5$; 3 – $D_A = 1$

4. Незначительная анизотропия может вызывать заметное изменение критических скоростей $\Omega_{K\alpha}$ угловых колебаний ротора, в особенности для ротора близкого к сферическому типу (см. рис. 5, 7). Длинные роторы ($\bar{C}_\Sigma < 1$) также чувствительны к анизотропии. В отличие от них динамические свойства коротких роторов ($\bar{C}_\Sigma > 1$) изменяются слабо.

5. Критические скорости ротора с многомассовым АБУ являются интервальными величинами, поскольку они зависят от степени инерционной анизотропии $\Delta\bar{A}$, которая связана с интервальным параметром $D_A \in [0, 1]$ (см. семейство графиков на рис.8). Наибольшие изменения Ω_K имеют место при $D_A = 1$.

Установленные выше особенности показывают, что при определенных значениях параметров МС «роторная машина - автобалансир» влияние массы КГ АБУ на массоинерционные характеристики, критические скорости вращения и области устойчивости движения МС может быть существенным. Представляет практический интерес получить формальный критерий, позволяющий ответить на вопрос – необходим ли учет влияния массы автобалансира при анализе динамики роторной машины или достаточно ограничиться упрощенной моделью, в которой массы грузов АБУ считаются малыми величинами. В качестве такого критерия логично использовать величину относительного изменения критических скоростей вращения Ω_K при идеальной автобалансировке вследствие учета влияния данного фактора. Причем определяющее значение играют изменения критических скоростей угловых колебаний $\Omega_{K\alpha}$.

Таким образом, критерий необходимости учета влияния массы автобалансира на динамику роторной машины с АБУ может быть сформулирован следующим образом:

$$\delta\Omega_{K\alpha} = \max(|\delta\Omega_{K\alpha 1,2}|) > [\delta\Omega_{K\alpha}], \quad (21)$$

где

$$\delta\Omega_{K\alpha 1,2} = \frac{\Omega_{K\alpha 1,2} - \Omega_{K\alpha 0}}{\Omega_{K\alpha 1,2}};$$

$\delta\Omega_{K\alpha}$ – коэффициент чувствительности ротора к влиянию инерционной анизотропии, вызванной автобалансиром, который представляет собой наибольшее относительное изменение критических скоростей угловых колебаний ротора;

$\Omega_{K\alpha 0}$ – критическая скорость угловых колебаний изотропного ротора (при $\Delta\bar{A} = 0$);

$\Omega_{K\alpha 1,2}$ – критические скорости угловых колебаний анизотропного ротора с АБУ (при $\Delta\bar{A} \neq 0$);

$[\delta\Omega_{K\alpha}]$ – максимально допускаемая относительная погрешность определения критических скоростей угловых колебаний ротора.

Для определения величин $\delta\Omega_{K\alpha 1,2}$ можно воспользоваться точными формулами (16). Однако при этом выражения получаются весьма громоздкими и трудно обозримыми. С другой стороны, расчетный анализ показывает, что величины $\delta\Omega_{K\alpha 1,2}$ слабо чувствительны к месту расположения ротора относительно опор \bar{l}_L (см. графики на рис. 6). В связи с этим, для определения величин $\delta\Omega_{K\alpha 1,2}$ рекомендуется воспользоваться следующим приближенным выражением, полученным для случая симметричного расположения ротора согласно (18):

$$\delta\Omega_{K\alpha 1,2} = 1 - \sqrt{1 \pm \frac{\Delta\bar{A}}{1 - \bar{C}_\Sigma}}, \quad (22)$$

где $\Delta\bar{A}$ см. выражение (17).

На рисунке 9 проиллюстрирована относительная погрешность определения критических скоростей $\delta\Omega_{K\alpha 1,2}$ из-за неучета влияния массы автобалансира. Из графиков видно, что выражение (22) имеет приемлемую точность (погрешность не более 6% согласно проведенному численному анализу) и наглядно отражает влияние параметров $\Delta\bar{A}$ и \bar{m} .

Значение максимально допускаемой относительной погрешности $[\delta\Omega_{K\alpha}]$, необходимое для применения предложенного критерия (21), следует принимать, исходя из следующих факторов: 1) значение рабочей частоты вращения $\Omega_{\text{раб}}$ (или рабочего диапазона); 2) расположение $\Omega_{\text{раб}}$ в спектре критических частот; 3) нормативное требование к величине отстройки $\Omega_{\text{раб}}$ от ближайшей критической частоты вращения. Укажем, что, например, для авиационных двигателей требуется, чтобы было исключено попадание критических частот в диапазон $\pm 30\%$ от рабочей частоты вращения [19, 20]. Для судовых турбинных двигателей этот диапазон не должен превышать 20% [21]. С учетом последнего автором рекомендуется принимать максимально допустимую погрешность определения критических скоростей, равной $[\delta\Omega_{K\alpha}] = 0,15$ (т.е. 15%) или ниже.

Из графиков на рис. 9 видно, что при указанных выше базовых значениях параметров системы ($\bar{m} = 0,05$; $\Delta\bar{A} = 0,1$ и др.) установка АБУ на ротор приводит к изменению критических скоростей вращения на величину до 16 %. С учетом рекомендуемого нормативного требования к допускаемой погрешности расчета, при параметрах автобалансира $\bar{m} > 0,036$, $\Delta\bar{A} > 0,095$ необходим учет влияния массы КГ АБУ на динамические свойства МС (для рассмотренного числового примера). В противном случае достаточно использовать упрощенную (традиционную) модель движения роторной системы.

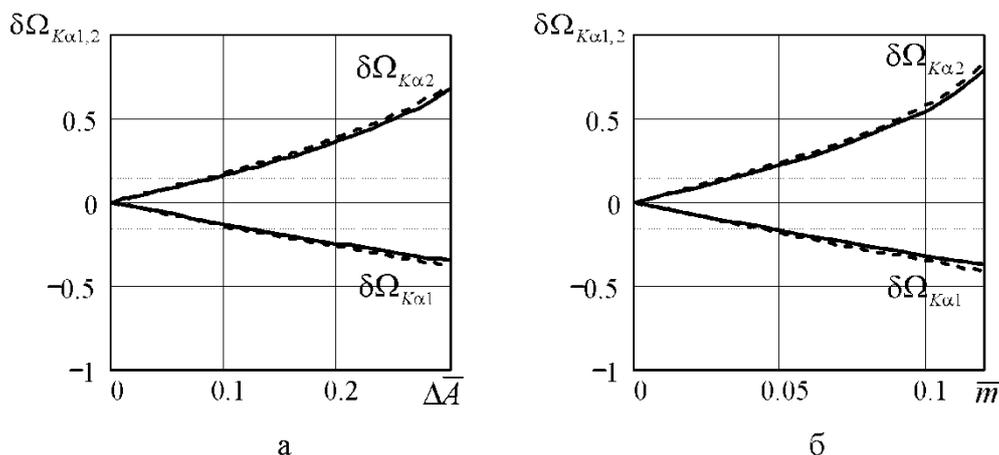


Рис. 9. Относительное изменение критических скоростей $\delta\Omega_{K\alpha 1,2}$ угловых колебаний длинного несимметрично расположенного ротора с АБУ ($\bar{l}_L = 0,8$) в зависимости от степени инерционной анизотропии $\Delta\bar{A}$ (а) и относительной массы \bar{m} грузов (б): — на основе точной формулы (16); - - - - - по формуле (21).

Заключение

Таким образом, выполненный анализ МС с учетом влияния массы компенсирующих грузов АБУ показал, что установка автобалансира на ротор, совершающий пространственное движение, приводит к количественному и качественному изменению его спектра критических скоростей вращения.

Компенсирующие грузы автобалансира изменяют моменты инерции составного ротора и делают его инерционно анизотропным. Как показал анализ, даже незначительная масса грузов АБУ может создавать заметную анизотропию. Вследствие этого имеет место удваивание (расщепление) количества критических скоростей ротора с АБУ по сравнению с исходным изотропным ротором без АБУ.

Полученная в работе аналитически точная формула для критических скоростей, а также приближенные формулы для частных случаев, отражают влияние всех параметров МС. Установлено, что в общем случае инерционно анизотропный ротор с АБУ имеет от одной до четырех критических скоростей вращения прямой прецессии в зависимости от типа ротора, схемы его установки на опорах и степени анизотропии, которая зависит от

параметров автобалансира и дисбаланса. Наиболее чувствительны к данному фактору критические скорости угловых колебаний роторов длинного и сферического типов.

Кроме того, установлено, что величины критических скоростей вращения ротора с многомассовым автобалансиром имеют интервальный характер, т.е. определены не однозначно, а в некоторых диапазонах значений. Эта специфическая особенность является следствием неоднозначности расположения грузов в таких АБУ в автобалансирующем режиме движения.

Предложенный в работе критерий позволяет количественно оценить степень влияния массы автобалансира на динамические свойства ротора с АБУ и сделать обоснованный вывод о необходимости учета данного фактора в модели движения МС.

Полученные результаты будут полезны при конструировании, выборе значений параметров и эксплуатации роторных машин с автобалансирующими устройствами. Дальнейшие исследования будут связаны с анализом условий устойчивости автобалансировки и определением её границ.

Список литературы

1. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. 84 с.
2. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. Кіровоград: КНТУ, 2004. 352 с.
3. Gorbenko A.N. On the stability of self-balancing of a rotor with the help of balls // *Strength of Materials*. 2003. Vol. 35. Iss. 3. P. 305–312. DOI: [10.1023/A:1024621023821](https://doi.org/10.1023/A:1024621023821)
4. Green K, Champneys A.R., Friswell M.I., Munoz A.M. Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors // *Philosophical Transactions of the Royal Society. Ser. A*. 2008. Vol. 366. № 1866. P. 705-728. DOI: [10.1098/rsta.2007.2123](https://doi.org/10.1098/rsta.2007.2123)
5. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors // *Int. J. of Non-Linear Mechanics*. 2008. Vol. 43. Iss. 6. P. 527-541. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002)
6. Lu C.-J., Wang M.-C.; Huang S.-H. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2009. Vol. 23. Iss.3. P. 884-896. DOI: [10.1016/j.ymssp.2008.06.008](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.06.008)
7. Яцун В.В. Математична модель зрівноваження кульовими автобалансирами крильчатки осьового вентилятора // *Науковий вісник Національного гірничого університету (Дніпропетровськ)*. 2009. № 9. С. 11-18. Режим доступа: http://www.nbuu.gov.ua/old_jrn/natural/Nvngu/2009_9/Yatsun.pdf (дата обращения 19.11.2010).

8. Быков В.Г. Балансировка статически и динамически неуравновешенного ротора одноплоскостным автобалансирующим механизмом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 2009. № 4. С. 67-76.
9. Дубовик В.А., Зиякаев Г.Р. Основное движение двухмаятникового автобалансира на гибком валу с упругими опорами // Изв. Томского политехн. ун-та. Математика и механика. Физика. 2010. Т. 317. № 2. С. 37-39.
10. Vykov V.G. Auto-balancing of a rotor with an orthotropic elastic shaft // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2013. Vol. 77. N. 4. P. 369-379. (English translation: Prikladnaya Matematika i Mekhanika). DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2013.11.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.005)
11. Филимонихин Г.Б., Гончаров В.В. Уравновешивание автобалансиrom ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе, совершающем пространственное движение // Изв. Томского политехн. ун-та. Математика и механика. Физика. 2014. Т. 325. № 2. С. 41-49.
12. Филимонихин Г.Б., Горбенко А.Н. Влияние массы шаров автобалансира на структуру уравнений движения двухопорного ротора // Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении: Украинский межведом. н.-техн. сб. нац. ун-та «Львовская политехника». 2011. Вып. 45. С. 478–488. Режим доступа: http://www.nbuu.gov.ua/old_jrn/natural/Avtomatyzac/2011_45/77.pdf (дата обращения 05.06.2012).
13. Горбенко А.Н. Массо-инерционные характеристики и безразмерные уравнения движения двухопорного ротора с автобалансиrom с учетом массы компенсирующих грузов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 12. С. 266–294. DOI: [10.7463/1215.0827773](https://doi.org/10.7463/1215.0827773)
14. Вибрации в технике: справочник. В 6 т. Том 3: Колебания машин, конструкций и их элементов / Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1980. 544 с.
15. Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т., Гусаров А.А. Колебания машин. М.: Машиностроение, 1964. 308 с.
16. Genta G. Dynamics of rotating systems. N. Y.: Springer, 2005. 658 p.
17. Горбенко А.Н. О динамических свойствах несимметрично установленного ротора с инерционной анизотропией // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. Том 3. № 7(69). С. 8–17. DOI: [10.15587/1729-4061.2014.24484](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.24484)
18. Корн Г. ., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с. [Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. N.Y.: McGraw-Hill, 1961. 943 p.].
19. Нормы прочности авиационных газотурбинных двигателей гражданской авиации. М.: ЦИАМ, 2004. 260 с.
20. Пирогова Н.С., Тараненко П.А. Расчетно-экспериментальный анализ собственных и критических частот и форм высокооборотного ротора микрогазотурбинной установки

// Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Серия «Машиностроение». 2015. Т. 15. № 3.
С. 37–47.

21. Правила классификации и постройки морских судов. 18-е изд. Т. 2. СПб.: Российский морской регистр судоходства, 2015. 753 с.

Auto-balancer Influence on the Critical Speeds of Rotor on Two Supports

A.N. Gorbenko^{1,*}

[*gan0941@yandex.ru](mailto:gan0941@yandex.ru)

¹Kerch State Marine Technology University, Kerch, Russia

Keywords: rotor, autobalancer, critical speeds, spectrum, equations of motion, anisotropy

The paper analyses the influence of the auto-balancer mass on the critical speed of rotor, being in spatial movement. The problem is considered taking into account the fact that the auto-balancer and imbalance masses can be comparable to the rotor mass. Account for this factor in the motion equations is what makes this work different from the existing theory of rotors.

It is found that mounting an auto-balancer on the rotor leads to qualitative and quantitative changes in the range of critical speeds. The compensating bodies of the auto-balancer change the inertia moments of the composite rotor and make the rotor inertia anisotropic. The analysis has shown that even a small mass of the auto-balancer bodies can create a significant anisotropy. As a result, there is the doubling (splitting) number of critical speeds of the rotor with auto-balancer compared with the initial isotropic rotor without auto-balancer.

Analysis of the system frequency equation allowed us to obtain both an analytically exact formula for critical speeds with an arbitrary located rotor with respect to the supports and the formulas for particular cases. An influence of the system parameters has been analyzed in detail. It is found that in general case an anisotropic inertia rotor with auto-balancer has from one to four critical speeds of direct precession depending on the rotor-type, its mounting scheme on the supports and the degree of anisotropy, which depends on the auto-balancer and imbalance parameters. It is shown that the critical speeds of angular oscillation of long and spherical rotor types are most sensitive to this factor.

It is shown that when using the multibody auto-balancer, the values of critical speeds are of the interval nature, i.e. are determined in the certain ranges of values rather than ambiguously. This specific feature is the result of ambiguous position of bodies in the multibody auto-balancer in the basic mode of movement.

The criterion proposed in the paper allows us to make the quantitative estimate of the influence degree of the auto-balancer mass on the dynamic properties of the rotor system and draw a reasonable conclusion that an account for this factor in its model of movement is necessary.

The results obtained in this work will be useful in designing, selection of parameter values and operation of rotary machines with auto-balancing devices.

References

1. Nesterenko V.P. *Avtomaticheskaiya balansirovka rotorov priborov i mashin so mnogimi stepeniami svobody* [Automatic balancing of rotor of devices and machines with many degrees of freedom]. Tomsk: Tomsk univ. publ., 1985. 84 p. (in Russian).
2. Filimonihin G.B. *Zrivnovazhennya i vibrozahist rotoriv avtobalansirami z tverdimi korigoval'nimi vantazhami* [Balancing and vibration protection of rotors by autobalancers with solid corrective weights]. Kirovograd: KNTU, 2004. 352 p. (in Ukrainian).
3. Gorbenko A.N. On the stability of self-balancing of a rotor with the help of balls. *Strength of Materials*, 2003, Vol. 35, iss. 3, pp. 305–312. DOI: [10.1023/A:1024621023821](https://doi.org/10.1023/A:1024621023821)
4. Green K, Champneys A.R., Friswell M.I., Munoz A.M. Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanisms for eccentric rotors. *Philosophical Transactions of the Royal Society. Ser. A.*, 2008, vol. 366, № 1866, pp. 705-728. DOI: [10.1098/rsta.2007.2123](https://doi.org/10.1098/rsta.2007.2123)
5. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, iss. 6, pp. 527-541. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002)
6. Lu C.-J., Wang M.-C.; Huang S.-H. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, vol. 23, iss. 3, pp. 884-896. DOI: [10.1016/j.ymsp.2008.06.008](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.06.008)
7. Iatsun V.V. Mathematical model of axial fan impeller balancing by ball autobalancers. *Naukovij visnik Nacional'nogo girnichogo universitetu (Dnipropetrovs'k)* [Scientific Bulletin of National Mining University] (Dnepropetrovsk), 2009, no. 9, pp. 11-18. Available at: http://www.nbu.gov.ua/old_jrn/natural/Nvngu/2009_9/Yatsun.pdf, accessed 19.11.2010. (in Ukrainian).
8. Bykov V.G. Compensating of statically and dynamically unbalanced rotor by single-plane auto-balancing device. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser.1: Matematika, mekhanika, astronomiia* [Bulletin of St. Petersburg State Univ. Ser.1: Mathematics, mechanics, astronomy], 2009, no. 4, pp. 67-76. (in Russian).
9. Dubovik V.A., Ziyakaev G.R. The main movement of the two pendulum autobalancer on the flexible shaft with elastic supports. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta* [Proc. of the Tomsk polytechnic univ.], 2010, vol. 317, no. 2, pp. 37-39. (in Russian).
10. Bykov V.G. Auto-balancing of a rotor with an orthotropic elastic shaft. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 4, pp. 369-379. (English translation: *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*). DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2013.11.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.005)
11. Filimonihin G.B., Goncharov V.V. Auto-balancing of the rotor in a viscous-elastic fixed housing, which makes spatial motion. *Izvestiia Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Matematika i mekhanika. Fizika.* [Bulletin of the Tomsk polytechnic university. Mathematics and Mechanics. Physics], 2014, vol. 325, no. 2, pp. 41-49 (in Russian).

12. Filimonihin G.B., Gorbenko A.N. Vliianie massy sharov avtobalansira na strukturu uravnenij dvizheniia dvukhopornogo rotora [Effect of the balls mass of the autobalancer on structure of the motion equations of the rotor on two supports]. *Avtomatizaciya proizvodstvennyh processov v mashinostroenii i priborostroenii: Ukrainskij mezhdedom. n.-tekhn. sb. nac. un-ta «L'vovskaya politehnika»* [Automation of production processes in mechanical engineering and instrument: Ukrainian interdepartmental scientific and technical collection of the National University «Lviv Polytechnic»], 2011, vol. 45, pp. 478-488. Available at: http://www.nbu.gov.ua/old_jrn/natural/Avtomatyzac/2011_45/77.pdf, accessed 05.06.2012. (in Russian).
13. Gorbenko A.N. Mass-inertial characteristics and dimensionless equations of two-bearing rotor motion with auto-balancer in terms of compensating body mass. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2015, no. 12, pp. 266–294. DOI: [10.7463/1215.0827773](https://doi.org/10.7463/1215.0827773) (in Russian).
14. *Vibratsii v tekhnike: spravochnik. T.3: Kolebaniia mashin, konstruksij I ikh elementov* [Vibrations in the technique: Handb. in 6 vols. Vol. 3: Oscillations machines, designs and their elements]. Ed. by F.M. Dimentberg and K.S. Kolesnikov. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 544 p. (in Russian).
15. Dimentberg F. M., Shatalov K. T., Gusarov A. A. Oscillations of machines. Moscow: Mashinostroenie, 1964. 308 p. (in Russian).
16. Genta G. Dynamics of rotating systems. N.Y.: Springer, 2005. 658 p.
17. Gorbenko A.N. On the dynamic properties of the asymmetrically mounted rotor with inertial anisotropy. *Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tekhnologij* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies], 2014, vol. 3, no. 7(69), pp. 8-17. DOI: [10.15587/1729-4061.2014.24484](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.24484) . (in Russian).
18. Korn, G., Korn, T. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzheneov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers]. Moscow: Nauka Publ., 1968. 720 p. (in Russian).
19. *Normy prochnosti aviatsionnykh gazoturbinnnykh dvigatelej grazhdanskoj aviatsii* [Standart on strength of gas-turbine propulsion in aviation]. Moscow: TSIAM Publ., 2004. 260 p. (in Russian).
20. Pirogova N.S., Taranenko P.A. Calculated-Experimental Analysis of the Natural and Critical Frequencies and Mode Shapes High-Speed of Rotors Micro Gas Turbine Unit. *Vestnik Yuzhnoural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.:Mashinostroenie* [Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry], 2015, vol. 15, no. 3, pp. 37–47 (in Russian).
21. *Pravila klassifikatsii i postrojki morskikh sudov. Vol.2* [Rules for the Classification and Construction of Sea-Going Ships. Vol. II]. Saint-Petersburg: Russian Maritime Register of Shipping, 2015. 753 p. (in Russian).