

УДК 531.38

## Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде, совершающем в плоское движение

Вин К. К.<sup>1,\*</sup>, Темнов А. Н.<sup>1</sup>

\* [win.c.latt@gmail.com](mailto:win.c.latt@gmail.com)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

Задача о малых колебаниях несжимаемых идеальных жидкостей, полностью заполняющих цилиндрический бак, который совершает плоское движение, рассматривалась многими авторами, где приведены большие библиографии работ по данной теме. В предлагаемой статье получены уравнения движения твёрдого тела, имеющего полость произвольной осесимметричной формы целиком заполненной тремя однородными идеальными несжимаемыми жидкостями разных плотностей. В качестве примера приведены уравнения движения твёрдого тела с полостью цилиндрической формы. Колебания трёх несжимаемых жидкостей, заполняющих полностью цилиндрическую полость неподвижного твёрдого тела рассматривались в работе[16]. В данной статье приведены также результаты расчетов присоединённых масс и присоединённых моментов инерции.

**Ключевые слова:** подвижное твёрдое тело, колебания жидкостей, обобщенные координаты, теоремы об изменении количества движения и об изменении момента количества относительного движения, момент инерции

---

### Введение

В последнее время в связи с развитием газовой промышленности, криогенной и ракетной космической техники, общего машиностроения в значительной степени возрос интерес к исследованию динамики твёрдых тел, имеющих полости частично или полностью заполненных неоднородными жидкостями. Одной из используемых моделей подобной жидкости может являться дискретно-стратифицированная жидкость, представляющая собой совокупность слоёв несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Колебаниям стратифицированных и несмешивающихся жидкостей посвящено достаточно большое количество работ см. например [2]-[18].

В предлагаемой статье рассмотрены колебания твёрдого тела с полостью, содержащей три идеальные жидкости. Получены дифференциальные уравнения движения, отражающие как колебания поверхностей раздела жидкостей, так и колебания самого твёрдого тела.

# 1. Постановка задачи о движении жидкостей в полости подвижного твёрдого тела

Рассмотрим малые движения твёрдого тела, имеющего полость, содержащую три невязкие несмешивающиеся жидкости, полностью заполняющие полость. Введем системы координат  $O_i x_i y_i z_i (i = 0, 1, 2)$  с началами координат, расположенных на поверхностях разделов жидкостей и на дне, и систему координат  $Oxyz$  с началом в полюсе  $O$  (см. рис.1).

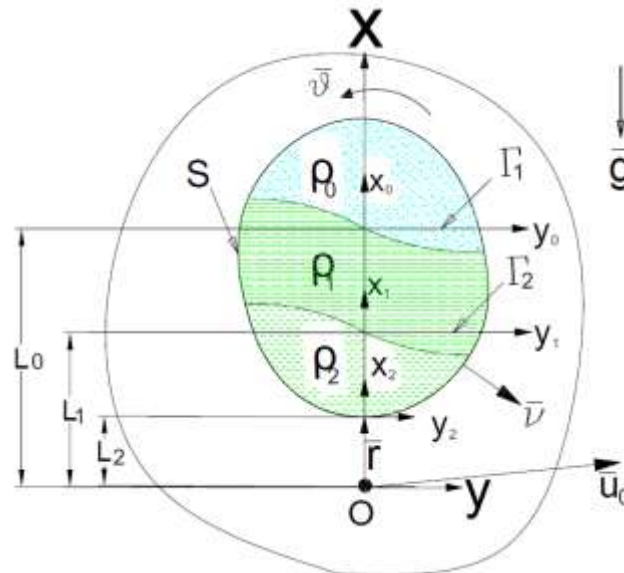


Рис. 1

Обозначим через  $\rho_i (i = 0, 1, 2)$  - плотности слоев жидкостей, через  $h_i (i = 0, 1, 2)$  – глубины слоев жидкостей. При решении задачи примем следующие допущения:

- перемещения и скорости всех частиц жидкостей есть малые величины в том смысле, что произведениями и квадратами их можно пренебречь по сравнению со значениями любой из этих величин;
- движение каждой жидкости в отдельности является потенциальным.

Вследствие сделанных допущений малые движения трёх жидкостей могут быть описаны уравнениями Лапласа для потенциалов смещений частиц жидкостей [16].

$$\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial z_i^2} = 0 \text{ на } \Omega_i, (i = 0, 1, 2) \quad (1)$$

Здесь  $\chi_i (x_i, y_i, z_i, t), (i = 0, 1, 2)$  – потенциалы смещений частиц жидкостей, связанные с соответствующими потенциалами скоростей  $\Phi_i (x_i, y_i, z_i, t)$ , формулами  $\Phi_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t}$ , поле смещений частиц жидкостей запишется в виде  $-\vec{w}^{(i)} (x_i, y_i, z_i, t) = \nabla \chi_i$ , где  $\nabla$  – оператор Гамильтона.

Потенциалы  $\chi_i(x_i, y_i, z_i, t)$ ,  $(i=0,1,2)$  должны удовлетворять следующим граничным условиям:

а) условиям непротекания на смачиваемых поверхностях

$$\left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \nu_i} \right|_{S_i} = \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nu}_i; \text{ на } S_i \quad (2)$$

где

$$\vec{u}_\varepsilon = \vec{u}_0 + \vec{\theta} \times \vec{r}, \quad \vec{u}_0 = (0, u, 0), \quad \theta = (0, 0, \vartheta)$$

б) кинематическим условиям на поверхностях разделов

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial \nu_0} = \frac{\partial \chi_1}{\partial \nu_1}; \text{ на } \Gamma_1 \text{ и } \frac{\partial \chi_1}{\partial \nu_1} = \frac{\partial \chi_2}{\partial \nu_2}; \Gamma_2, \quad (3)$$

в) динамическим условиям на поверхностях разделов

$$\left( \rho_0 \cdot \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial t^2} - \rho_1 \cdot \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} \right) = (\rho_1 - \rho_0) \cdot g \cdot \frac{\partial \chi_0}{\partial \nu_0}; \text{ на } \Gamma_1, \quad (4)$$

$$\left( \rho_1 \cdot \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} - \rho_2 \cdot \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} \right) = (\rho_2 - \rho_1) \cdot g \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial \nu_1}; \text{ на } \Gamma_2, \quad (5)$$

Начальные условия для рассматриваемой задачи не являются необходимыми.

## 2. Постановка вспомогательных краевых задач и их решения

Для решения задачи представим потенциалы  $\chi_0$ ,  $\chi_1$  и  $\chi_2$  в виде:

$$\chi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{0n}(x_0, y_0, z_0) \sigma_{1n}(t) + \psi_0(x_0, y_0, z_0) \vartheta(t) + \vec{u}_0(t) \cdot \vec{r}_0; \quad (6)$$

$$\chi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{11n}(x_1, y_1, z_1) \sigma_{1n}(t) + \varphi_{12n}(x_1, y_1, z_1) \sigma_{2n}(t) + \psi_1(x_1, y_1, z_1) \vartheta(t) + \vec{u}_0(t) \cdot \vec{r}_1; \quad (7)$$

$$\chi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n}(x_2, y_2, z_2) \sigma_{2n}(t) + \psi_2(x_2, y_2, z_2) \vartheta(t) + \vec{u}_0(t) \cdot \vec{r}_2; \quad (8)$$

где:  $\sigma_{1n}(t)$  и  $\sigma_{2n}(t)$  - функции, описывающие волновые движения поверхностей разделов и  $\vartheta(t)$  - обобщенная координата, описывающая вращательное движение твёрдого тела относительно полюса О.  $\vec{u}_0(t) = (\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  - обобщенные координаты, соответствующие поступательному движению твёрдого тела.

Потенциалы  $\varphi_{0n}, \varphi_{11n}, \varphi_{12n}, \varphi_{2n}$  являются решениями краевых задач о колебаниях жидкостей в неподвижном баке и удовлетворяющие граничным условиям на смачиваемых поверхностях  $S_{ii}$ ,

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_i} \right|_{S_i} = 0, \text{ на } S_i, (i=0,1,2) \quad (9)$$

Потенциалы  $\varphi_{0n}, \varphi_{11n}, \varphi_{12n}, \varphi_{2n}$  были определены ранее и приведены в работе [16].

Потенциалы  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  являются решениями следующих краевых задач,

$$\Delta \psi_i = 0 \text{ на } \Omega_i, \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial v_i} \right|_{S_i} = (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \cdot \vec{e}_{i3}, \text{ на } S_i, (i=0,1,2) \quad (10)$$

и определяются, как было предложено Н. Е. Жуковским, а векторы  $\vec{r}_i$  имеют начало в точке О,

$$\vec{r}_i = (L_i + x_i) \vec{e}_{i1} + y_i \vec{e}_{i2} + z_i \vec{e}_{i3}, \vec{e}_{i3}$$

- единичные векторы, перпендикулярные к плоскости движения.

Выполняя все граничные условия на смачиваемых поверхностях и поверхностях разделов, получаем выражения для потенциалов Жуковского  $\psi_0, \psi_1$  и  $\psi_2$ , которые подставим в выражения (6), (7) и (8). Полученные решения для потенциалов  $\chi_0, \chi_1$  и  $\chi_2$  подставим в граничные условия (4) и (5), помножим полученное выражение на функцию  $\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial v_i}$  и проинтегрируем по площадям поверхностей разделов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . В результате получим уравнения движения для обобщенных координат  $\sigma_{1n}(t)$  и  $\sigma_{2n}(t)$  колебаний на поверхностях разделов.

$$\mu_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + C_{1n} \sigma_{1n} + \bar{\lambda}_{1n\vartheta} \ddot{\vartheta} + \lambda_{1n\sigma 2} \ddot{\sigma}_{2n} + \bar{\lambda}_{1n\vartheta} \ddot{\vartheta} + \bar{\lambda}_{1nu} \ddot{u} = 0, (n=1,2,3,...); \quad (11)$$

$$\mu_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} + C_{2n} \sigma_{2n} + \bar{\lambda}_{2n\vartheta} \ddot{\vartheta} + \lambda_{2n\sigma 1} \ddot{\sigma}_{1n} + \bar{\lambda}_{2n\vartheta} \ddot{\vartheta} + \bar{\lambda}_{2nu} \ddot{u} = 0, (n=1,2,3,...); \quad (12)$$

где;

$$\mu_{1n}, \mu_{2n}, C_{1n}, C_{2n}, \bar{\lambda}_{1n\vartheta}, \bar{\lambda}_{2n\vartheta}, \lambda_{1n\sigma 2}, \lambda_{2n\sigma 1}, \bar{\lambda}_{1n\vartheta}, \bar{\lambda}_{2n\vartheta}, \bar{\lambda}_{1nu}, \bar{\lambda}_{2nu}$$

-гидродинамические коэффициенты, определяемые формулами

$$\mu_{1n} = \int_{\Gamma_1} \left. \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \right|_{x_0=0} \left( \rho_0 \varphi_{0n}(x_0, y, z) \Big|_{x_0=0} + \rho_1 \varphi_{11n}(x_1, y, z) \Big|_{x_1=h_1} \right) d\Gamma_1, \quad (13)$$

$$\mu_{2n} = \int_{\Gamma_2} \left. \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \right|_{x_1=0} \left( \rho_1 \varphi_{12n}(x_1, y, z) \Big|_{x_1=0} + \rho_2 \varphi_{2n}(x_2, y, z) \Big|_{x_2=h_2} \right) d\Gamma_2, \quad (14)$$

$$C_{1n} = \int_{\Gamma_1} (\rho_0 - \rho_1) g \left( \left. \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_1} \right|_{x_0=0} \right)^2 d\Gamma_1, \quad (15)$$

$$C_{2n} = \int_{\Gamma_2} (\rho_1 - \rho_2) g \left. \frac{\partial \varphi_{12n}(x_1, y, z)}{\partial v_2} \right|_{x_1=0} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \right|_{x_1=0} d\Gamma_2, \quad (16)$$

$$\bar{\lambda}_{1ns} = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} \left( \rho_0 \bar{\psi}_0(x_0, y, z) \Big|_{x_0=0} + \rho_1 \bar{\psi}_1(x_1, y, z) \Big|_{x_1=\bar{r}_1} \right) d\Gamma_1, \quad (17)$$

$$\bar{\lambda}_{2ns} = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \varphi_{1n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \Big|_{x_1=0} \left( \rho_1 \bar{\psi}_1(x_1, y, z) \Big|_{x_1=0} + \rho_2 \bar{\psi}_2(x_2, y, z) \Big|_{x_2=\bar{r}_2} \right) d\Gamma_2, \quad (18)$$

$$\lambda_{1ns} = \int_{\Gamma_1} \rho_1 \varphi_{12n}(x_1, y, z) \Big|_{x_1=\bar{r}_1} \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} d\Gamma_1, \quad (19)$$

$$\lambda_{2ns} = \int_{\Gamma_2} \rho_1 \varphi_{11n}(x_1, y, z) \Big|_{x_1=0} \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \Big|_{x_1=0} d\Gamma_2$$

$$\bar{\lambda}_{1ni} = \int_{\Gamma_1} (\rho_0 - \rho_1) \bar{r}_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} d\Gamma_1, \quad \bar{\lambda}_{2ni} = \int_{\Gamma_2} (\rho_1 - \rho_2) \bar{r}_{\Gamma_2} \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \Big|_{x_1=0} d\Gamma_2, \quad (20)$$

где,  $\bar{r}_{\Gamma_1}$  и  $\bar{r}_{\Gamma_2}$  - радиус – векторы, принимающие значения на поверхностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

$$\bar{\lambda}_{1ns} = \int_{\Gamma_1} (\rho_0 - \rho_1) g \frac{\partial \bar{\psi}_0(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} d\Gamma_1, \quad (21)$$

$$\bar{\lambda}_{2ns} = \int_{\Gamma_2} (\rho_1 - \rho_2) g \frac{\partial \bar{\psi}_0(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_1=0} d\Gamma_2, \quad (22)$$

### 3. Уравнения движения твердого тела с полостью, содержащей три жидкости.

Для составления уравнений движения твердого тела с жидкостями воспользуемся теоремами об изменении количества движения и об изменении момента количества относительного движения материальной системы твёрдое тело – жидкость, записанными в виде

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}^{(*)}$$

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \bar{M}_o^{(*)} + \bar{r}_{ky} \times m_k \delta \bar{g} + \bar{M}_o(-M\ddot{u}) + \delta(\bar{r}_{0c} \times m_0 \bar{g}) + \delta(\bar{r}_{1c} \times m_1 \bar{g}) + \delta(\bar{r}_{2c} \times m_2 \bar{g}) \quad (23)$$

где  $\bar{Q}$  - количество движения рассматриваемой механической системы в локально неподвижной системе отсчёта

$$\bar{Q} = M\dot{u} + M\dot{r}_c + m_0 \delta \dot{r}_{c0} + m_1 \delta \dot{r}_{c1} + m_2 \delta \dot{r}_{c2}, \quad (24)$$

$\bar{K}_o$  - момент количества относительного движения тела с жидкостью в связанной системе отсчёта  $Oxyz$ .

$$\bar{K}_o = J_k \cdot \dot{\bar{\theta}} + \rho_0 \int_{\tau_0} \bar{r}_0 \times \nabla \frac{\partial \chi_0}{\partial t} d\tau_0 + \rho_1 \int_{\tau_1} \bar{r}_1 \times \nabla \frac{\partial \chi_1}{\partial t} d\tau_1 + \rho_2 \int_{\tau_2} \bar{r}_2 \times \nabla \frac{\partial \chi_2}{\partial t} d\tau_2, \quad (25)$$

где  $M = m_k + m_0 + m_1 + m_2$  - масса твёрдого тела и жидкостей соответственно,

$$\vec{S} = M \cdot \vec{x}_c$$

-вектор статического момента всей гидромеханической системы,

$$\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$$

- радиус вектор центра масс твёрдого тела и затвердевших жидкостей,

$\vec{r}_{kl}$  - радиус вектор центра масс твёрдого тела,

$\vec{F}^{(e)}$  - главный вектор всех внешних сил приложенных к телу,

$M_o^{(e)}$  - главный момент всех внешних сил относительно полюса О,

$$\vec{M}_o(-M\ddot{u})$$

- момент сил инерции относительно полюса,

$J_k$  - тензор моментов инерции твёрдого тела относительно полюса О.

В уравнении (24)  $\delta\vec{r}_{Ci}$  - изменения положения центра масс каждой жидкости в возмущённом движении, определяемые формулами ( $i = 0, 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \delta\vec{r}_{Ci} &= \frac{\rho_i \int_{\tau_i} \delta\vec{r}_i d\tau_i}{m_i} = \frac{\rho_i \int_{\tau_i} \vec{w}_i^{(r)} d\tau_i}{m_i} = \frac{\rho_i \int_{\tau_i} \vec{w}_i^{(r)} \cdot \nabla \vec{r}_i d\tau_i}{m_i} = \frac{\rho_i \int_{\tau_i} \nabla \cdot (\vec{r}_i \vec{w}_i^{(r)}) d\tau_i}{m_i} = \frac{\rho_i \oint_{S_i \cap \Gamma_{1,2}} \vec{r}_i \vec{w}_i^{(r)} dS_i}{m_i} = \\ &= \frac{\rho_i \int_{\Gamma_{1,2}} \vec{r}_i \vec{w}_i^{(r)} d\Gamma_{1,2}}{m_i}, \end{aligned} \quad (26)$$

$\vec{w}_i^{(r)}$  - вектор относительного смещения частиц i-ой жидкости

$$\vec{w}_i^{(r)} = \nabla \chi_i - \vec{\theta} \times \vec{r}_i = \nabla(\vec{\theta} \cdot \vec{\psi}_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{1,2n} \nabla \varphi_{1n}^{(k)}(x_i, y_i, z_i) - \vec{\theta} \times \vec{r}_i, \quad (27)$$

Подставив  $\vec{w}_i^{(r)}$  в выражение для  $\delta\vec{r}_{Ci}$ , и принимая во внимание условия жёсткой крышки и малость колебаний, получим выражение для вектора количества движения рассматриваемой гидромеханической системы.

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= M\dot{\vec{u}} + M\dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_c + \rho_0 \int_{\Gamma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{r}_0 \dot{\sigma}_{1n}(t) \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{r}_1 \dot{\sigma}_{1n}(t) \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial v_1} d\Gamma_1 \\ &+ \rho_1 \int_{\Gamma_2} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{r}_1 \dot{\sigma}_{2n}(t) \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_1} d\Gamma_2 + \rho_2 \int_{\Gamma_2} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{r}_2 \dot{\sigma}_{2n}(t) \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (28)$$

Используя теорему об изменении количества движения, окончательно получим

$$M\ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{\theta}} \times \vec{S} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} = \vec{F}^{(e)}, \quad \vec{S} = M\vec{r}_c, \quad (29)$$

$$\vec{\lambda}_{1n} = \rho_0 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 - \rho_1 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial v_1} d\Gamma_1 = \vec{\lambda}_{1n\Omega}, \quad \vec{\lambda}_{2n} = \rho_1 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_1} d\Gamma_2 - \rho_2 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 = \vec{\lambda}_{2n\Omega} \quad (30)$$

так как на поверхностях разделов  $\Gamma_1, \Gamma_2$  векторы  $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$  принимают значения  $\vec{r}_{\Gamma_1}$  и  $\vec{r}_{\Gamma_2}$  соответственно и выполняются кинематические соотношения в работе [16].



В уравнении (29) принято, что в условиях малых колебаний,

$$\dot{\vec{r}}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}_c}{dt} + \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_c = \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_c, \text{ т.к. } \frac{\tilde{d}\vec{r}_c}{dt} = 0, \quad (31)$$

Преобразуем выражение для кинетического момента. Используя представление для потенциалов  $\chi_i(x_i, y, z, t)$ , формулы Грина и принимая во внимание граничные условия (9) и (10) и получим

$$\begin{aligned} \rho_0 \int_{\tau_0} \vec{r}_0 \times \nabla \frac{\partial \chi_0}{\partial t} d\tau_0 &= \rho_0 \oint_{S_0} \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \frac{\partial \chi_0}{\partial t} dS_0 = \rho_0 \oint_{S_0} \frac{\partial \vec{\psi}_0}{\partial v_0} \frac{\partial \chi_0}{\partial t} dS_0 = \\ &= \rho_0 \int_{S_0} \frac{\partial \vec{\psi}_0}{\partial v_0} (\vec{\psi}_0 \cdot \dot{\vec{\theta}}) dS_0 + \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_0} \dot{\sigma}_{1n} \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 = J_0 \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_0 \dot{\sigma}_{1n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_0} \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{\tau_1} \vec{r}_1 \times \nabla \frac{\partial \chi_1}{\partial t} d\tau_1 &= \rho_1 \oint_{S_1} \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial t} dS_1 = \rho_1 \oint_{S_1} \frac{\partial \vec{\psi}_1}{\partial v_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial t} dS_1 = \\ &= \rho_1 \int_{S_1} \frac{\partial \vec{\psi}_1}{\partial v_1} (\vec{\psi}_1 \cdot \dot{\vec{\theta}}) dS_1 + \rho_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \dot{\sigma}_{1n} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial v_1} d\Gamma_1 + \rho_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \dot{\sigma}_{2n} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 = \\ &= J_1 \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_1 \dot{\sigma}_{1n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial v_1} d\Gamma_1 + \rho_1 \dot{\sigma}_{2n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\tau_2} \vec{r}_2 \times \nabla \frac{\partial \chi_2}{\partial t} d\tau_2 &= \rho_2 \oint_{S_2} \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial t} dS_2 = \rho_2 \oint_{S_2} \frac{\partial \vec{\psi}_2}{\partial v_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial t} dS_2 = \\ &= \rho_2 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{\psi}_2}{\partial v_2} (\vec{\psi}_2 \cdot \dot{\vec{\theta}}) dS_2 + \rho_2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \dot{\sigma}_{2n} \vec{\psi}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 = J_2 \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_2 \dot{\sigma}_{2n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (34)$$

где  $J_i$  ( $i=0,1,2$ ) - тензоры присоединённых моментов инерции  $i$ -ой жидкости относительно полюса О, которые с учётом граничного условия “жёсткой” крышки совпадают с тензорами моментов инерции эквивалентного тела. Для получения момента сил инерции и момента сил давления со стороны жидкости преобразуем выражение в правой части (23).

Используя выражения (25), (27), (32), (33) и (34) преобразуем уравнение изменения момента количеств движения. В результате уравнение вращательного движения твердого с полостью, наполненной тремя жидкостями, принимает вид

$$\begin{aligned} \left( J_k + \sum_{i=0}^2 (J_i + \sum_{n=1}^{\infty} J_{in}) \right) \cdot \ddot{\vec{\theta}} + g(\vec{S} \times \vec{\theta}) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + g \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{1n}^* \sigma_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} + g \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{2n}^* \sigma_{2n} + \\ + \vec{S} \times \ddot{\vec{u}} = \vec{M}_o^{(\theta)}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{Где: } \bar{\gamma}_{1n} = \rho_0 \int_{\Gamma_0} \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_1} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial v_1} d\Gamma_1, \bar{\gamma}_{2n} = \rho_1 \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 + \rho_2 \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 \quad (36)$$

$$\bar{\gamma}_{1n}^* = \rho_0 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial v_1} d\Gamma_1, \bar{\gamma}_{2n}^* = \rho_2 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 + \rho_1 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_2} d\Gamma_2, \quad (37)$$

#### 4. Исследование движения твердого тела, имеющего цилиндрическую полость

Рассмотрим твердое тело, совершающее плоское движение, и имеющее цилиндрическую полость. Используя в цилиндрические системы координат  $O_i x_i r \eta$  ( $i = 0, 1, 2$ ), получим следующие выражения для потенциалов  $\psi_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ).

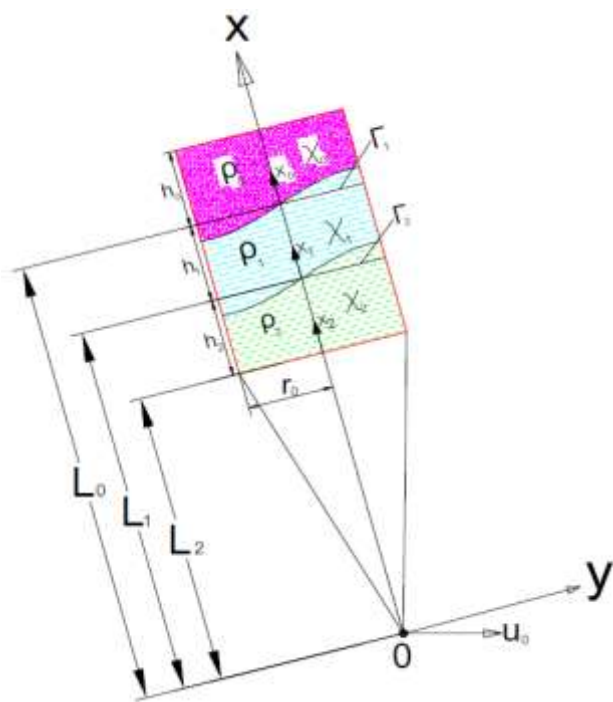


Рис. 2

$$\psi_0 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left[ \frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left( x_0 - \frac{h_0}{2} \right)}{ch k_n \left( \frac{h_0}{2} \right)} - (L_0 + x_0) \right]; \quad (38)$$

$$\psi_1 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left[ \frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left( x_1 - \frac{h_1}{2} \right)}{ch k_n \left( \frac{h_1}{2} \right)} - (L_1 + x_1) \right]; \quad (39)$$

$$\psi_2 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left[ \frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left( x_2 - \frac{h_2}{2} \right)}{ch k_n \left( \frac{h_2}{2} \right)} - (L_2 + x_2) \right]; \quad (40)$$

Подставляя результаты (38-40) в выражения для потенциалов  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2$ )



$$\chi_0 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \left[ \frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left( x_0 - \frac{h_0}{2} \right)}{chk_n \left( \frac{h_0}{2} \right)} - (L_0 + x_0) \right] \vartheta(t) + u(t) + \right. \\ \left. + thk_n h_1 \cdot \frac{chk_n(x_0 - h_0)}{shk_n h_0} \sigma_{1n}(t) \right\}, \quad (41)$$

$$\chi_1 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \left[ \frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left( x_1 - \frac{h_1}{2} \right)}{chk_n \left( \frac{h_1}{2} \right)} - (L_1 + x_1) \right] \vartheta(t) + u(t) - \right. \\ \left. - thk_n h_1 \cdot \frac{chk_n x_1}{shk_n h_1} \sigma_{1n}(t) + \frac{chk_n(x_1 - h_1)}{chk_n h_1} \sigma_{2n}(t) \right\}, \quad (42)$$

$$\chi_2 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \left[ \frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left( x_2 - \frac{h_2}{2} \right)}{chk_n \left( \frac{h_2}{2} \right)} - (L_2 + x_2) \right] \vartheta(t) + \right. \\ \left. + u(t) - thk_n h_1 \cdot \frac{chk_n x_2}{shk_n h_2} \sigma_{2n}(t) \right\}, \quad (43)$$

Для получения уравнений движения в обобщенных координатах  $(u, \vartheta, \sigma_{1n}, \sigma_{2n})$  твердого тела цилиндрической полостью подставим потенциалы  $\psi_i$  и функцию  $\varphi_{in}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) в формулы для гидродинамических коэффициентов (13-22), (30) и (36-37). После интегрирования получим

$$\mu_{1n} = (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}), \mu_{2n} = (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}), C_{1n} = (m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2, C_{2n} = (m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2, \quad (44)$$

$$\lambda_{1n\ddot{\vartheta}} = L'_{1n}, \lambda_{2n\ddot{\vartheta}} = L'_{2n}, \lambda_{1n\ddot{\sigma}_2} = -\frac{m'_{1n}}{chk_n h_1}, \lambda_{2n\ddot{\sigma}_1} = -\frac{m'_{1n}}{chk_n h_1}, \lambda_{1n\ddot{u}} = (m'_{1n} - m'_{0n}), \lambda_{2n\ddot{u}} = (m'_{2n} - m'_{1n}), \quad (45)$$

$$\lambda_{1n\vartheta} = -(m'_{1n} - m'_{0n}) g, \lambda_{2n\vartheta} = -(m'_{2n} - m'_{1n}) g, \quad (46)$$

$$\lambda_{1n} = (m'_{1n} - m'_{0n}), \lambda_{2n} = (m'_{2n} - m'_{1n}), \gamma_{1n} = (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) L_{1n}, \gamma_{2n} = (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) L_{2n}, \quad (47)$$

$$\gamma_{1n}^* = -g(m'_{1n} - m'_{0n}), \gamma_{2n}^* = -g(m'_{2n} - m'_{1n}), \quad (48)$$

где  $m'_{0n} = \rho_0 V, m'_{1n} = \rho_1 V, m'_{2n} = \rho_2 V$  - приведенные массы колеблющихся жидкостей

$$V = \frac{2\pi r_0^3}{\xi_n(\xi_n^2 - 1)} thk_n h_1, \overline{f_{0n}} = thk_n h_1 cthk_n h_0, \overline{f_{1n}} = thk_n h_1 cthk_n h_2, \omega_n^2 = gk_n thk_n h_1, \quad (49)$$

$$L'_{1n} = \frac{m'_{1n} (L_0 - \frac{2r_0}{\xi_n} thk_n \frac{h_1}{2}) - m'_{0n} (L_0 + \frac{2r_0}{\xi_n} thk_n \frac{h_0}{2})}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})} \\ L'_{2n} = \frac{m'_{2n} (L_1 - \frac{2r_0}{\xi_n} thk_n \frac{h_2}{2}) - m'_{1n} (L_1 + \frac{2r_0}{\xi_n} thk_n \frac{h_1}{2})}{(m'_{2n} + m'_{1n} \overline{f_{1n}})}, \quad (50)$$

Подставив полученные гидродинамические коэффициенты в уравнения движения (11), (12), (29 и (35), получим дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела с цилиндрической полостью, заполненной тремя жидкостями,

$$\ddot{\sigma}_{1n} + \frac{(m'_{1n} - m'_{0n})}{(m'_{1n} + m'_{0n} f_{0n})} \omega_n^2 \sigma_{1n} + L'_{1n} \ddot{\vartheta} - \frac{m'_{1n} \ddot{\sigma}_{2n}}{(m'_{1n} + m'_{0n} f_{0n}) ch k_n h_1} - \frac{(m'_{1n} - m'_{0n})}{(m'_{1n} + m'_{0n} f_{0n})} g \vartheta - \frac{(m'_{1n} - m'_{0n})}{(m'_{1n} + m'_{0n} f_{0n})} \ddot{u} = 0, \quad (51)$$

$$\ddot{\sigma}_{2n} + \frac{(m'_{2n} - m'_{1n})}{(m'_{2n} f_{1n} + m'_{1n})} \omega_n^2 \sigma_{2n} + L'_{2n} \ddot{\vartheta} - \frac{m'_{1n} \ddot{\sigma}_{1n}}{(m'_{2n} f_{1n} + m'_{1n}) ch k_n h_1} - \frac{(m'_{2n} - m'_{1n})}{(m'_{2n} f_{1n} + m'_{1n})} g \vartheta - \frac{(m'_{2n} - m'_{1n})}{(m'_{2n} f_{1n} + m'_{1n})} \ddot{u} = 0, \quad (52)$$

$$M \ddot{u} - M x_c \ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \ddot{\sigma}_{2n} = F_y^{(e)}, \quad (53)$$

$$\left( I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \ddot{\vartheta} - S g \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) L_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} - g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \sigma_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) L_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} + \ddot{u} \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \sigma_{2n} - S \ddot{u} = M_o^{(e)}, \quad (54)$$

где

$$I_0 = m_0 (L_0^2 + L_0 h_0 + \frac{h_0^2}{3} + \frac{r_0^2}{4}) + m_1 (L_1^2 + L_1 h_1 + \frac{h_1^2}{3} + \frac{r_0^2}{4}) + m_2 (L_2^2 + L_2 h_2 + \frac{h_2^2}{3} + \frac{r_0^2}{4}) + m_k l_u^2; \quad (55)$$

$I_0$  - момент инерции затвердевающих жидкостей относительно оси, проходящей через точку О,  $l_u$  - радиус инерции твердого тела.

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \pi r_0^5 \rho_0 \left( -\frac{h_0}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} th k_n \frac{h_0}{2} \right) + \pi r_0^5 \rho_1 \left( -\frac{h_1}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} th k_n \frac{h_1}{2} \right) + \pi r_0^5 \rho_2 \left( -\frac{h_2}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} th k_n \frac{h_2}{2} \right), \quad (56)$$

$m_0 = \pi r_0^2 \rho_0 h_0$ ,  $m_1 = \pi r_0^2 \rho_1 h_1$ ,  $m_2 = \pi r_0^2 \rho_2 h_2$  - массы каждой жидкости

$S = m_0 (L_0 + \frac{h_0}{2}) + m_1 (L_1 + \frac{h_1}{2}) + m_2 (L_2 + \frac{h_2}{2}) + m_k l_u$ ; - статический момент всей системы

$M = m_0 + m_1 + m_2 + m_k$ ; - суммарная масса всей системы

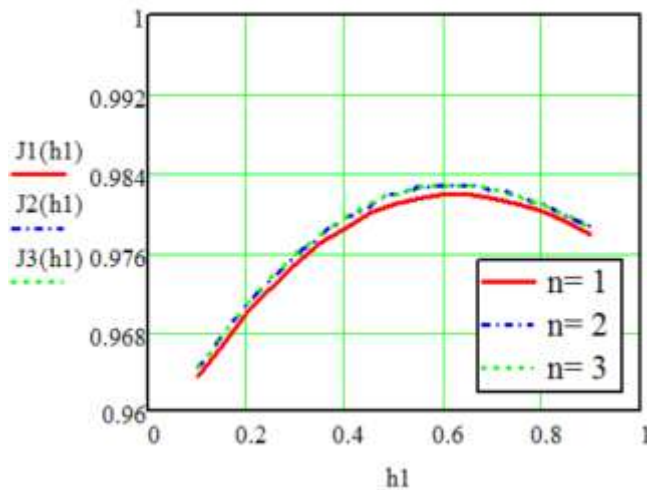
В безразмерном виде перепишется

$$J_n = \frac{\left( I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right)}{I_0}, \mu_{1n} = \frac{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})}{M}, \mu_{2n} = \frac{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})}{M}, L_{1n} = \frac{L'_{1n}}{r_0}, L_{2n} = \frac{L'_{2n}}{r_0} \quad (57)$$

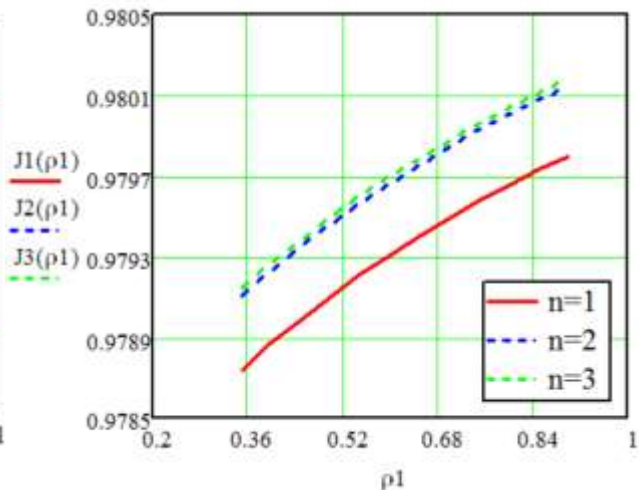
$J_n$  - момент инерции эквивалентного тела-тела, состоящего из трех жидкостей, разделенных двумя жесткими перегородками  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

$\mu_{1n}$  и  $\mu_{2n}$  - обобщенные массы жидкостей при колебаниях по n-ому тону и отвечающих верхней и нижней поверхностей разделов жидкостей.

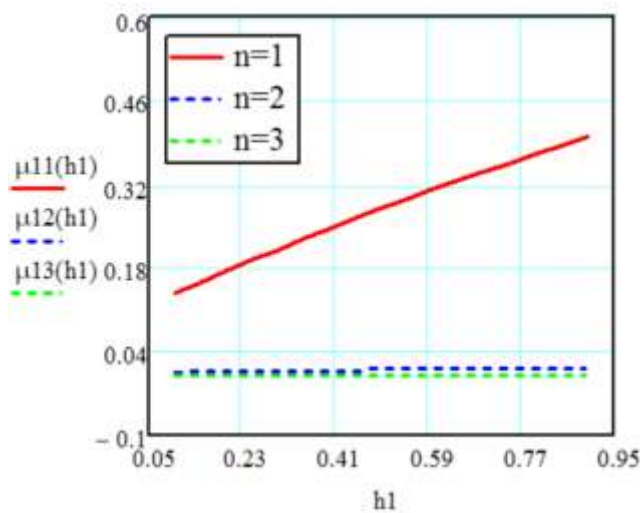
$L'_{1n}$  и  $L'_{2n}$  - плеча гидродинамических сил, возникающих при колебаниях верхней и нижней поверхностей разделов жидкостей.



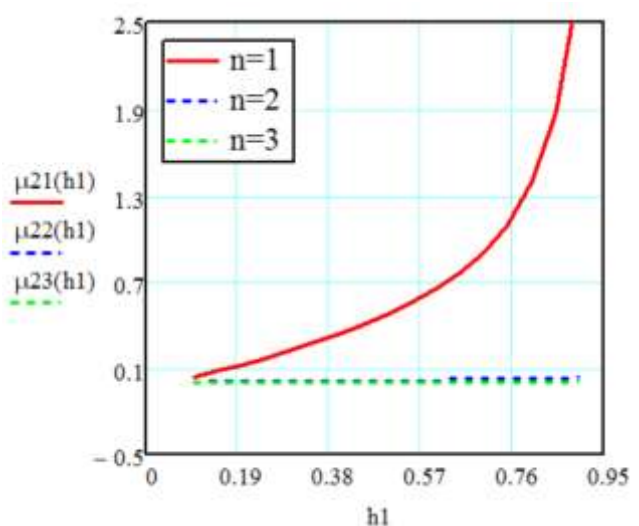
**Рис. 3.** Зависимость моментов инерции эквивалентного тела от глубины средней жидкости для  $n=1, 2, 3$ ,  $\bar{\rho}_0 = 0.3$ ,  $\bar{\rho}_1 = 0.5$ ,  $\bar{\rho}_2 = 1$ ,  $\bar{h}_0 = 1$ ,  $\bar{h}_2 = 1 - \bar{h}_1$ .



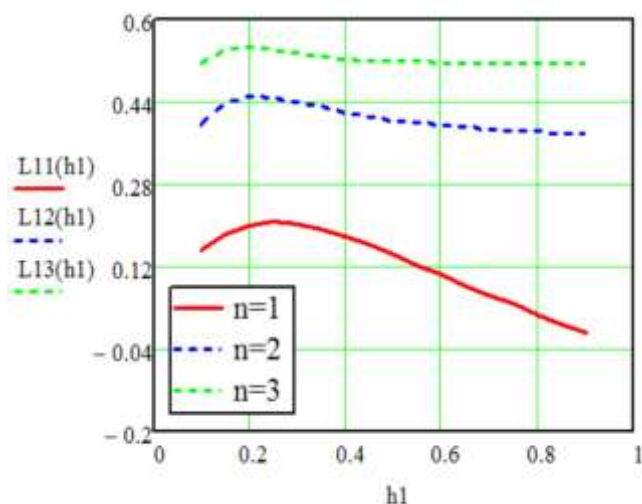
**Рис. 4.** Зависимость моментов инерции эквивалентного тела от плотности средней жидкости для  $n=1, 2, 3$ ,  $\bar{\rho}_0 = 0.3$ ,  $\bar{\rho}_2 = 1$ ,  $\bar{h}_0 = 1$ ,  $\bar{h}_1 = 1$ ,  $\bar{h}_2 = 1$ .



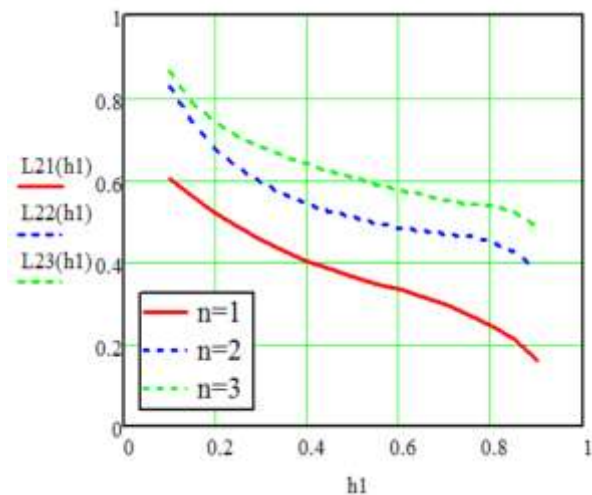
**Рис. 5.** Зависимость обобщенных масс жидкостей  $\Gamma_1$  от глубины средней жидкости для  $n=1, 2, 3$ ,  $\bar{\rho}_0 = 0.3$ ,  $\bar{\rho}_1 = 0.5$ ,  $\bar{\rho}_2 = 1$ ,  $\bar{h}_0 = 1$ ,  $\bar{h}_2 = 1 - \bar{h}_1$ .



**Рис. 6.** Зависимость обобщенных масс жидкостей  $\Gamma_2$  от глубины средней жидкости для  $n=1, 2, 3$ ,  $\bar{\rho}_0 = 0.3$ ,  $\bar{\rho}_1 = 0.5$ ,  $\bar{\rho}_2 = 1$ ,  $\bar{h}_0 = 1$ ,  $\bar{h}_2 = 1 - \bar{h}_1$ .



**Рис. 7.** Зависимость плеч гидродинамических сил, возникающих при колебаниях верхней поверхности радела  $\Gamma_1$  от глубины средней жидкости для  $n=1, 2, 3$ ,  $\bar{\rho}_0 = 0.3$ ,  $\bar{\rho}_1 = 0.5$ ,  $\bar{\rho}_2 = 1$ ,  $\bar{h}_0 = 1$ ,  $\bar{h}_2 = 1 - \bar{h}_1$ .



**Рис. 8.** Зависимость плеч гидродинамических сил, возникающих при колебаниях верхней поверхности радела  $\Gamma_2$  от глубины средней жидкости для  $n=1, 2, 3$ ,  $\bar{\rho}_0 = 0.3$ ,  $\bar{\rho}_1 = 0.5$ ,  $\bar{\rho}_2 = 1$ ,  $\bar{h}_0 = 1$ ,  $\bar{h}_2 = 1 - \bar{h}_1$ .

## Вывод

В работе получены уравнения движения твердого тела, имеющего полость произвольной формы, целиком заполненной тремя однородными идеальными несмешивающимися жидкостями. Для полости формы круглого цилиндра получены формулы для присоединенных масс и присоединенных моментов инерции и приведены результаты численных расчетов. Результаты работы могут быть использованы при проектировании транспортных систем с криогенными жидкостями или сжиженными газами.

## Список литературы

1. Чашечкин Ю.Д. Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 6(57). С. 67-95.
2. Ай Мин Вин. Колебания криогенной жидкости в неподвижном баке // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 9. С. 75-87.  
DOI: [10.7463/0914.0726215](https://doi.org/10.7463/0914.0726215)
3. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наукова думка, 1992. 592 с.
4. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Теоретическое и экспериментальное исследование параметрического возбуждения волн конечной амплитуды в

- двухслойной жидкости // Волны и дифракция. 9 Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Т. 2. Тбилиси: 1985. С. 53-56.
5. Темнов А.Н., Ай Мин Вин. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела. Инженерный журнал: наука и инновации. Электрон. журн. 2012. № 7(7). DOI: [10.18698/2308-6033-2012-7-291](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-7-291)
  6. Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. 547-556. DOI: [10.7463/1113.0619258](https://doi.org/10.7463/1113.0619258)
  7. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5(56). С. 109-116.
  8. Газиев Э.Л. Моделирование собственных колебаний системы «идеальная капиллярная жидкость-баротропный газ» в цилиндрическом контейнере // Крымская Международная Математическая Конференция (КММК-2013). Сборник тезисов. Т. 3. Симферополь, КНЦ НАНУ, 2013. С. 51-52.
  9. Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Инженерный журнал: наука и инновации. Электрон. журн. 2012. №7(7) DOI: [10.18698/2308-6033-2012-7-285](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-7-285)
  10. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном // Прикладная гидромеханика. 2008. №1. С.33-38.
  11. Mikhayluk A.V., Timokha A.N. Variational formulations for a spectral problem with parameter on the interface of two mediums // Dopov. Nats. Akad. Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. 1995. Vol. 45, № 10. Pp. 38-40.
  12. Попов Д.Н., Панаиотти С.С., Рябинин М.В. Гидромеханика (3-е издание). М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 320 с.
  13. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 185 с.
  14. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
  15. Калиниченко В.А., Со Аунг Наинг. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 12(24). DOI: [10.18698/2308-6033-2013-12-1138](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1138)
  16. Темнов А.Н., Вин Ко Ко. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги. Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. № 3. С. 57-69. DOI: [10.18698/1812-3368-2016-3-57-69](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-3-57-69)
  17. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Тимофеев А.С. Экспериментальное исследование поля скоростей параметрически возбуждаемых волн в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 161-166.

18. Темнов А.Н., Вин Ко Ко. Расчет колебаний дискретно-стратифицированных жидкостей методом конечных элементов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 5. С. 82-92. DOI: [10.7463/0516.0841210](https://doi.org/10.7463/0516.0841210)

## **Discrete Stratified Fluid Fluctuations in a Cylindrical Moving in-Plane Vessel**

**Ko Ko Win<sup>1,\*</sup>, A.N. Temnov<sup>1</sup>**

[\\*win.c.latt@gmail.com](mailto:win.c.latt@gmail.com)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

---

**Keywords:** moving solid body, vibrations of liquids, generalized coordinates, theorem of change of momentum and changing the date of the relative amounts of motion, the moment of inertia

---

A great deal of publications consider the problem of small fluctuations of incompressible ideal fluid, completely filling the cylindrical tank that is in-plane motion, giving a long list of references in the field concerned. The paper shows the equations of motion of a solid body with a cavity of the arbitrary shape completely filled by three homogeneous ideal incompressible fluids of different densities. As an example, the paper presents the equations of motion of the solid body with a cylindrical cavity. Fluctuations of three incompressible fluids filling completely a cylindrical cavity of the immovable solid body are considered in [18]. The paper gives the calculation results of attached mass and added mass moments of inertia.

We obtained the equations of motion of the solid body having a cavity of the arbitrary shape, completely filled by three homogeneous ideal immiscible fluids. For the cavity of a circular cylinder the formulas for attached mass and added moments of inertia are given and the results of numerical calculations are presented. The results obtained can be used in designing the transport systems with cryogenic liquids or liquefied gases. All numerical calculations were obtained using a Mathcad computer program.

### **References**

1. Chashechkin Yu.D. Fluid Mechanics: Consistent Analytical, Numerical and Laboratory Models of Stratified Flows. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering, 2014, no. 6(57), pp. 67-95. (in Russian).
2. Ay Min Vin. Cryogenic Liquid Fluctuations in a Motionless Tank. Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 9, pp. 75-87. (in Russian). DOI: [10.7463/0914.0726215](https://doi.org/10.7463/0914.0726215)
3. Babskiy V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskiy N.D., Myshkis A.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti [Prob-



- lem-solving technique for hydromechanics below zero-G conditions]. Kiev: Naukova dumka Publ., 1992. 592 p. (in Russian).
4. Kalinichenko V.A., Nesterov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. [Theoretical and experimental study of finite amplitude wave parametric excitation in two-layer liquid]. Volny i difraktsiya. 9 Vsesoyuznyy simpozium po difraktsii i rasprostraneniyu voln. T. 2. [Waves and diffraction. 9<sup>th</sup> all-union workshop on diffraction and waves propagation. Vol.2]. Tbilisi, 1985, pp. 53-56. (in Russian).
  5. Temnov A.N., Ay Min Vin. On the motion of stratified liquid in the cavity of movable solid. Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation, 2012, no. 7(7). (in Russian). DOI: [10.18698/2308-6033-2012-7-291](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-7-291)
  6. Goncharov D.A. Dynamics of two-layer liquid divided by an elastic dividing wall with an allowance for surface tension forces (with corrections). Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU, 2013, no. 11, pp. 547-556. (in Russian). DOI: [10.7463/1113.0619258](https://doi.org/10.7463/1113.0619258)
  7. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A., Kokushkin V.V. Small Oscillations of Two-Layer Liquid in View Permeability of Separator. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences, 2014, no. 5(56), pp. 109-116. (in Russian).
  8. Gaziev E.L. Modelirovanie sobstvennykh kolebaniy sistemy "ideal'naya kapillyarnaya zhidkost'-barotropnyy gaz" v tsilindricheskom konteynere [Self-oscillation simulation for "ideal capillary liquid-barotropic gas" system in cylindrical package]. Krymskaya Mezhdunarodnaya Matematicheskaya Konferentsiya (KMMK-2013). Sbornik tezisov. T.3 [Crimea International Mathematical Conference (CIMC-2013). Book of abstracts. Vol. 3]. Simferopol', KNTs NANU Publ., 2013. pp. 51-52. (in Russian).
  9. Kolesnikov K.S., Pozhalostin A.A., Shkapov P.M. Problems of Hydromechanical Systems Dynamics in Proceedings of the Zhukovsky Theoretical Mechanics Department. Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation, 2012, no. 7(7). (in Russian). DOI: [10.18698/2308-6033-2012-7-285](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-7-285)
  10. Kononov Yu.N., Tatarenko E.A. Free oscillations of elastic membranes and two-layer liquid in rectangular channel with elastic bottom. Prikladnaya gidromekhanika = Applied Hydro-mechanics, 2008, no. 1, pp. 33-38. (in Russian).
  11. Mikhayluk A.V., Timokha A.N. Variational formulations for a spectral problem with parameter on the interface of two mediums. Dopov. Nats. Akad. Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, 1995, vol. 45, no. 10, pp. 38-40. (in Russian).
  12. Popov D.N., Panaiotti S.S., Ryabinin M.V. Gidromekhanika [Hydromechanics]. Moscow, Uchebnoe posobie Publ., 2014. 320 p. (in Russian).
  13. Martinson L.K., Malov Yu.I. Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2002. 185 p. (in Russian).

14. Kolesnikov K.S. Dinamika raket [Rocket dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 520 p. (in Russian).
15. Kalinichenko V.A., So Aung Naing. Faraday waves in a movable tank and their mechanical analog. Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation, 2013, no. 12(24). (in Russian). DOI: [10.18698/2308-6033-2013-12-1138](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1138)
16. Temnov A.N., Vin Ko Ko. Oscillations of immiscible liquids in a stationary cylindrical vessel and their mechanical analogs. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences, no. 3, pp. 57-69. (in Russian). DOI: [10.18698/1812-3368-2016-3-57-69](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-3-57-69)
17. Kalinichenko V.A., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya., Timofeev A.S. Experimental study of the velocity field of parametrically excited waves in a two-layer liquid. Izv. AN SSSR. MZhG, 1991, no. 5, pp. 161-166. (in Russian). (English version of journal: Fluid Dynamics, 1991, vol. 26, no. 5, pp. 771–775. DOI: [10.1007/BF01051000](https://doi.org/10.1007/BF01051000) )
18. Temnov A.N., Vin Ko Ko. Finite element calculation of discrete stratified fluid vibrations. Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU, 2016, no. 5, pp. 82-92. (in Russian). DOI: [10.7463/0516.0841210](https://doi.org/10.7463/0516.0841210)