

УДК 534.121; 531.383

Численное исследование резонаторов ВТГ различной формы при наличии дефектов различного типа

Вахлярский Д. С.^{1,*}, Гуськов А. М.¹,
Басараб М. А.¹, Матвеев В. А.¹

* vahlyar@yandex.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье рассмотрен подход к исследованию одновременного влияния дефектов срединной поверхности, распределения толщины оболочки и плотности материала в окружном направлении на расщепление рабочей частоты резонатора. Показано, что для полусферического резонатора постоянной толщины, дефекты срединной поверхности, толщины и плотности одинаковым образом влияют на расщепление рабочей частоты и могут быть заменены друг другом при разработке алгоритмов балансировки резонатора. Также показано, что в общем случае оболочки резонатора переменной толщины и (или) произвольной формы меридиана, замена дефекта срединной поверхности или толщины дефектом распределения плотности является некорректной, что должно учитываться при разработке алгоритмов балансировки резонаторов, по форме отличных от полусферической оболочки постоянной толщины. В статье рассмотрены резонаторы следующих форм: полусферический; цилиндрический; конический; тороидальный; «китайский» колокол. Для указанных форм резонаторов вычислены коэффициенты прецессии. Показано, что из рассмотренных оболочек тороидальная имеет наихудшее сочетание расщепления частоты и коэффициента прецессии, цилиндрический и «китайский» колокол – наилучшее.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, расщепление частот, дефект формы срединной поверхности, коэффициент прецессии

Введение

Функционирование волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) основано на явлении прецессии упругих волн, возбужденных в осесимметричных оболочках (эффект Брайана [1]). Угловые скорости вращения кольцевой кромки такой оболочки, Ω , и возбужденной в ней стоячей волны, $\tilde{\Omega}$, связаны соотношением

$$\tilde{\Omega} = K\Omega \quad (1)$$

где K – коэффициент Брайана (коэффициент прецессии).

Таким образом, при вращении основания стоячая волна движется относительно кольцевой кромки оболочки (резонатора), что объясняется действием кориолисовых сил инерции. На рисунке 1 приведены первые три рабочие формы стоячей волны.

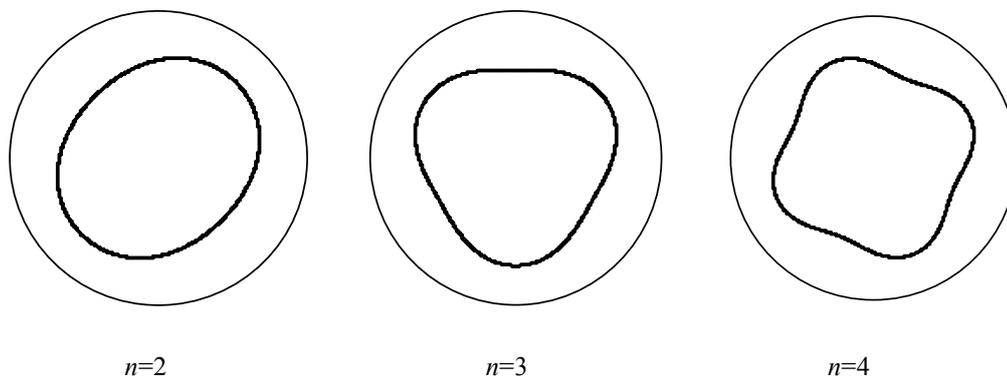


Рисунок 1 – формы колебаний стоячей волны в резонаторе ВТГ

Эффект Брайана справедлив для любого закона вращения основания $\Omega(t)$. При этом угол поворота стоячей волны относительно кольцевого резонатора определяется формулой

$$\varphi(t) = -\frac{2}{1+n^2} \int_0^t \Omega(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где n – параметр, определяющий моду колебаний кольца.

Эффект Брайана используется для построения датчиков угловой скорости (1) и углового перемещения (2). Поскольку положение узлов и пучностей стоячей волны относительно кольца зависит от его углового перемещения, то, измеряя их эволюцию $\varphi(t)$ определяется угловая скорость $\Omega(t)$. Для определения произвольного углового движения объекта относительно инерциального пространства необходимо иметь три таких датчика, ориентированных по трем взаимно перпендикулярным осям.

В конструкциях ВТГ чаще всего используются тонкостенные полусферические или цилиндрические резонаторы, колебания кромки которых идентичны колебаниям тонкого упругого кольца.

В ВТГ отсутствует вращающийся ротор, что дает такому гироскопу ряд преимуществ:

- большой ресурс работы;
- высокая точность и малая случайная погрешность;
- устойчивость к неблагоприятным внешним воздействиям (перегрузки, вибрация, гамма-излучение);
- небольшие габаритные размеры, масса и потребляемая мощность;
- сохранение инерциальной информации при кратковременном отключении электропитания.

Однако добиться высоких значений характеристик можно лишь устранив или компенсировав влияние технологических и конструктивных погрешностей изготовления его резонатора.

В статьях [2,3] ранее исследовалось влияние неоднородности распределения массы на дебаланс ВТГ с полусферическим резонатором, равнотолщинным в меридиональном направлении. Часть, чтобы обеспечить большую однородность напряжений в материале такого резонатора, толщина его оболочки выбирается максимальной вблизи полюса полусферы и при смещении к краю уменьшается по определенному закону. Так, в [4] рассматривался следующий закон

$$h(\alpha) = h_0(1 + \cos \alpha)^2 / 4, \quad (3)$$

где h_0 – толщина однородного материала резонатора; α – меридиональный угол между вектором, проведенным из центра полусферы в некоторую точку оболочки, и осью ее симметрии. В [1] для такого закона исследовались конечно-элементные и полуаналитические модели применительно в задачах расчета тепловых полей.

В [5] было изучено влияние неравномерной толщины резонатора ВТГ на его характеристики. Исследовались масштабный коэффициент и собственная частота изгибных колебаний при неоднородности толщины резонатора вида

$$h(\alpha, \varphi) = h_0(1 + f(\alpha) \cos m\varphi) \quad (4)$$

где $f(\alpha)$ – закон изменения толщины; m – номер гармоники неоднородности толщины по окружному углу φ . В частности, рассматривался случай, когда $f(\alpha) = \varepsilon(\alpha - \alpha_1 / 2)$. Отмечалось, что малая неоднородность толщины резонатора по меридиональному углу α оказывает влияние на коэффициент прецессии и частоту собственных колебаний резонатора, а также не приводит к взаимосвязи между модами колебаний (при $m = 0$).

В статье [6] методами конечных элементов и возмущений решалась задача расчета расщепления частоты оболочки с произвольным дефектом формы срединной поверхности. При исследовании колебаний оболочек с неоднородностью в меридиональном направлении использовались проекционные алгоритмы, в частности, в [7] с помощью метода коллокаций рассчитывались собственные формы колебаний и коэффициент прецессии оболочек вращения с различными формами образующей.

Влияние дефектов, таких как неоднородность распределения толщины оболочки, плотности, упругих и диссипативных свойств материала в окружном направлении на расщепление рабочей частоты резонатора ВТГ хорошо изучено [8,5,9,10,11]. В случае же искажения срединной поверхности вопрос зависимости расщепления частоты к настоящему времени остается мало исследованным [12,13]. Совместное влияние погрешностей разной природы на расщепление частоты практически не освещено в литературе. Однако рассмотрение этого вопроса является важным, так как при механической балансировке резонаторов волновых твердотельных гироскопов, фактически, влияние одного дефекта (или их совокупности) на расщепление рабочей частоты нивелируется наложением другого дефекта.

1. Постановка задачи

Для рассматриваемых оболочек исследуется зависимость расщепления Δf_2 рабочей частоты f_2 от дефектов разного типа. Индекс 2 отвечает форме колебаний с 4 узловыми меридианами и без узловых параллелей (то есть симметричные переменные изменяются по $\cos(2\varphi)$, а антисимметричные по $\sin(2\varphi)$). Численное моделирование проводится с помощью метода конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе Ansys. Рассматриваются погрешности следующих величин, относящихся к оболочке резонатора ВТГ: 1) радиус параллельного круга срединной поверхности r ; 2) осевая координата срединной поверхности z ; 3) толщина h ; 4) плотность ρ .

Как известно, для точной работы ВТГ требуется, чтобы расщепление Δf_2 было как можно меньше. В связи с этим, при численном моделировании допустимо рассматривать только линейную часть расщепления частоты. Однако при малых величинах погрешностей возникает необходимость подтверждения возможности использования классического МКЭ. Это определяется тем, существует ли интервал амплитуд погрешностей, в котором будет найдена только линейная часть расщепления частоты и в то же время, вычислительные ошибки Δf_2 не будут сопоставимы с его величиной. Допустимость применения стандартного МКЭ для вычисления расщепления частоты полусферической и цилиндрической оболочек подтверждена в [6].

Ранее показано, что при малых амплитудах несовершенств оболочки линейная часть Δf_2 вызывается погрешностями, распределенными в окружном направлении по $\cos(4\varphi)$ [8]. В данной работе также рассматриваются погрешности, распределенные в окружном направлении по $\cos(m\varphi)$, ($m = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$). Это сделано с целью оценки амплитуд погрешностей, для которых нелинейная часть расщепления остаётся несущественной, по сравнению с линейной.

При численном моделировании принимается, что погрешности распределены следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{err} &= \Delta r g_r(\xi) \cos(m\varphi); \\ z_{err} &= \Delta z g_z(\xi) \cos(m\varphi); \\ h_{err} &= \Delta h g_h(\xi) \cos(m\varphi); \\ \rho_{err} &= \Delta \rho g_\rho(\xi) \cos(m\varphi); \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Delta r, \Delta z, \Delta h, \Delta \rho$ - амплитуды дефектов;

$g_r(\xi), g_z(\xi), g_h(\xi), g_\rho(\xi)$ - функции изменения дефектов вдоль меридиана;

$m = 1, 2, \dots, 8$ - номер гармоники дефекта;

$\xi \in [0, 1]$ - меридиональная координата оболочки;

$\varphi \in [0, 2\pi]$ - окружная координата оболочки.

В работе рассматриваются три функции меридионального распределения дефектов:

$$\begin{aligned}
g_{i1}(\xi) &= 0.1\xi + (1 - \xi); \\
g_{i2}(\xi) &= \xi + 0.1(1 - \xi); \quad (i = r, z, h, \rho) \\
g_{i3}(\xi) &= g_{i1}(\xi) + g_{i2}(\xi) = 1.1.
\end{aligned}
\tag{6}$$

Законы изменения погрешностей в меридиональном направлении показаны на рисунке 2.

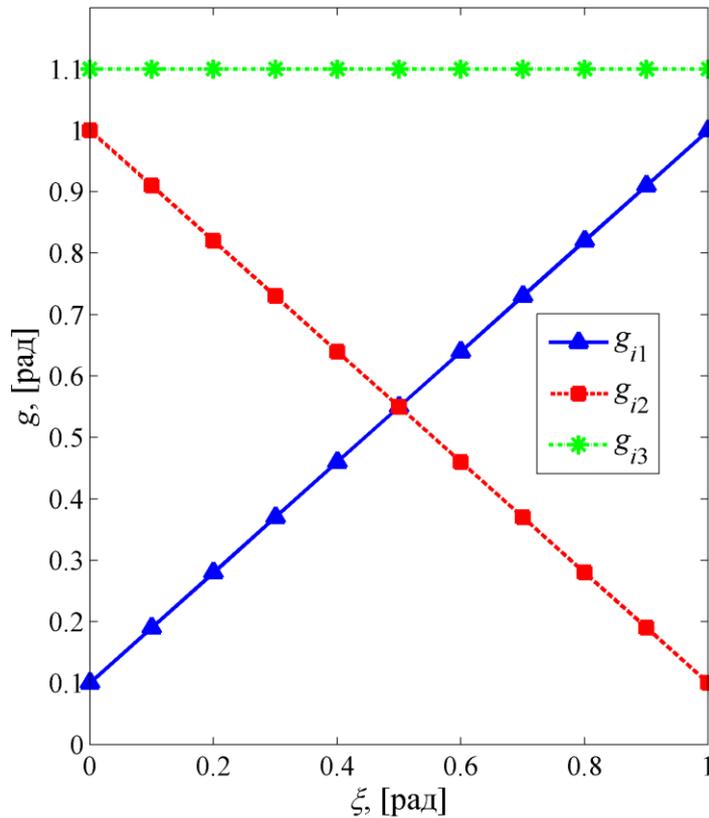


Рисунок 2 – функции меридионального распределения дефектов

При моделировании используются конечные элементы оболочек малой и средней толщины shell286.

В некоторых алгоритмах балансировки резонаторов ВТГ оболочку с произвольными дефектами заменяют идеальной оболочкой вращения с несколькими точечными массами, расположенными на верхней параллели [14,15,16]. Условие эквивалентности двух указанных оболочек – равенство расщепления частот Δf_2 . Рассмотрим дефект, распределенный по $\cos(4\varphi)$. Расположению точечных масс соответствуют углы $\varphi_{m(i)}$. Пусть количество точечных масс равно четырем, их величина одинакова, а угол между ними равен 90° . Тогда расположение точечных масс относительно дефекта определяется только углом $\varphi_{m(1)}$, соответствующим первой массе. В зависимости от типа дефекта, формы меридиана оболочки и функции изменения толщины вдоль меридиана, возможны две принципиально разные ситуации. Будем называть их дефект А типа ($\varphi_{m(1)} = 0^\circ$) и дефект В типа

($\varphi_{m(1)} = 45^\circ$). На рисунке 2 показаны формы колебаний, отвечающие идеальной осесимметричной оболочке с точечными массами. Меньшая и большая расщепленные частоты обозначены $f_{2(1)}$ и $f_{2(2)}$ соответственно. Дефект в окружном направлении распределен по $\cos(4\varphi)$.

При исследовании совместного влияния дефектов, распределенных по $\cos(4\varphi)$, рассматривается только линейная часть расщепления рабочей частоты. Следовательно, суммарное расщепление, вызванное наличием дефектов различной природы, вычисляется простым суммированием:

$$\Delta f_\Sigma = |s_r \Delta f_r + s_z \Delta f_z + s_h \Delta f_h + s_\rho \Delta f_\rho|; \quad (7)$$

где Δf_Σ - суммарное расщепление частоты, вызванное наличием нескольких дефектов;

$s_i = \pm 1$ - коэффициент, зависящий от природы дефекта и геометрии меридиана резонатора;

$\Delta f_r, \Delta f_z, \Delta f_h, \Delta f_\rho$ - расщепления частоты, вызванные наличием дефектов радиуса, осевой координаты, толщины и плотности соответственно.

Очевидно, что дефект А типа компенсирует расщепление частоты, вызванное дефектом В типа и наоборот. Принимается, что для дефектов А типа значение коэффициента $s_i = 1$, тогда для дефектов В типа $s_i = -1$. Если два различных по природе дефекта относятся к одному типу, например А, будем считать их эквивалентными между собой с точки зрения балансировки.

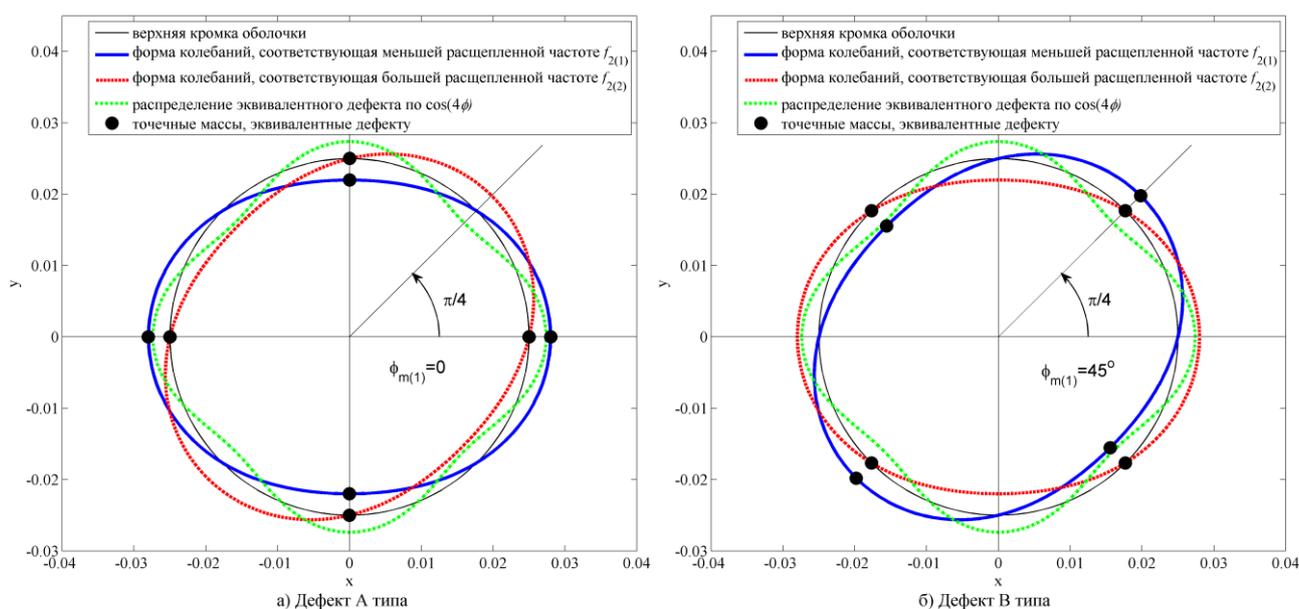


Рисунок 2 – формы колебаний эквивалентной оболочки с точечными массами.

2. Результаты

Материал всех рассматриваемых оболочек принимается изотропным. Параметры расчетов, принятые для всех рассматриваемых оболочек, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – параметры расчетов, одинаковые для всех оболочек.

Параметр	Значение
модуль упругости E , МПа	$2 \cdot 10^5$
плотность ρ , кг/м ³	7850
коэффициент Пуассона μ	0,3
амплитуда дефекта радиуса параллельного круга Δr , мм	0,01
амплитуда дефекта осевой координаты Δz , мм	0,01
амплитуда дефекта толщины Δh , мм	0,01
амплитуда дефекта плотности $\Delta \rho$, кг/м ³	5,0

Для рассмотренных оболочек максимальное суммарное расщепление частоты Δf_{Σ}^{\max} вычислено следующим образом:

$$\Delta f_{\Sigma}^{\max} = \max(\Delta f_r) + \max(\Delta f_h) + \max(\Delta f_h) + \max(\Delta f_{\rho}). \quad (8)$$

Наибольшее относительное суммарное расщепление частоты равно:

$$\Delta f_{rel}^{\max} = \frac{\Delta f_{\Sigma}^{\max}}{f_2}. \quad (9)$$

В статье рассматриваются следующие формы резонаторов: цилиндрический [17]; полусферический [8]; конический [18,19]; тороидальный [20]; «китайский» колокол [16,21]. На рисунке 3 показаны меридиональные сечения и геометрические характеристики оболочек, для которых проводятся вычисления.

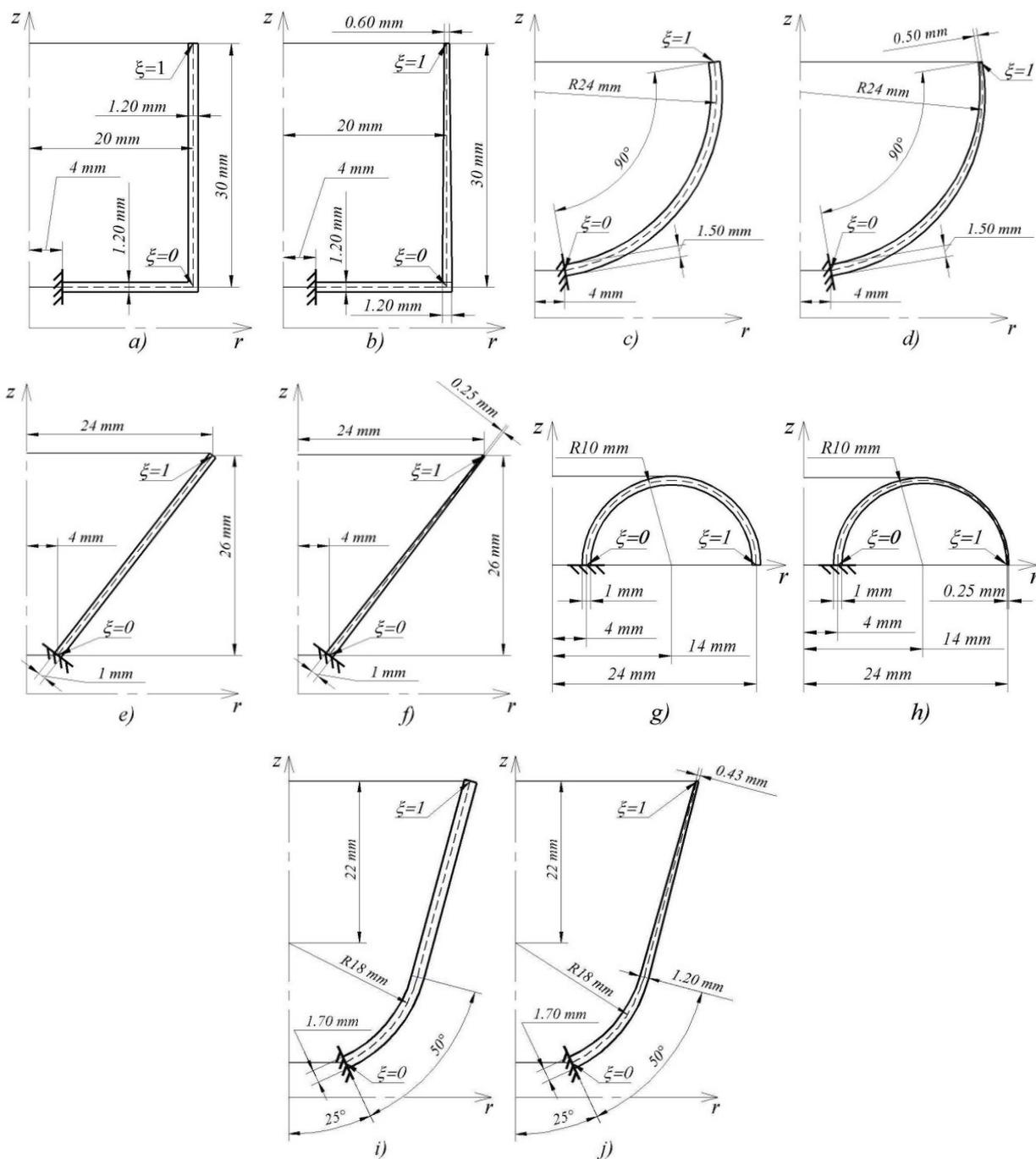
Для оболочек переменной толщины (рисунки 3b, 3d, 3f, 3h, 3j) принята линейная функция изменения толщины вдоль меридиана:

$$h(\xi) = h_0(1 - \xi) + h_1\xi, \quad (10)$$

где h_0 - толщина оболочки на параллели $\xi = 0$;

h_1 - толщина оболочки на параллели $\xi = 1$.

При параметризации колоколообразной оболочки, значение меридиональной координаты $\xi_m = 0,36271$, в месте перехода сферической части в коническую, найдено из равенства длин дуг меридиана указанных выше областей оболочки:



- а) цилиндр №1 – постоянной толщины; б) цилиндр №2 – переменной толщины;
 в) полусфера №1 – постоянной толщины; д) полусфера №2 – переменной толщины;
 е) конус №1 – постоянной толщины; ф) конус №2 – переменной толщины;
 г) тор №1 – постоянной толщины; х) тор №2 – переменной толщины;
 и) колокол №1 – постоянной толщины; ж) колокол №2 – переменной толщины;

Рисунок 3 – меридиональные сечения оболочек резонатора.

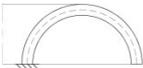
В таблице 2 приведены собственные частоты рассматриваемых оболочек в случае отсутствия дефектов.

В таблице 3 приведены значения расщепления частоты (с учетом знаков принятых для дефектов А и В типа), вызванные рассматриваемыми дефектами для различных функций изменения дефектов вдоль меридиана (6).

Таблица 2 – невозмущенные собственные частоты.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	j)	i)
Невозмущенная собственная частота f_2, Гц	2375,3	1839,5	2517,9	1501,9	2653,3	2891,5	2817,8	1833,1	2031,5	2621,6

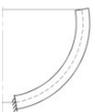
Таблица 3 – расщепления частоты рассматриваемых оболочек, для различного типа дефектов и их различного распределения вдоль меридиана (дефекты распределены в окружном направлении по $\cos(4\varphi)$).

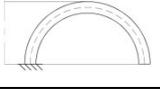
Форма резонатора	Функция изменения дефекта вдоль меридиана	$s_r \Delta f_r$, Гц	$s_z \Delta f_z$, Гц	$s_h \Delta f_h$, Гц	$s_\rho \Delta f_\rho$, Гц
Цилиндр №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	2,9	0,2	-4,5	0,3
	$g_{i2}(\xi)$: 	2,2	-0,1	0,3	0,2
	$g_{i3}(\xi)$: 	5,1	0,1	-4,2	0,5
Цилиндр №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	1,2	0,2	-0,4	0,3
	$g_{i2}(\xi)$: 	2,9	-0,2	2,3	0,1
	$g_{i3}(\xi)$: 	4,1	0,0	1,9	0,4
Полусфера №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	6,2	1,3	4,6	0,5
	$g_{i2}(\xi)$: 	0,6	0,6	1,6	0,1
	$g_{i3}(\xi)$: 	6,8	1,9	6,2	0,6
Полусфера №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	1,8	1,6	7,1	0,3
	$g_{i2}(\xi)$: 	-1,1	2,2	2,1	0,1
	$g_{i3}(\xi)$: 	0,7	3,8	9,2	0,4
Конус №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	-2,5	3,0	-4,8	0,5
	$g_{i2}(\xi)$: 	-8,6	5,2	-7,5	0,2
	$g_{i3}(\xi)$: 	-11,1	8,2	-12,3	0,7
Конус №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	-6,6	6,2	14,4	0,5
	$g_{i2}(\xi)$: 	-20,7	12,9	-3,8	0,2
	$g_{i3}(\xi)$: 	-27,3	19,1	10,6	0,7
Полугор №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	8,2	3,1	17,1	0,7
	$g_{i2}(\xi)$: 	0,6	3,6	3,1	0,2
	$g_{i3}(\xi)$: 	8,8	6,7	20,2	0,8

Форма резонатора	Функция изменения дефекта вдоль меридиана	$s_r \Delta f_r$, Гц	$s_z \Delta f_z$, Гц	$s_h \Delta f_h$, Гц	$s_\rho \Delta f_\rho$, Гц
Полутор №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	0,8	4,5	21,4	0,4
	$g_{i2}(\xi)$: 	-2,4	7,3	1,8	0,1
	$g_{i3}(\xi)$: 	-1,6	11,8	23,2	0,5
Колокол №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	1,1	0,4	-5,4	0,4
	$g_{i2}(\xi)$: 	-1,5	1,9	-2,4	0,2
	$g_{i3}(\xi)$: 	-0,4	2,3	-7,8	0,6
Колокол №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	-2,5	2,0	2,6	0,3
	$g_{i2}(\xi)$: 	-7,6	6,5	-1,1	0,1
	$g_{i3}(\xi)$: 	-10,1	8,5	1,5	0,4

В таблице 4 приведены относительные расщепления, вычисленные по формуле (9), используя данные таблиц 2 и 3.

Таблица 4 – относительные расщепления частоты рассматриваемых оболочек, для различного типа дефектов и их различного распределения вдоль меридиана (дефекты распределены в окружном направлении по $\cos(4\varphi)$).

Форма резонатора	Функция изменения дефекта вдоль меридиана	$s_r \frac{\Delta f_r}{f_2}$	$s_z \frac{\Delta f_z}{f_2}$	$s_h \frac{\Delta f_h}{f_2}$	$s_\rho \frac{\Delta f_\rho}{f_2}$
Цилиндр №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	0,0012	0,0001	-0,0019	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	0,0009	0,0000	0,0001	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	0,0021	0,0000	-0,0018	0,0003
Цилиндр №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	0,0007	0,0001	-0,0002	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	0,0016	-0,0001	0,0013	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	0,0022	0,0000	0,0010	0,0003
Полусфера №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	0,0025	0,0005	0,0018	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	0,0002	0,0002	0,0006	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	0,0027	0,0008	0,0025	0,0003
Полусфера №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	0,0012	0,0011	0,0047	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	-0,0007	0,0015	0,0014	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	0,0005	0,0025	0,0061	0,0003

Форма резонатора	Функция изменения дефекта вдоль меридиана	$s_r \frac{\Delta f_r}{f_2}$	$s_z \frac{\Delta f_z}{f_2}$	$s_h \frac{\Delta f_h}{f_2}$	$s_p \frac{\Delta f_p}{f_2}$
Конус №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	-0,0009	0,0011	-0,0018	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	-0,0032	0,0020	-0,0028	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	-0,0042	0,0031	-0,0046	0,0003
Конус №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	-0,0023	0,0021	0,0050	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	-0,0072	0,0045	-0,0013	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	-0,0094	0,0066	0,0037	0,0003
Полутор №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	0,0029	0,0011	0,0061	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	0,0002	0,0013	0,0011	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	0,0031	0,0024	0,0072	0,0003
Полутор №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	0,0004	0,0025	0,0117	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	-0,0013	0,0040	0,0010	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	-0,0009	0,0064	0,0127	0,0003
Колокол №1 	$g_{i1}(\xi)$: 	0,0004	0,0002	-0,0021	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	-0,0006	0,0007	-0,0009	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	-0,0002	0,0009	-0,0030	0,0003
Колокол №2 	$g_{i1}(\xi)$: 	-0,0012	0,0010	0,0013	0,0002
	$g_{i2}(\xi)$: 	-0,0037	0,0032	-0,0005	0,0001
	$g_{i3}(\xi)$: 	-0,0050	0,0042	0,0007	0,0003

В таблице 5 приведены наибольшие значения расщеплений, вычисленные по формуле (8), используя данные таблиц 3 и 4.

Таблица 5 – наибольшие расщепления рабочей частоты (дефекты распределены в окружном направлении по $\cos(4\varphi)$).

Форма резонатора	b)	a)	j)	c)	i)	d)	e)	g)	f)	h)
Наибольшее абсолютное расщепление частоты Δf_{Σ}^{\max} , Гц	7,0	10,3	12,2	15,5	20,5	15,2	32,3	36,5	57,7	37,9
Наибольшее относительное расщепление частоты $\Delta f_{\Sigma}^{\max} / f_2$, Гц	0,0038	0,0043	0,0046	0,0062	0,0101	0,0101	0,0122	0,0130	0,0200	0,0207

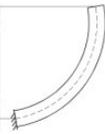
В таблице 6 приведены значения коэффициентов прецессии рассматриваемых оболочек.

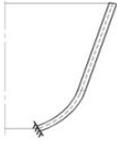
Таблица 6 – коэффициенты прецессии.

Форма резонатора	a)	b)	j)	i)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Коэффициент прецессии K	0,372	0,366	0,346	0,341	0,311	0,301	0,252	0,251	0,149	0,138

В таблице 7, для рассматриваемых оболочек постоянной толщины, приведены значения расщепления частоты вызванного дефектами, распределенными в окружном направлении по гармоникам с номерами $m=1 \dots 8$ при значительных амплитудах дефектов. В меридиональном направлении дефекты распределены в соответствии с функцией $g_{il}(\xi)$.

Таблица 7 – расщепления частоты рассматриваемых оболочек, для различного типа дефектов и их различного распределения вдоль параллели (в меридиональном направлении дефекты распределены в соответствии с $g_{il}(\xi)$).

Тип резонатора	Амплитуда погрешности, мм		Расщепление частоты Δf_2 , вызванное дефектом, распределенным в окружном направлении по гармонике с номером m							
			$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
										
Цилиндр №1 	Δr , мм	0,1	0,0329	0,0870	0,0046	29,20	0,0106	0,0012	0,0013	0
		0,2	0,0101	0,3010	0,0093	58,40	0,0122	0,0204	0,0043	0
	Δz , мм	0,1	0,0077	0,0239	0,0097	2,44	0,0060	0,0050	0,0054	0
		0,2	0,0101	0,0329	0,0025	4,88	0,0082	0	0	0
	Δh , мм	0,1	0,0010	3,5485	0	44,63	0	0	0	0
		0,2	0,0169	14,1505	0	88,35	0	0	0	0
$\Delta \rho$, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	50	0	0,0014	0	3,49	0	0	0	0	
	100	0	0,0057	0	6,98	0	0	0	0	
Полусфера №1 	Δr , мм	0,1	0	0,2068	0	62,35	0	0	0	0
		0,2	0	0,8271	0	124,77	0	0	0	0
	Δz , мм	0,1	0	0,0614	0	12,95	0	0	0	0
		0,2	0	0,2454	0	25,90	0	0	0	0
	Δh , мм	0,1	0,0002	0,1243	0	45,88	0	0	0	0
		0,2	0,0036	0,4823	0	92,28	0	0	0	0
$\Delta \rho$, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	50	0	0,0002	0	4,56	0	0	0	0	
	100	0	0,0008	0	9,13	0	0	0	0	
Конус №1 	Δr , мм	0,1	0	0,0379	0	24,92	0	0	0	0
		0,2	0	0,1516	0	49,89	0	0	0	0
	Δz , мм	0,1	0	0,1777	0	29,77	0	0	0	0
		0,2	0	0,7106	0	59,55	0	0	0	0
	Δh , мм	0,1	0	4,5649	0	47,27	0	0	0	0
		0,2	0,0002	18,2056	0	91,17	0	0	0	0
$\Delta \rho$, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	50	0	0,0003	0	5,16	0	0	0	0	
	100	0	0,0010	0	10,33	0	0	0	0	

Тип резонатора	Амплитуда погрешности, мм		Расщепление частоты Δf_2 , вызванное дефектом, распределенным в окружном направлении по гармонике с номером m							
			$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
										
Полутор №1 	Δr , мм	0,1	0	0,2910	0	82,08	0	0	0	0
		0,2	0,0006	1,1637	0	164,16	0	0	0	0
	Δz , мм	0,1	0	0,4913	0	31,50	0	0	0	0
		0,2	0	1,9637	0	63,17	0	0	0	0
	Δh , мм	0,1	0,0087	7,2782	0,0002	170,67	0,0002	0,0007	0,0002	0
		0,2	0,1071	28,7917	0,0002	341,07	0,0001	0,0007	0,0001	0
	$\Delta \rho$, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	50	0	0,0064	0	6,64	0	0	0	0
		100	0	0,0258	0	13,27	0	0	0	0
Колокол №2 	Δr , мм	0,1	0	0,0308	0	11,19	0	0	0	0
		0,2	0	0,1230	0	22,37	0	0	0	0
	Δz , мм	0,1	0	0,0424	0	4,00	0	0	0	0
		0,2	0	0,1694	0	8,01	0	0	0	0
	Δh , мм	0,1	0	2,2816	0	54,28	0	0	0	0
		0,2	0,0006	9,1168	0	107,44	0	0	0	0
	$\Delta \rho$, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	50	0	0,0001	0	4,39	0	0	0	0
		100	0	0,0003	0	8,77	0	0	0	0

3. Анализ результатов

При работе резонаторов ВТГ важным является относительное расщепление частоты, поэтому сравнение резонаторов проводится именно по этому параметру. Вторым параметром для сравнения резонаторов является коэффициент прецессии.

Для всех оболочек:

- Расщепление частоты, вычисленное в Ansys, вызванное дефектами, распределенными в меридиональном направлении согласно функции $g_{i3}(\zeta)$, равно сумме расщеплений, вызванных дефектами, распределенными в меридиональном направлении согласно функциям $g_{i1}(\zeta)$ и $g_{i2}(\zeta)$, как и должно быть в линейном случае.
- чувствительность относительного расщепления частоты к погрешности плотности практически одинакова;
- дефект плотности, распределенный по $\cos(4\varphi)$, относится к А типу, как и ожидалось;
- чувствительность расщепления частоты выше для дефекта плотности, расположенного у параллели $\xi = 1$, как и ожидалось.
- максимальное относительное расщепление частоты оболочек с уменьшающейся к верхней параллели толщиной (по линейному закону (10)) больше чем у оболочек

постоянной толщины, с такой же формой меридиана (для всех рассмотренных оболочек кроме цилиндрической).

- коэффициент прецессии для оболочек с уменьшающейся к верхней параллели толщиной (по линейному закону (10)) меньше чем у оболочек постоянной толщины, с такой же формой меридиана (для всех рассмотренных оболочек), но не существенно.
- даже при значительных амплитудах погрешностей, значение расщепления частоты, вызванного дефектами, распределенными в окружном направлении по гармоникам $m \neq 4$ существенно меньше, чем расщепление, вызванное гармоникой $m = 4$ (таблица 7). Таким образом, оптимизацию формы меридиана резонатора и толщины, с целью уменьшения расщепления частоты достаточно проводить при наличии только дефектов, распределенных по гармонике $m = 4$.

Цилиндрическая оболочка

Для цилиндрической оболочки постоянной и переменной толщины: дефект радиуса параллельного круга – А типа; дефект осевой координаты – А типа в случае локализации у параллели $\xi = 1$ и В типа в случае локализации у параллели $\xi = 0$; дефект толщины – В типа в случае локализации у параллели $\xi = 1$ и А типа в случае локализации у параллели $\xi = 0$.

Цилиндрический резонатор имеет самый большой коэффициент прецессии и самое малое расщепление рабочей частоты, среди рассмотренных оболочек. Погрешности осевой координаты существенно слабее влияют на расщепление частоты цилиндрических резонаторов, по сравнению с дефектами радиуса параллельного круга и толщины. Таким образом, цилиндрический резонатор имеет наилучшее сочетание расщепления частоты и коэффициента прецессии среди рассмотренных оболочек. Недостатком цилиндрической оболочки является то, что дефекты толщины и радиуса параллельного круга не эквивалентны между собой (дефект толщины относится к В типу, а дефект радиуса к А типу).

Полусферическая оболочка

Для полусферической оболочки постоянной толщины: все дефекты – А типа; чувствительность расщепления частоты выше для всех дефектов, в случае их расположения у параллели $\xi = 1$.

Для полусферической оболочки переменной толщины: дефект толщины и осевой координаты – дефект А типа; дефект радиуса параллельного круга – А типа в случае локализации у параллели $\xi = 1$ и В типа в случае локализации у параллели $\xi = 0$; чувствительность расщепления частоты выше для дефектов радиуса параллельного круга и толщины, расположенных у параллели $\xi = 1$; для дефекта осевой координаты – у $\xi = 0$.

Коэффициент прецессии полусферического резонатора меньше чем у цилиндрического, но не существенно (разница не более 15%).

Коническая оболочка

Для конической оболочки постоянной толщины: дефект осевой координаты – А типа; дефекты радиуса параллельного круга и толщины – В типа; чувствительность расщепления частоты выше для дефектов радиуса параллельного круга, осевой координаты и толщины, расположенных у параллели $\xi = 0$.

Для конической оболочки переменной толщины: дефект осевой координаты – А типа; дефект радиуса параллельного круга – В типа; дефект толщины – А типа в случае локализации у параллели $\xi = 1$ и В типа в случае локализации у параллели $\xi = 0$; чувствительность расщепления частоты выше для дефектов радиуса параллельного круга и осевой координаты, расположенных у параллели $\xi = 0$; для дефекта толщины – у $\xi = 1$.

Коэффициент прецессии конического резонатора на треть меньше чем у цилиндрического.

Тороидальная оболочка

Для тороидальной оболочки постоянной толщины: все дефекты – А типа; чувствительность расщепления частоты выше для дефектов радиуса параллельного круга и толщины, в случае их расположения у параллели $\xi = 1$; чувствительность расщепления частоты для дефекта осевой координаты примерно одинаковая при его локализации, как у параллели $\xi = 0$, так и у $\xi = 1$.

Для тороидальной оболочки переменной толщины: дефект осевой координаты и толщины – А типа; дефект радиуса параллельного круга – А типа в случае локализации у параллели $\xi = 1$ и В типа в случае локализации у параллели $\xi = 0$; чувствительность расщепления частоты выше для дефектов радиуса параллельного круга и осевой координаты, расположенных у параллели $\xi = 0$; для дефекта толщины – у $\xi = 1$.

Коэффициент прецессии тороидального резонатора имеет самое маленькое значение среди рассмотренных оболочек, оно в 2,4 раза меньше чем у цилиндрического. Максимальное расщепление частоты имеет одно из самых больших значений. Наряду с полусферическим резонатором постоянной толщины, погрешности тороидального резонатора постоянной толщины эквивалентны между собой с точки зрения балансировки.

«Китайский» колокол

Для «китайского» колокола постоянной толщины: дефект осевой координаты – А типа; дефект толщины – В типа; дефект радиуса параллельного круга – А типа в случае локализации у параллели $\xi = 1$ и В типа в случае локализации у параллели.

Важная особенность «китайского» колокола состоит в том, что расщепление частоты, вызванное погрешностями радиуса параллельного круга и осевой координаты более чем в три раза меньше, чем расщепление вызванное погрешностью толщины, расположенной у параллели $\xi = 1$.

«Китайский» колокол постоянной толщины имеет почти равные с цилиндрической оболочкой значения максимального расщепления и коэффициента прецессии. Недостатком китайского колокола, как и цилиндра, является неэквивалентность дефектов.

Стоит отметить, что большая часть представленных результатов относительно расщепления частоты, справедлива только для рассмотренных в работе, конкретных оболочек. Их распространение на оболочки с такой же формой меридиана, но другим соотношением размеров, в общем случае некорректно. Так, например, авторами получено, что для цилиндрической оболочки все дефекты могут относиться к А типу. Это определяется соотношением радиуса, высоты и толщины. Сказанное выше так же относится к зависимости расщепления от положения дефекта на меридиане.

Выводы

1) Не все дефекты, распределенные в окружном направлении по $\cos(4\varphi)$, приводятся к А типу, что должно быть учтено в алгоритмах балансировки резонаторов отличных от полусферы постоянной толщины.

2) Полусферическая оболочка постоянной толщины является универсальной с точки зрения замены одного дефекта другим. Что удобно при разработке алгоритмов балансировки.

3) Рассмотренные оболочки имеют практически одинаковую чувствительность относительного расщепления частоты к погрешности плотности материала.

4) Для оболочек утоньшающихся к верхней параллели по линейному закону коэффициент прецессии уменьшается, а относительное расщепление рабочей частоты увеличивается, по сравнению с оболочками постоянной толщины и такой же формой меридиана.

5) Для некоторых форм резонатора, чувствительность расщепления частоты выше для дефектов расположенных ближе к месту соединения оболочки с ножкой. В таком случае, проводить балансировку именно в этой области будет эффективнее.

6) Полусферическая оболочка не является оптимальной как с точки зрения коэффициента прецессии, так и с точки зрения зависимости расщепления частоты от погрешностей изготовления. Так, при практически таком же значении коэффициента прецессии, расщепление частоты «китайского» колокола практически вдвое меньше (при одинаковых амплитудах погрешностей). Однако у «китайского» колокола дефекты разной природы не эквивалентны между собой, в отличие от полусферы.

7) При оптимизации формы резонатора погрешности срединной поверхности, толщины и плотности должны учитываться по отдельности, так как они по-разному влияют на расщепление частоты.

8) Оптимизацию достаточно проводить только при дефектах, распределенных по $\cos(4\varphi)$, так как расщепления вызванные другими гармониками малы, даже при значительных амплитудах погрешностей.

Список литературы

1. Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А. Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. М.: Физматлит, 2008. 240 с.
2. Жбанов Ю.К., Каленова Н.В. Поверхностный дебаланс волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 11-18.
3. Матвеев В.А., Басараб М.А., Лунин Б.С. Аппроксимация распределения плотности резонатора волнового твердотельного гироскопа по измеренным параметрам дебаланса // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 10. С. 9-16.
4. Lynch D.D. Bell gyro and improved means for operating same. US Patent 3656354 1972.
5. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.
6. Вахлярский Д.С., Гуськов А.М., Басараб М.А., Матвеев В.А. Использование метода конечных элементов совместно с методом возмущений в задаче вычисления расщепления частоты оболочки с дефектом формы срединной поверхности // Наука и образование. Электрон. журн. 2016. № 05. DOI: [10.7463/0516.0839190](https://doi.org/10.7463/0516.0839190)
7. Басараб М.А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А., Пустовойт В.И. Атомарные функции в задаче определения функций Рэлея и коэффициента прецессии резонатора волнового твердотельного гироскопа // Доклады РАН. 2001. Т. 376. № 4. С.474-479.
8. Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника, 2014. 174 с.
9. Донник А.С. Влияние геометрической неоднородности и упругой анизотропии материала на точностные характеристики волнового твердотельного гироскопа: дис. ... канд. техн. наук. М., 2006. 131 с.
10. Sorenson L.D., Shao P., Ayazi F. Effect of thickness anisotropy on degenerate modes in oxide micro-hemispherical shell resonators // 26th IEEE Int. conf. on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS 2013). Piscataway: IEEE, 2013.Vol.1. P. 169-172.
DOI: [10.1109/MEMSYS.2013.6474204](https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2013.6474204)
11. Sorenson L.D., Shao P., Ayazi F. 3-D Micromachined hemispherical shell resonators with integrated capacitive transducers // 25th IEEE Int. conf. on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS 2012). Piscataway: IEEE, 2012. Vol.1. P.168-171.
DOI: [10.1109/MEMSYS.2012.6170120](https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2012.6170120)
12. Heidari A., Chan M., Yang H., Jaramillo G., Taheri-Tehrani P., Fonda P., Najjar H., Yamazaki K., Lin L., Horsley D. Hemispherical wineglass resonators fabricated from the microcrystalline diamond // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2013. Vol. 23. № 12. P.125016-125017.
13. Козубняк С.А. Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 3. С. 39-49.

14. Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Чуманкин Е.А. Статическая балансировка цилиндрических резонаторов волновых твердотельных гироскопов // Гироскопия и навигация, 2014. № 2(85). С.43-51.
15. Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Чуманкин Е.А. Балансировка полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов методом химического травления // Гироскопия и навигация. 2015. № 1(88). С.61-70.
16. Zhen Lin, Mengyin Fu, Zhihong Deng, Ning Liu, Hong Liu. Frequency split elimination method for a solid-state vibratory angular rate gyro with an imperfect axisymmetric-shell resonator // Sensors. 2015. Vol. 15. № 2. P. 3204-3223. DOI: [10.3390/S150203204](https://doi.org/10.3390/S150203204)
17. Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Фомичев А.В., Чуманкин Е.А., Юрин А.В. Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов // Вестник МГТУ им Баумана. Сер. «Приборостроение». 2014. № 4. С. 80-96.
18. Дзама М.А., Егармин Н.Е. Прецессия упругих волн при вращении некоторых классов осесимметричных оболочек // Изв. РАН . Сер.: Механика твердого тела. 1991. № 1. С. 170-175.
19. Басараб М.А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А. Методы моделирования и цифровой обработки сигналов в гироскопии. М.: Физматлит, 2007. 248 с.
20. Doruk Senkal, Mohammed J. Ahamed, Alexander A. Trusov, Andrei M. Shkel. Achieving Sub-Hz Frequency Symmetry in Micro-Glassblown Wineglass Resonators // J. of Microelectromechanical systems. 2014. Vol. 23. № 1. P. 30-38.
DOI: [10.1109/JMEMS.2013.2286820](https://doi.org/10.1109/JMEMS.2013.2286820)
21. Zhong Su, Mengyin Fu, Qing Li, Ning Liu, Hong Liu. Research on Bell-Shaped Vibratory Angular Rate Gyro's Character of Resonator // Sensors. 2013. Vol. 13. № 4. P. 4724-4741.
DOI: [10.3390/S1304044724](https://doi.org/10.3390/S1304044724)

Numerical Study of Differently Shaped HRG Resonators with Various Defects

D.S. Vakhlyarskiy^{1,*}, A.M. Guskov¹,
M.A. Basarab¹, V.A. Matveev¹

*vahlyar@yandex.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: hemispherical resonator gyroscope, HRG, frequency split, middle surface shape defect, surface imperfections, precession coefficient

The article deals with the following shapes of resonator meridians: hemispherical, cylindrical, conical, toroid-shaped, and bell-shaped. For each shape are considered two types of shells, namely constant thickness and a linearly decreasing thickness from anchoring to the free upper parallel. All shells have approximately the same dimensions. All shells have a 4 mm radius of the parallel in the point of anchoring. The material properties of all shells are the same. Anchoring of shells is the fixed-ended mounting to the leg in the parallel.

For the abovementioned shells, have been calculated a natural frequency f_2 , corresponding to the second circumferential natural mode shape ($n = 2$) of a perfect rotation shell; above frequency splitting Δf_2 due to available defects; a precession coefficient K . A finite element method was used to perform calculations in commercial Ansys software package.

The article considers the following types of defects: a radius defect of the parallel circle of the middle surface, an axial coordinate defect of the middle surface, a shell thickness defect, and a defect of the shell material density. There are three options of meridian distribution of defects, namely a linearly increasing defect from 0.1 to 1; a linearly decreasing defect from 1 to 0.1; a permanent defect of 1.1 (a total defect is determined by multiplying the function of meridian defect distribution and the amplitude). In the circumferential direction, defects are distributed according to the doubled circumferential number of the natural mode shape $k = 2n = 4$.

It has been shown that not all defects are equivalent against each other in terms of their replacement for the point masses. It is also found that, depending on the ratio of shell dimensions an arrangement of the "heavy" axis of resonator can both coincide with the angular position of the maximum defect amplitude, and not coincide with it (for the same type of defect and its meridian and circumferential distribution). This should be taken into account in the balancing resonator algorithms.

At large amplitude values of errors the splitting for the first eight harmonics of the circumferential error distribution $k = 1, 2, 3 \dots 8$ has been calculated. It has been shown that even at large amplitude values of errors the splitting caused by a harmonic different from $k = 4$ is substantially

less than the splitting, caused by harmonic $k = 4$. In the optimization calculations this enables us to consider only the linear part of the frequency splitting, which, as known, is caused by a defect, distributed in the fourth harmonic.

It is shown that the cylindrical and bell-shaped shells have the least relative frequency splitting and the highest value of the precession coefficient.

References

1. Matveev V.A., Lunin B.S., Basarab M.A. *Navigatsionnye sistemy na volnovykh tverdotel'nykh giroskopakh*. [The navigation system on the wave solid-state gyroscopes]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 240 p.
2. Zhanov Yu.K., Kalenova N.V. Surface unbalance of a hemispherical resonator gyro. *Izvestiia RAN. Ser. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 2001, vol. 36, no. 3, pp.7-12.
3. Matveev V.A., Basarab M.A., Lunin B.S. Approximation of density distribution of solid-state wave gyro resonator with respect to measured disbalance parameters. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems. Monitoring, Control and Diagnostics], 2015, no.10, pp. 9-16 (In Russ.).
4. Lynch D.D. Bell gyro and improved means for operating same. US Patent 3656354 1972.
5. Merkuriev I.V., Podalkov V.V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov* [Dynamics of MEMS and wave solid-state gyroscopes]. Moscow: Fizmatlit, 2009. 228 p.
6. Vakhliarskij D.S., Gus'kov A.M., Basarab M.A., Matveev V.A. The use of the finite element method together with the method of perturbation in the problem of calculating the splitting frequencies of the shell with defect of the form of the middle surface. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E.Baumana* [Science and education of the Bauman MGTU], 2016, no. 5 (In Russ.). DOI: [10.7463/0516.0939190](https://doi.org/10.7463/0516.0939190)
7. Basarab M.A., Kravchenko V.F., Matveev V.A., Pustovoit V.I. Atomic functions in the problem of determining functions of the Rayleigh ratio and the precession of the wave solid-state gyroscope. *Doklady RAN* [Reports of the Russian Academy of Sciences], 2001, vol. 376, no. 4, pp. 474-479 (In Russ.).
8. Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A. *Volnovej tverdotel'nyj giroskop* [Solid-state wave gyro]. Moscow: Radiotekhnika, 2014. 174 p.
9. Donnik A.S. *Vliianie geometricheskoy neodnorodnosti i uprugoj anizotropii materiala na tochnostnye kharakteristiki volnovogo tverdotel'nogo giroskopa. Kand. diss.* [The influence of geometrical heterogeneities and elastic anisotropy of the material on the accuracy characteristics of the wave solid-state gyroscope. Cand.diss.]. Moscow, 2006. 131 p.
10. Sorenson L.D., Shao P., Ayazi F. Effect of thickness anisotropy on degenerate modes in oxide micro-hemispherical shell resonators. *26th IEEE Int. conf. on Micro Electro Mechanical*

Systems (MEMS 2013). Piscataway: IEEE, 2013, vol.1, pp. 169-172.

DOI: [10.1109/MEMSYS.2013.6474204](https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2013.6474204)

11. Sorenson L.D., Shao P., Ayazi F. 3-D Micromachined hemispherical shell resonators with integrated capacitive transducers. *25th IEEE Int. conf. on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS 2012). Piscataway: IEEE, 2012, vol.1, pp.168-171.*
DOI: [10.1109/MEMSYS.2012.6170120](https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2012.6170120)
12. Heidari A., Chan M., Yang H., Jaramillo G., Taheri-Tehrani P., Fonda P., Najar H., Yamazaki K., Lin L., Horsley D. Hemispherical wineglass resonators fabricated from the microcrystalline diamond. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2013, vol. 23, no. 12, pp. 125016-125017.
13. Kozubniak S.A. The splitting of the oscillation frequencies of the cylindrical resonator wave solid-state gyroscope caused by the perturbation of the form. *Vestnik MSTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie* [The Herald of the Bauman Moscow State University. Instrument Engineering.], 2015, no. 3, pp.39-49 (In Russ.).
14. Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., Chumankin E.A. Static balancing of cylindrical resonators of solid-state wave gyroscopes. *Giroskopy i navigatsiia* [Gyroscopes and navigation], 2014, no. 2(85), pp. 43-51 (In Russ.).
15. Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., Chumankin E.A. Balancing of HRG resonators by chemical etching. *Giroskopy i navigatsiia* [Gyroscopes and navigation], 2015, no. 1(88), pp. 61-70 (In Russ.)
16. Zhen Lin, Mengyin Fu, Zhihong Deng, Ning Liu, Hong Liu. Frequency split elimination method for a solid-state vibratory angular rate gyro with an imperfect axisymmetric-shell resonator. *Sensors*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 3204-3223. DOI: [10.3390/S150203204](https://doi.org/10.3390/S150203204)
17. Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., Fomichev A.V., Chumankin E.A., Yurin A.V. Miniature wave solid-state gyroscopes for small satellites. *Vestnik MSTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie* [The Herald of the Bauman Moscow State University. Instrument Engineering.], 2014, no.4, pp.80-96 (In Russ.).
18. Dzama M.A., Egarmin N.E. Precession of elastic waves during the rotation of certain classes of axisymmetric shells. *Izvestiia RAN. Ser. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of solids], 1991, no.1, pp. 170-175.
19. Basarab M.A., Kravchenko V.F., Matveev V.A. *Metody modelirovaniia i tsifrovoy obrabotki signalov v girokopii* [Methods for modeling and digital signal processing in gyroscopy]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 248 p.
20. Doruk Senkal, Mohammed J. Ahamed, Alexander A. Trusov, Andrei M. Shkel. Achieving Sub-Hz Frequency Symmetry in Micro-Glassblown Wineglass Resonators. *J. of Microelectromechanical systems*, 2014, vol. 23, no. 1, pp. 30-38.
DOI: [10.1109/JMEMS.2013.2286820](https://doi.org/10.1109/JMEMS.2013.2286820)

21. Zhong Su, Mengyin Fu, Qing Li, Ning Liu, Hong Liu. Research on Bell-Shaped Vibratory Angular Rate Gyro's Character of Resonator. *Sensors*, 2013, vol. 13, no. 4, pp. 4724-4741. DOI: [10.3390/S1304044724](https://doi.org/10.3390/S1304044724)