

УДК 378; 378.145; 519.6

## Классическая и вычислительная математика в обучении студентов технического университета

Соболев С. К.<sup>1,\*</sup>, Будовская Л. М.<sup>1</sup>

[\\*sergesobolev@mail.ru](mailto:sergesobolev@mail.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В рамках международного научного конгресса "Наука и инженерное образование. SEE-2016", II международная научно-методическая конференция «Управление качеством инженерного образования. Возможности вузов и потребности промышленности» (23-25 июня 2016 г., МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия).

---

Рассмотрены основные требования к классическому математическому образованию для бакалавров в техническом университете на современном этапе: фундаментальность и прикладной характер. Приведены основные черты фундаментального математического образования: общность изложения, строгость, систематичность. Проанализирована важная роль математического моделирования и численных методов. Рассмотрены прикладные математические пакеты и обсуждены вопросы их внедрения в общий курс математики на разных этапах обучения студентов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, прикладная математика, математическое образование, классическое образование, вычислительные пакеты

---

### Введение

Стремительное развитие вычислительной техники и появление новых программных продуктов диктуют новый подход в использовании компьютерных технологий в математическом образовании студентов технических университетов.

Значение математики как универсальной фундаментальной и прикладной науки общепризнано [1, 2]. Но, как бы ни была могущественна классическая математика, для большинства прикладных задач она не может дать ответ в точном аналитическом виде, т.к. решение сводится к трудно вычисляемым (или вообще не берущимся) интегралам, к очень громоздко решаемым (или вообще не решаемым в квадратурах) дифференциальным уравнениям и т.п. И тогда незаменима математика вычислительная. Для её привлечения всегда читался курс численных методов или методов вычислений, на которых выписывались и обосновывались различные алгоритмы численного, т.е. приближенного решения задачи [3]. С появлением готовых математических пакетов, способных мгновенно вычислить любой интеграл или решить сложное уравнение, возникает потребность переосмыс-

лить курс математики, внедряя в него не только численные методы, но и практикум по применению математических пакетов [4]. Каким должен быть курс математики для современного инженера? Каково в нем должно быть соотношение математики классической и вычислительной? Нужен ли теперь отдельный курс численных методов, или достаточно просто изучить нужные пакеты?

## 1. Математическая подготовка в техническом университете на современном этапе

В настоящее время значительная часть студентов технических университетов обучаются по системе бакалавриата, период обучения составляет, как правило, четыре года, т.е. существенно короче, чем ранее, поэтому сократилось и время, отпущенное на изучение математики. Сокращение коснулось, прежде всего, лекций. С другой стороны, за последние десятилетия роль компьютеров, их производительность и вычислительные возможности выросли многократно, и учить математику в техническом университете так же, как в середине 20 века, уже невозможно. И преподаватели, и администрация технических университетов заинтересованы в том, чтобы в это непростое время качество математического образования не снижалось, и чтобы оно больше соответствовало современным требованиям.

### 1.1 Фундаментальность классического математического образования

Россия издавна славилась качеством математического образования. Его основное преимущество – **фундаментальность** [5]. Классическое математическое образование, несмотря на все изменения, должно оставаться фундаментальным. Фундаментальность математического образования заключается, прежде всего, в том, что понятия и теоремы должны излагаться в разумной степени **общности**. Такими общими математическими понятиями являются, например, линейное пространство, размерность, базис. Функция, непрерывная на компакте, достигает на нём свои наибольшее и наименьшее значения для любого вида компакта: будь то отрезок или замкнутое ограниченное множество в конечномерном пространстве.

Вторым признаком фундаментальности математики является её **строгость**, причем имеется в виду не столько точность математических формул, сколько аккуратность математических формулировок определений и теорем, логическая корректность рассуждений и доказательств. Студенты должны понимать, что каждое математическое положение должно быть обосновано, а свойства объекта нельзя доказать, если для него нет точного определения. Огромное значение в математическом образовании студентов имеет дисциплина математический анализ, особенно, его начало – теория предела, требующая довольно высокой математической культуры, и потому воспитывающая её [6, 7]. Изучая математический анализ, студенты начинают различать необходимые и достаточные условия, прямую и обратную теорему.

Следующим признаком фундаментальности математического образования является его **систематичность**, которая заключается в четкой структурированности математических курсов, выявлением аналогий и противопоставлений. Систематичность противоположна фрагментарности, «клиповости» изложения материала, к которому иногда толкают непродуманные реформы образования. Вводя новое понятие, «классический» преподаватель математики должен задать студентам четыре вопроса и сам же на них обстоятельно ответить:

- 1) **что это такое**, т.е. дает точное определение;
- 2) **какие у него свойства**;
- 3) **как это найти**, т.е. способы его вычисления;
- 4) **зачем оно надо**, т.е. где оно применяется. Это хорошо проявляется, например, в изучении всех видов интегралов: определенных, несобственных, кратных, криволинейных и поверхностных.

## 1.2. Математическое моделирование

Второй отличительной чертой современного инженерного математического образования является его **прикладной характер**. Если какое-то сложное устройство хорошо работает, то часто это потому, что в него заложена хорошая математика. Существует даже термин **прикладная математика**, т.е. та математика, которая применяется в других областях науки и техники. Собственно, все математические дисциплины, изучаемые в техническом университете, являются так или иначе прикладными. Однако деление математики на прикладную и не прикладную (т.е. теоретическую) весьма условно. Например, алгебра в частности, теория чисел, до середины 20 века рассматривалась как чисто теоретическая наука, интересная лишь для математиков – специалистов в этой области. Однако в последние десятилетия выяснилось, теория чисел активно используется в теории кодирования, лежащей в основе защиты информации.

Мостиком от технической задачи к описывающему эту задачу математическому аппарату является **математическое моделирование**, т.е. создание и исследование математических моделей изучаемых технических процессов [7]. Математическая **модель** – это идеальный объект, заместитель реального изучаемого объекта, обеспечивающий исследование интересующих нас свойств оригинала, и полученный путем определенных допущений и упрощений на основе применения законов физики и других конкретных наук.

В жизни не встречаются готовые уравнения, которые надо решить, или интегралы, которые надо вычислить. В реальных технических задачах этих уравнений и интегралов еще нет, их надо сначала составить, т.е. запустить процесс математического моделирования. Простейшие прикладные задачи, т.е. задачи на математическое моделирование, должны пронизывать все разделы высшей математики в технических университетах. Уже хорошую основу для этого содержат так называемые оптимизационные задачи практического характера. Модельные задачи в большом количестве можно найти в интегральном исчислении: нахождение работы, силы давления или притяжения, массы тела или координат

центра масс, момента инерции и т.д. Еще больше математических моделей ведут к дифференциальным уравнениям.

## 2. Вычислительная математика

Но, как только мы начинаем исследовать математические модели реальных технических объектов, мы сталкиваемся с необходимостью найти численное значение интеграла, график решения дифференциального уравнения или хотя бы значения его решения в каких-то точках. Однако выясняется, что задача часто не может быть точно решена аналитически. Тогда возникает другая задача: *найти приближенное значение искомой величины, но с хорошей, в принципе, с любой наперед заданной погрешностью*. Такие задачи решает вычислительная математика, т.е. дисциплина «Методы вычислений» или «численные методы».

Иногда встречается точка зрения, что элементы вычислительной математики должны излагаться для студентов внутри общего курса математики в конце соответствующих разделов. Например, после теории предела – метод простой итерации решения уравнения  $x = f(x)$ , после изучения производной – итерационный метод Ньютона (или хорд и касательных) решения уравнения  $f(x) = 0$ , в конце интегрального исчисления – приближенные формулы трапеций или Симпсона. На первый взгляд, такое предложение выглядит заманчиво. Однако есть серьезные возражения. Первое: По разным причинам в семестре часто «пропадают» занятия, и первыми «жертвами» оказываются разделы, которые изучаются в конце семестра, т.е. как раз численные методы. Другое возражение состоит в том, что вычислительная математика оперирует со своей системой понятий: абсолютная и относительная погрешность, сходимость итерационного процесса, его устойчивость и т.д. Поэтому **общие численные методы** требуют отдельного, хотя бы семестрового курса, в идеале состоящего из лекций, упражнений и лабораторных работ хотя бы по одному часу в неделю [3]. Этот курс должен быть обязательным для всех студентов, скажем 4 или 5 семестра бакалавриата. Вот его основные разделы: общие принципы приближенных вычислений, численное решение систем линейных уравнений, интерполяция сплайнами, аппроксимация экспериментальных данных методом наименьших квадратов, итерационные численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, численное нахождение определенных и кратных интегралов, численное решение задачи Коши методом Эйлера и Рунге – Кутты, краевой задачи методом прогонки, численная оптимизация. Что касается численных методов решения уравнений математической физики различными методами, то тут, без сомнения, для ряда направлений подготовки нужен еще один хотя бы семестровый курс специальных численных методов.

Но мы должны отметить, что, хотя на технических кафедрах и признают на словах важность дисциплины «Численные методы», на деле далеко не всегда эта дисциплина явно присутствует в учебных планах студентов – бакалавров инженерных факультетов.

В лабораторных работах по численным методам предполагается, что студент для каждой предложенной ему вычислительной задачи напишет (на одном из языков программи-

рования) программу численного решения задачи, отладит её, затем решит задачу на компьютере с помощью своей программы и сдаст преподавателю отчет. Такая манера проведения занятий по численным методам была вплоть до конца 20-го века. Но в начале 21 века (и даже раньше) стали появляться различные математические пакеты: MathCad, Mathematica, MatLab и др., обладающие по истине гигантскими вычислительными возможностями, и ситуация в корне изменилась.

### 3. Вычислительные пакеты

На сегодняшний день существуют математические пакеты [4, 12], которые дают пользователю огромные возможности для решения, как задач символьной математики, так и реализации численных методов. Использование математических пакетов надо начинать на младших курсах.

Однако использование математических пакетов связано с рядом проблем [4]. Во-первых, это высокая стоимость лицензионных версий некоторых пакетов. Во-вторых, внедрение этих пакетов связано с изучением правил работы в пакете, освоением интерфейса, на что требуется определенное время.

Условно математические пакеты можно разбить на две группы:

- 1) пакеты общего назначения;
- 2) специализированные пакеты.

К первой группе отнесем такие пакеты как MathCad, MatLab, Mathematica, Maple, WolframAlpha. Ко второй группе можно отнести такие пакеты как Statistica, Statgraphics [13]. Отметим еще известную программу Microsoft Excel, предназначенную для создания и обработки таблиц, но пригодную и для несложных экономико-статистических расчетов.

Пакеты первой группы можно успешно использовать в общем курсе математики [14]. У них есть большой набор математических функций, включая символьную математику, и широкие графические возможности.

Возникают вопросы: какой из вычислительных пакетов выбрать, и в какой дисциплине знакомить с ними студентов? Какой объем времени потребуется для ознакомления с этими пакетами, и каковы перспективы его использования студентами не только в математических дисциплинах, но и в других курсах?

Мы предлагаем для студентов первого курса использовать пакеты MathCad и Wolfram Alpha. Приемы работы в этих пакетах не требуют знания программирования и легко усваиваются студентами. Эти два пакета дополняют друг друга. К тому же пакет MathCad можно использовать для проведения лабораторных по численным методам и на старших курсах [15-17]. Он имеет простой интерфейс и хорошие возможности визуализации. Запись выражений выполняется в общеупотребительной математической форме, при этом можно использовать буквы латинского и греческого алфавита и меню для различных математических символов.

В пакете MathCad имеется мощный математический аппарат. Он содержит базовые математические функции, включая матричное исчисление, тригонометрию, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений, некоторые статистические алгоритмы, решение систем нелинейных уравнений, поиск экстремумов и др.

Справочная система пакета содержит примеры решения задач, основные математические и физико-химические формулы и константы, которые можно переносить в документ. Подробная документация, возможность дополнения электронными учебниками по различным дисциплинам: решение обыкновенных дифференциальных уравнений, статистика, сопротивление материалов и т.д. - делают его привлекательным для использования в учебном процессе. Немаловажно, что о пакете MathCad выпущено много книг и обучающих курсов [18].

Пакет MathCad можно использовать в первом и втором семестрах в общем курсе математики. Студенты могли бы использовать эти пакеты для самостоятельной проверки решений задач, полученных вручную, а также выполнить с помощью пакета аналогичные задачи для более сложных функций и матриц большого размера.

Что касается пакета WolframAlpha, то он тоже не сложен для усвоения и к тому же находится в открытом доступе в Интернете. И поэтому он с успехом может быть использован в процессе обучения студентов [16]. Интересной его особенностью является функция step-by-step, с помощью которой можно получить подробное решение. Правда, этим иногда тайно пользуются некоторые студенты во время контрольных работ, но опытный преподаватель сразу узнает почерк пакета WolframAlpha из-за необычных, иногда громоздких способов решения и нестандартных обозначений, в частности  $\tan^{-1} x$  студенты воспринимают как  $\text{ctg } x$ , хотя на самом деле это  $\text{arctg } x$ .

На старших курсах можно использовать пакеты Mathematica [20-23] и MatLab [24, 25], имеющие больше возможностей, чем MathCad, но требующих хорошего знания своего внутреннего языка программирования. Все библиотеки MatLab отличаются высокой скоростью вычислений, он является одним из наиболее мощных универсальных интегрированных пакетов компьютерной математики. Пакет MatLab имеет широкий спектр функций для визуализации проводимых вычислений непосредственно в своей среде.

#### **4. Результаты и предложения**

В качестве эксперимента на кафедре «Высшая математика» для студентов 1 и 2 курса для студентов некоторых групп технических факультетов и направления «прикладная лингвистика» в общем курсе математики активно использовались пакеты WolframAlpha, Mathcad и MatLab. Проблемы, поднятые в статье, и пути их решения неоднократно обсуждались на методическом семинаре кафедры и с руководством Научно-методического Совета МГТУ им. Н.Э. Баумана. Одним из положительных результатов эксперимента является заинтересованность студентов в освоении этих пакетов и перспективах их дальнейшего использования в учебе. Наглядность представления результатов позволяет осво-

бодить студента от рутинной работы и уделить больше времени для интерпретации полученных результатов.

Но проявились и негативные моменты: нехватка аудиторий, оснащенных компьютерами, отсутствие аудиторных часов для знакомства и работы с пакетами; для преподавателей не планируется нагрузка для дистанционного консультирования студентов.

По результатам эксперимента мы выработали предложения. Для полноценного, адекватного настоящему времени внедрения вычислительной математики в процесс обучения инженеров-бакалавров необходимо в учебных планах предусмотреть:

1) в 1 или 2 семестре хотя бы 1 час в неделю для изучения какого-либо математического пакета;

2) в 4 или 5 семестре отдельную дисциплину «численные методы» в объеме хотя бы 2 – 3 часа в неделю.

При этом предполагается, что объем аудиторной нагрузки по остальным разделам математики не должен сокращаться.

Для студентов направления «прикладная математика» в техническом университете имеется гораздо больше возможностей для изучения численных методов и освоения математических пакетов. Для них может быть предложен такой план изучения вычислительной математики:

2 семестр – практикум «Введение в математические пакеты»: знакомство с пакетами WolframAlpha и MathCad, в неделю 1 час упражнений + 2 часа лаб. работ.

5 и 6 семестры – двухсеместровый курс «Методы вычислений» в объеме 2 + 2 + 2 часа в неделю;

6 и 7 семестры – практикум по применению математических пакетов в объеме 1 час упражнений + 2 час лабораторных работ в неделю – освоение пакетов Mathematica и/или MatLab.

## **Заключение**

Классическая математика прививает логику мышления, развивает систематичность и обеспечивает всесторонность рассмотрения задачи. Курс численных методов дает теоретические основы для применяемых пакетов, оперируя такими понятиями как погрешность приближенной формулы, сходимост ь итерационного алгоритма, обусловленность системы уравнений. Сам математический пакет дает мощный инструмент для решения задач, но для того чтобы им грамотно воспользоваться, необходимы первые две составляющие: классическая математика и численные методы.

Несмотря на сокращение общего числа аудиторных часов на математику для бакалавров – инженеров, следует сохранить на прежнем уровне фундаментальность математической подготовки как залог успешного овладения ими творческими профессиональными компетенциями, соответствующими их будущей профессиональной деятельности.

Нужно усилить прикладной характер математических курсов, читаемых студентам – бакалавров. Для этого надо больше внедрять элементы математического моделирования во все разделы общематематических курсов. Следует выделить дополнительные часы на вычислительную математику для отдельного курса численных методов и для освоения математических пакетов.

### Список литературы

- [1]. Сидняев Н.И., Соболев С.К. Концептуальные основы математического образования в техническом вузе. // Высшее образование в России. 2015. № 7. С. 36-41
- [2]. Сидняев Н.И., Соболев С.К. Механизмы совершенствования математического образования в техническом вузе. // Alma mater (Вестник высшей школы). 2015. № 6. С. 5-14.
- [3]. Федотов А. А., Храпов П. В. Проблемы и перспективы развития курса численных методов. // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 5(17). Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/747.html> (дата обращения: 8.07.2016) DOI: [10.18698/2308-6033-2013-5-747](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-5-747)
- [4]. Будовская Л.М., Тимонин В.И. Использование компьютерных технологий в преподавании математики. // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 5(17). Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/736.html> (дата обращения: 8.07.2016) DOI: [10.18698/2308-6033-2013-5-736](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-5-736)
- [5]. Стронгина Н.Р., Маркин А.В. Совершенствование математического образования студентов – химиков. // Вестник Нижегородского Университета им. Н.И. Лобачевского. Педагогические науки. 2015. №3 (39). С. 224 – 230.
- [6]. Розанова С.А.. К вопросу о теории и методике обучения математике в высшей технической школе. // Мир науки, культуры, образования. 2012. № 6 (37). С. 217-219.
- [7]. Bishop Alan J. Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education. Springer Science & Business Media. 2012. 196 p.
- [8]. Маркелов Г.Е. О преподавании основ математического моделирования. // Alma mater (Вестник высшей школы). 2014. № 3. С. 62-65.
- [9]. Huang C.H. Promoting Engineering Students' Mathematical Modeling Competency. // SEFI 40th annual conference. (September 23-26, 2012, Thessaloniki, Greece). Режим доступа: <http://sefi.be/conference-2012/Papers/Papers/031.pdf> (дата обращения: 8.07.2016)
- [10]. Sandip Banerjee. Mathematical Modeling: Models, Analysis and Applications. N.Y.: Chapman and Hall/CRC. 2014. 276 p.
- [11]. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Учебное пособие. 4-е изд., испр. СПб.: Лань. 2015. 448 с.
- [12]. Anastassiou George, Itan Iuliana. Intelligent Routines. Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple. Publisher: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2013. 582 p. DOI: [10.1007/978-3-642-28475-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-28475-5)

- [13]. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере: учеб. пособие для вузов. 4-е изд., перераб. М.: Форум. 2013. 366 с.
- [14]. Очков В.Ф. Преподавание математики и математические пакеты. // Открытое образование. 2013. № 2. С. 26 – 33.
- [15]. Будовская Л.М. Решение уравнений и систем в среде MathCad: методические указания по выполнению лабораторных работ по численным методам. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. 36 с.
- [16]. Будовская Л.М., Тимонин В.И. Решение дифференциальных уравнений и их систем в среде MathCad: методические указания к выполнению лабораторных работ. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. CD-ROM. 2013. 36 с. ФГУП "Информрегистр" № 0321302750.
- [17]. Титов К.В. Компьютерные технологии решения дифференциальных уравнений. // Технологии инженерных и информационных систем. 2015. № 2. С. 21-25
- [18]. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad: Учебное пособие. СПб.: Лань. 2008. 352 с.
- [19]. Маренич А.С. Использование WolframAlpha в преподавании математики в техническом вузе. // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 6. С. 559-568. Режим доступа: <http://technomag.neicon.ru/doc/780349.html> (дата обращения: 8.07.2016)
- [20]. Devendra Kapadia. Using Mathematica to Teach Calculus. // Wolfram Technology Conference. (October 11-13, 2007. Champaign, Illinois, USA). 2007. P. 58-68.
- [21]. Grace McClurkin, Joshua Mike. Utilizing Mathematica for Higher-Level Thinking in Calculus. // Wolfram Technology Conference. (20–22 October, 2015. Champaign, IL, USA, Wolfram's Headquarter City) . 2015. P. 76 – 81.
- [22]. James B. Riggs. Numerical Methods: Providing the Knowledge Needed to Solve Engineering Equations. // Mid Years Engineering Experience (MYEE) Conference. (March 30 – April 1, 2016. College Station, TX). 2016. P.58-63.
- [23]. Кремень Ю.А., Кремень Е.В., Кравчук А.И. Использование пакета МАТНЕМАТИСА при проведении занятий в курсе численных методов на ММФ БГУ. // Материалы международной научно-практической конференции «Математика и информатика в естественнонаучном и гуманитарном образовании». (Минск, 20–31 апреля 2012 г.). 2012. С. 239-242. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/12615> (дата обращения: 8.07.2016).
- [24]. Дьяконов В.П. Новый облик и новые возможности MATLAB+Simulink 8.0 (R20128). // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIV Международной научной конференции, посвященной 90-летию профессора М.Б. Балка. Смоленск: Издательство СмолГУ. 2013. Вып. 14. 244 с. С.16-20.
- [25]. Esfandiari R.S. Numerical Methods for Engineers and Scientists Using MATLAB. *California*: CRC Press. 2013. 550 p.