

УДК 629.78

Применение интегрального критерия для исследования периодических и квазипериодических орбит в задаче трех тел

Звягин Ф. В.^{1,*}, Лысенко Л. Н.¹

^{*}pk-bmstu@ya.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается возможность и целесообразность применения интегрального критерия, основанного на принципе наименьшего действия, для определения области существования периодических по Пуанкаре и квазипериодических орбит в задаче трех тел. Показано, что, несмотря на наличие нескольких типов критериев существования периодических орбит, поиск рациональных вариантов вычислительных процедур соответствующего вида продолжает оставаться актуальной задачей. Описываемый вариант решения позволяет выделить области возможного существования периодических орбит задачи трех тел, а также осуществить с высокой надежностью кластеризацию этих орбит по различным параметрам, таким как направление обращения, средний период обращения, средний эксцентриситет, среднее изменение углового положения линии апсид и другим.

Ключевые слова: эллиптическая ограниченная задача трех тел, сфера Хилла, орбиты F-класса, интегральный критерий, периодические и квазипериодические орбиты

Введение

Основой баллистического обеспечения проектов исследования и использования планет Солнечной системы являются периодические по Пуанкаре или квазипериодические орбиты в окрестностях этих планет. В дальнейшем орбиты указанных классов будем именовать «периодическими» в силу допустимости игнорирования их различий в рассматриваемой постановке. Для перевода космического аппарата (КА) на эти орбиты требуется знать их параметры. Зачастую невозможно точно реализовать параметры подлетной траектории таким образом, чтобы гарантировать получение требуемой конечной орбиты. Кроме того, вследствие тех или иных причин может измениться полетное задание. Таким образом возникает задача определения начальных условий движения в окрестности планеты для выведения КА на заданную периодическую орбиту.

Движение КА в малой окрестности планеты может быть описано в рамках задачи двух тел, однако это существенно снижает точность расчетов, когда речь заходит об ин-

тегрировании уравнений движения КА, входящего в сферу Хилла планеты извне. Возможным выходом служит использование уравнений движения задачи трех тел.

Уравнения движения эллиптической ограниченной задачи трех тел (ЭОЗТТ) в неравномерно вращающейся (пульсирующей) барицентрической системе координат в безразмерных величинах при расстоянии между основными телами (меньшего, массы μ , и большего, массы $(1-\mu)$) принято равным 1, истинной аномалии меньшего тела ν , постоянной тяготения равной 1, эксцентриситете орбит основных тел e , могут быть записаны как [1, с.548]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \nu^2} - 2 \frac{dy}{d\nu} &= \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \nu^2} + 2 \frac{dx}{d\nu} &= \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \nu^2} &= \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где силовая функция определена в форме

$$\Omega = \frac{1-\mu}{r_0} + \frac{\mu}{r_1} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}e z^2 \cos \nu, \quad r_0^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2, \\ r_1^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2.$$

За единицу времени принимается период обращения притягивающих тел относительно их общего барицентра, в первом приближении – период обращения меньшего тела относительно большего. В последующем производную по истинной аномалии будем обозначать точкой.

Приведенная выше система уравнений движения (1) может быть упрощена с целью дальнейшего анализа и получения некоторых аналитических решений, в том числе в виде периодических орбит, однако авторы сознательно остаются в рамках рассмотрения ЭОЗТТ.

Периодические орбиты эллиптической ограниченной задачи трех тел

Общее решение задачи трех тел, удобное для получения частных задач, пока еще не найдено, однако решения, известные для задачи двух тел, могут быть получены и в рамках задачи трех тел. Вместе с тем, в задаче трех тел существуют периодические решения, которые принципиально не могут быть найдены на основе решения задачи двух тел. К таким решениям, например, можно отнести ляпуновские орбиты в окрестностях коллинеарных точек либрации, орбиты F -класса, также именуемые в англоязычной литературе как *Distant Retrograde Orbits (DRO)* и многие другие, описанные в литературе [2, с.221, 3, с. 451].

Согласно Себехею [3, с.429] условием существования периодических орбит ОЗТТ является наличие двух перпендикулярных пересечений оси абсцисс рассматриваемой системы координат. Существуют периодические орбиты, для которых данное условие не вы-

полняется, поэтому сформулировано несколько различающихся между собой критериев их существования. Например, Уиттекер предложил свой вариант критерия выраженного через интеграл энергии, основанного на вариационном принципе для консервативных систем. Существование периодических орбит, согласно указанному критерию, определяется изменением знака вариации интеграла действия внутри некоторой области, ограниченной двумя замкнутыми кривыми. Согласно этому критерию, через интеграл энергии могут быть определены возможные области движения КА в ОЗТТ [3, с.429] с посещением внешних или внутренних областей, переходами из одной области в другую и наоборот. Данный критерий позволяет определить области существования ляпуновских периодических орбит. Однако, даже при определении области существования периодической орбиты, без использования аналитических моделей или применения численного интегрирования невозможно установить ее параметры. Поэтому поиск рациональных вариантов вычислительных процедур до настоящего времени остается актуальным, как это следует, например, из анализа орбит *F*-класса (*DRO*) [4–8].

Интегральный критерий

Для пояснения введенного ниже интегрального критерия приведем расширенное описание постановки задачи. Из анализа круговой ограниченной задачи трех тел [2, с.172] известно, что существует зависимость достижимых пассивно гравитирующей точкой областей от энергетического уровня ее траектории движения. Этот уровень задается интегралом энергии или, что по существу то же самое, интегралом Якоби. Границами указанных областей являются поверхности Хилла или поверхности нулевых скоростей.

Эллиптическая ограниченная задача трех тел не имеет интеграла энергии, который обычно заменяется его приближением в форме, предложенной Маршалом [9, с.91] и определяемой как:

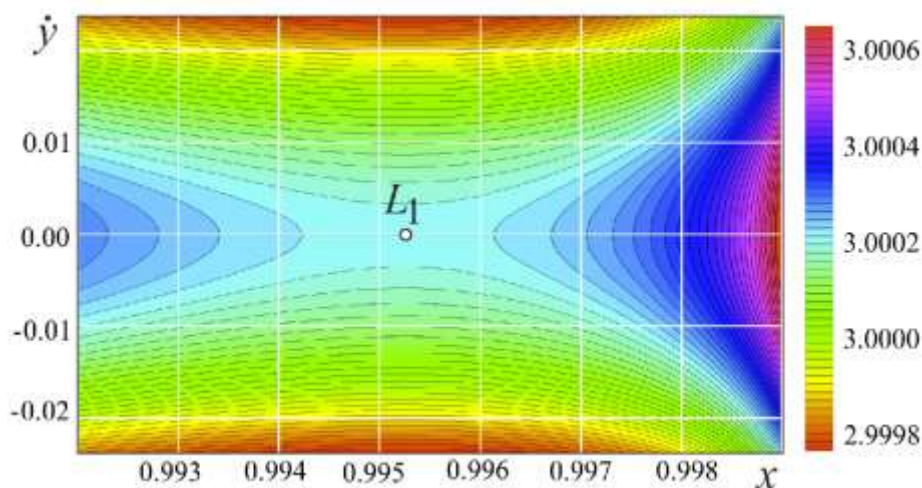
$$\begin{aligned} \Gamma(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = & \mu \left((\mu + x - 1)^2 + \frac{2}{\sqrt{(\mu + x - 1)^2 + y^2 + z^2}} + y^2 + z^2 \right) + \\ & (1 - \mu) \left((\mu + x)^2 + \frac{2}{\sqrt{(\mu + x)^2 + y^2 + z^2}} + y^2 + z^2 \right) - \\ & - (e \cos(v) + 1)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + z^2), \end{aligned} \quad (2)$$

где под $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ понимаются производные координат пассивно гравитирующей материальной точки — КА по истинной аномалии (или фазовые скорости). В случае ограниченной круговой задачи трех тел данная функция является интегралом Якоби, т.е. полным интегралом энергии системы, а фазовые скорости — безразмерными скоростями движущейся материальной точки.

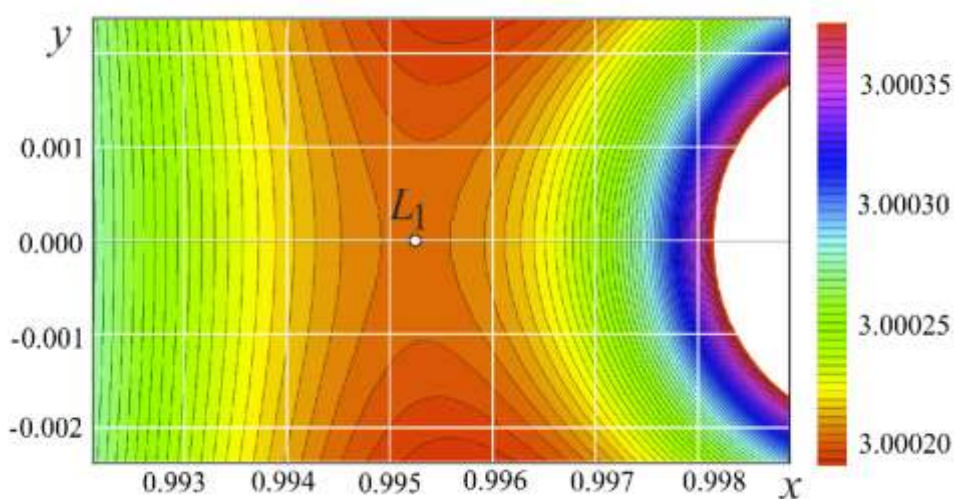
Для определенности укажем, что проведенные авторами основные численные исследования касались системы «Солнце-Марс-КА». Рассматривалась область возможных дви-

жений КА, близкая к меньшему телу, т.е. к Марсу. Предполагалось, что начальными условиями для интегрирования служит точка пересечения оси абсцисс и ортогональная данной оси фазовая скорость движения КА в этой точке, то есть фактически использовались необходимые условия существования периодических орбит по Себехею, приведенные выше.

На рис. 1 а) представлена графическая зависимость значения функции Γ для различных НУ движения КА. Координаты по осям соответствуют начальным условиям движения КА по положению и скорости в нормированных единицах рассматриваемой системы. В районе точки либрации L_1 присутствует т.н. «горлышко» [10, с.480], через которое КА может переходить из внутренних областей меньшего тела во внутренние области большего и наоборот. Для сравнения на рис. 1 б) приведен вид области поверхности Хилла для различных значений интеграла Якоби в окрестности указанной коллинеарной точки либрации. Как в первом, так и во втором случае по представленным зависимостям невозможно определить вид конечной траектории движения.



а)



б)

Рис. 1. а) значения функции Якоби для различных НУ движения КА, б) поверхности Хилла для различных значений интеграла энергии

Для уточнения характера движения был применен основанный также фактически на принципе наименьшего действия интегральный критерий, введенный в работе [11] и показавший свою эффективность для построения классификации орбит перелета в окрестность коллинеарной точки либрации с выведением на ляпуновскую орбиту. Физический смысл введенного интеграла заключается в том, что вдоль каждой траектории вычисляется накопленное значение разности энергии движущейся и покоящейся материальной точки, находящейся в данной координате пространства. То есть для каждой точки траектории вычисляется разность между интегралами функции Γ для движущейся и покоящейся точек. Наименьшее значение получаемого интеграла будет достигаться в точках либрации ввиду того, что скорость движения в этих точках равна нулю. В дальнейшем введенный интеграл будем называть интегралом разности энергий.

Таким образом, для каждой i -той орбиты, являющейся численным решением (1) при заданных начальных условиях, из семейства рассчитанных, обозначаемого нижним индексом t_0 , вычисляется интеграл по времени:

$$\Gamma_{t_0}^i = \int_{t_0}^{t_1} \left(\Gamma(x_{\mathbf{v}}^i(t), y_{\mathbf{v}}^i(t), z_{\mathbf{v}}^i(t), \dot{x}_{\mathbf{v}}^i(t), \dot{y}_{\mathbf{v}}^i(t), \dot{z}_{\mathbf{v}}^i(t)) - \Gamma(x_{\mathbf{v}}^i(t), y_{\mathbf{v}}^i(t), z_{\mathbf{v}}^i(t), 0, 0, 0) \right) dt, \quad (3)$$

Полученное значение, как будет показано ниже, характеризует орбиту КА.

Авторы, естественно, отдают себе отчет в том, что с выбором критерия связана наиболее уязвимая часть постановки задачи выполненного исследования. Более того, они полагают возможным утверждать, что эта часть работы является практически единственной ее «тонкой» частью.

Известно, что правильный выбор критерия играет существенную, если не определяющую роль в нахождении конечных результатов решения. Вопрос только в том, что следует понимать под «правильным выбором». В теории принятия решений никто еще не предложил приемлемого универсального подхода к формализации подобной процедуры.

В предлагаемой вниманию читателя работе она также носит в достаточной степени субъективный характер. Все остальное в представленных материалах настолько «прозрачно» и легко воспроизводится при наличии подходящей вычислительной техники и квалификации возможных оппонентов, что не может вызвать сколь-нибудь обоснованной критики и тем более серьезных доводов для их неприятия. Поэтому имеет смысл дополнительно сосредоточиться прежде всего на соображениях, касающихся именно выбора вида и структуры критерия. При всем при том еще раз подчеркнем, что если не существует общих правил его формулирования, любая квалифицированная попытка доказательства некорректности используемого критерия, будет представлять собой, вообще говоря, задачу бесперспективную. При понимании этого, для авторов, тем не менее очевидно, что область применимости подхода будет зависеть от степени признания пользователем уровня

логичности структуры критерия и непротиворечивости его практического использования по отношению к достижимой достоверности результатов решения.

Последнее подтверждается численными результатами решения авторами многих модельных задач определения топологий движения и проведения кластеризации орбит различного типа в рамках ЭОЗТТ, нашедших отражение в ранее опубликованных работах. Полученные данные вычислительных экспериментов, имеющие в определенном смысле характер показателей «критерия истины», носят не только непротиворечивый характер по отношению к отдельным частным результатам других исследователей, полученных с использованием иных методов, но и практически совпадают с ними при уровне погрешностей, определяемых допустимой точностью вычислений.

В отношении физической трактовки принятого критерия и логики выбора его структуры отметим следующее. Энергетический характер критерия, очевидно, не может вызывать принципиальных возражений как определяющий вид орбитального движения. С энергетической точки зрения КА, будучи телом, выведенным на ляпуновскую орбиту любого радиуса, не может совершить охват меньшего притягивающего тела. Возмущение ляпуновской орбиты в сторону увеличения ее энергии приводит к образованию гетероклинической траектории, по которой КА будет совершать последовательный перелет из окрестности одной коллинеарной точки либрации в окрестность другой.

Дальнейшее изменение энергии приводит к уходу либо во внешние области меньшей планеты, либо во внутренние, то есть в последнем случае КА перейдет к обращению относительно меньшего притягивающего тела внутри сферы Хилла.

Ограничение сверху объясняется тем, что орбиты F -класса, несмотря на периодическое движение по ним КА относительно меньшего притягивающего тела, фактически являются орбитами относительно большего тела. Они лежат в энергетическом торе, охватывающем всю орбиту меньшего тела. Область существования этих орбит весьма значительна и фактически точка пересечения оси абсцисс их восходящими ветвями может располагаться во всем промежутке между притягивающими телами. Внутри сферы Хилла орбиты F -класса практически сливаются с орбитами, являющимися результатом решения задачи двух тел.

Теперь по поводу логики выбора внутренней структуры критерия. Поскольку, как это было отмечено, ЭОЗТТ не имеет интеграла энергии, соответствующего его выражению в ограниченной круговой задаче трех тел, он должен быть заменен функцией Якоби специального вида. Критерий может быть выражен в форме интеграла по истинной аномалии от разности функций Якоби для движущейся и покоящейся (напомним, что во вращающейся барицентрической системе координат) точек, имеющих одни и те же координаты.

Действительно, на прямой, соединяющей коллинеарные точки либрации L_1 и L_2 , область гравитационного влияния меньшего притягивающего тела является минимальной (в

пределе — нулевой) на границе сферы Хилла для этого тела. За пределами соответствующего расстояния орбита КА, обращающегося вокруг обсуждаемого тела будет располагаться, хотя и в малой окрестности, но все же за пределами сферы Хилла, и поэтому все в большей степени будет подвергаться возмущающим воздействиям приливных сил тела большей массы. С другой стороны, чем дальше КА от внешней границы области сферы Хилла, тем выше уровень регуляризации решения задачи в силу минимизации влияния гравитационных возмущений большего тела, что должно найти отражение в структуре критерия, фактически заключающегося в вычислении интеграла по времени от нормированных вариаций относительных составляющих кинетической энергии лагранжиана задачи трех тел вдоль траектории движения КА.

Некоторые результаты исследования

На основе изложенного выше принципа был проведен расчет возможных траекторий движения КА при подлете из внутренней области Марса к указанной планете и характеризующего эти траектории параметра Γ_{to}^i . Начальными условиями для расчета траектории служили точка пересечения оси абсцисс вращающейся системы координат и фазовая скорость, нормальная к указанной оси. На рис. 2 представлен вид зависимости Γ_{to}^i для полного диапазона полученных для случая плоского движения значений. Две светлые области — сверху и в середине ограничивают более темную область, соответствующую значениям $\Gamma_{to}^i < 0.1$. Внутри указанной области выделяется три «острова» более светлого цвета. Данная область соответствует движениям КА в окрестности исследуемой планеты.

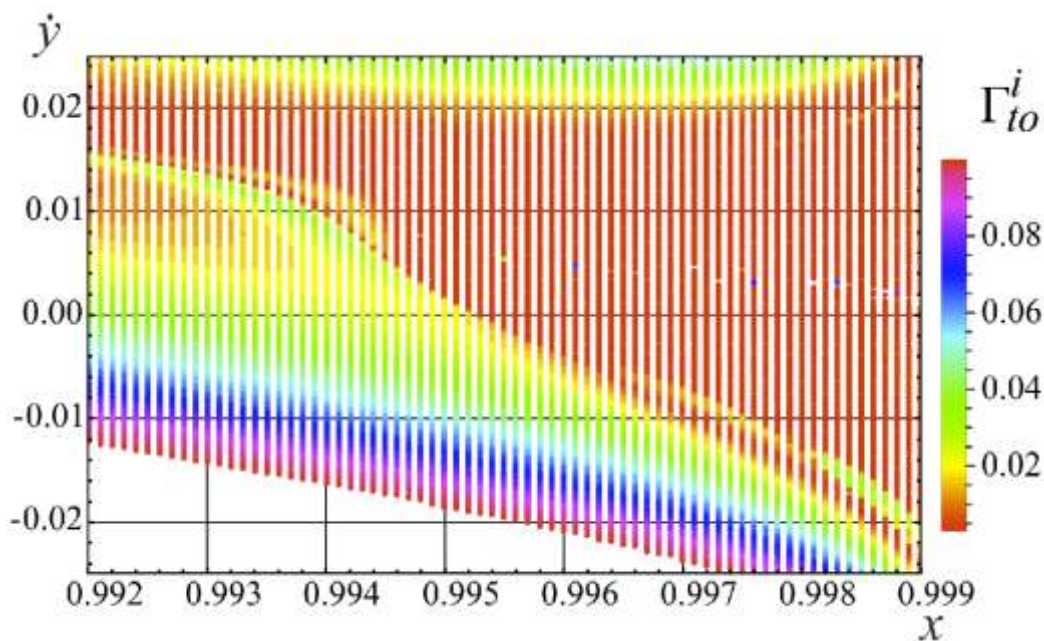


Рис. 2. Распределение орбит по интегралу разности энергий для $\Gamma_{to}^i < 0.1$

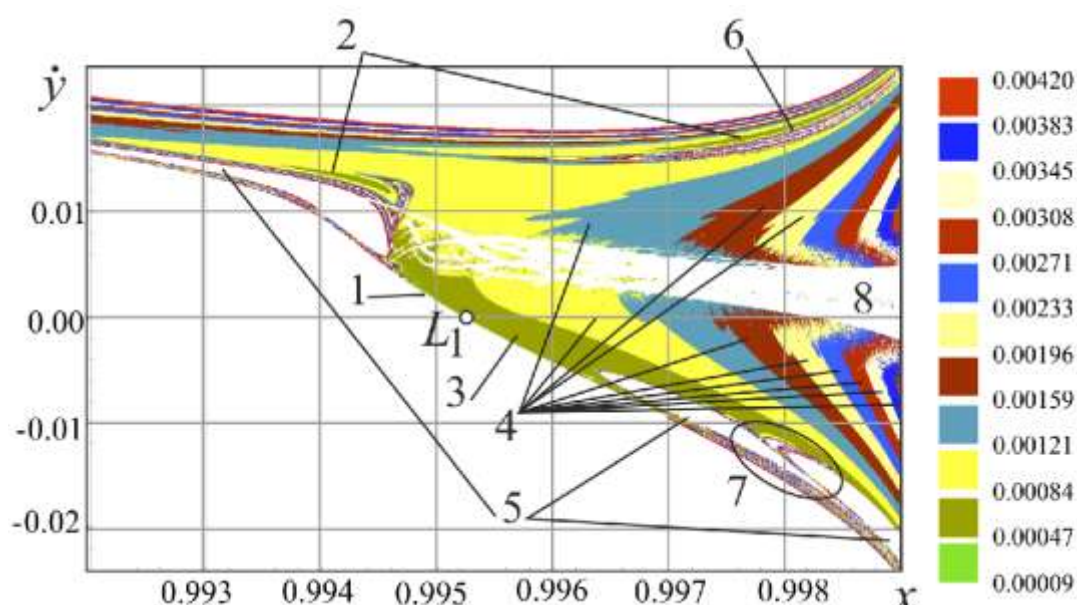


Рис. 3. Распределение орбит по интегралу разности энергий для $\Gamma_{to}^i < 0.0042$. Объяснение для указанных цифрами областей приводится в тексте.

На рис. 3 представлена та же зависимость для $\Gamma_{to}^i < 0.004$. Он отражает всю сложность динамики движения в задаче трех тел для исследованных начальных условий. Цифрами на нем обозначены характерные области движения КА.

1. Ляпуновские орбиты коллинеарной точки либрации L_1 – ограничивающая исследуемую область значений Γ_{to}^i снизу линия. Часть указанной линии слева от точки либрации L_1 относится к начальным условиям движения по восходящему полувитку, справа от L_1 – к нисходящему.

2. Ляпуновские орбиты коллинеарной точки либрации L_2 – две области начальных условий; пример орбит, соответствующих указанным начальным условиям приведен на рис. 4. траектории 5 и 6.

3. Область квазипериодических орбит со средним эксцентриситетом и значительным смещением оси апсид (рис. 4, траектории 1 – 3).

4. Области квазипериодических орбит с прямым и ретроградным обращением различного эксцентриситета (рис. 4, траектория 4). Для упрощения рисунка стрелками не указаны области, прилежащие к притягивающему центру вверх, закрашенные сплошным цветом.

5. Три «острова», границы которых имеют сложную структуру. Фактически эта граница, наряду с 6, отражает явления динамического хаоса, в том числе удвоение периода, перемежаемость, сильную зависимость от начальных условий. Некоторые особенности структуры границы демонстрирует рис. 5.

6. Область орбит F -класса (рис. 4, траектории 7 и 8). Фактически область начальных условий для выведения на указанные орбиты простирается дальше влево, вплоть до границ рисунка.

7. Одна из областей сложной хаотической динамики – перешеек между двумя «островами». Схема структуры указанной области приведена на рис. 5.

8. Белым цветом, за исключением областей внутри «островов», имеющие большие значения Γ_{io}^i , обозначены начальные условия, которые соответствуют соударению КА с планетой.

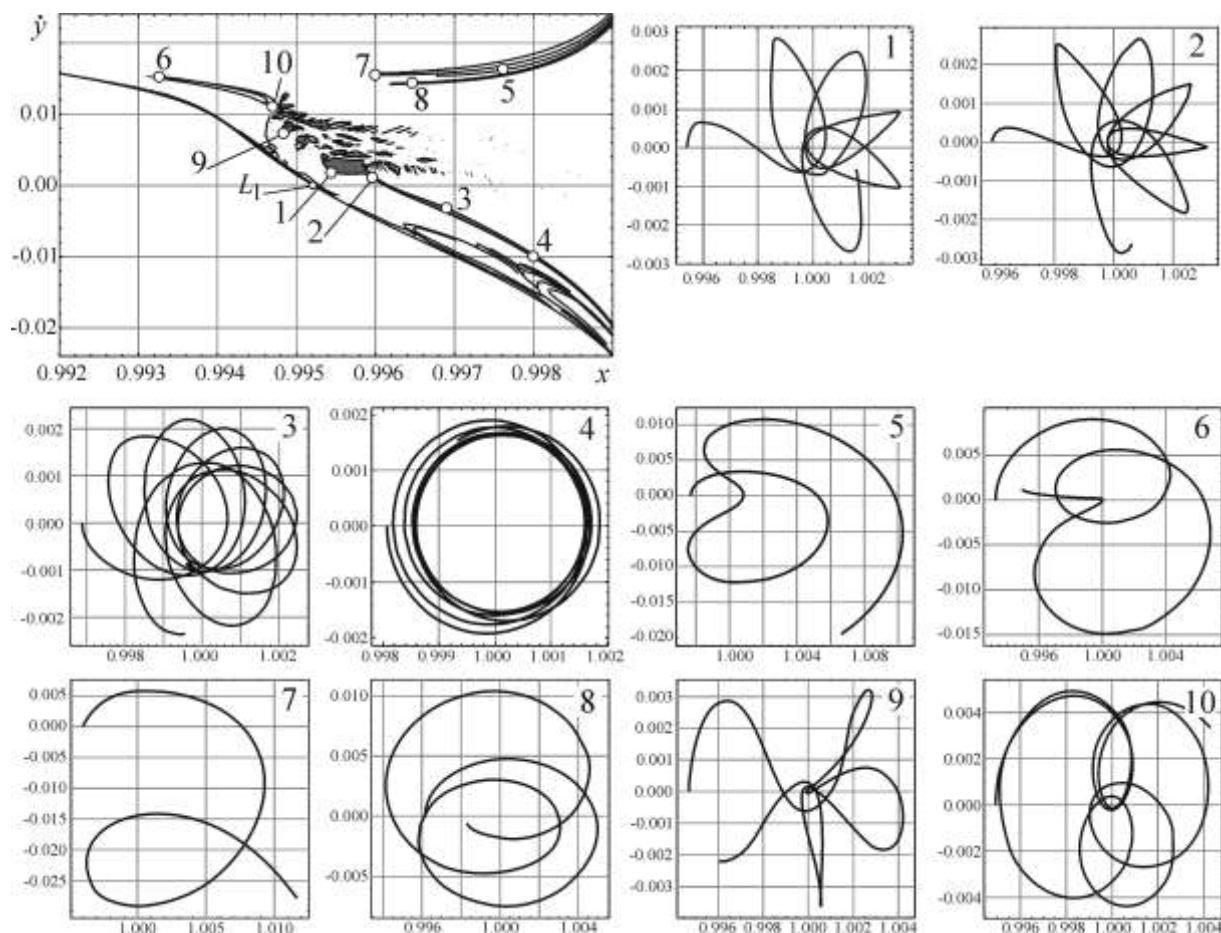


Рис. 4. Некоторые особенности структуры для $\Gamma_{io}^i < 0.00095$

Для качественной прорисовки деталей портрета рассмотрен достаточно узкий диапазон значений Γ_{io}^i , позволяющий четко выявить структуру границ некоторых характерных областей начальных условий движения КА. Представленный на рис. 4 портрет состоит из двух частей. Области начальных условий, соответствующие хаотической динамике, построены для случая $0.00045 < \Gamma_{io}^i < 0.0005$, области начальных условий, соответствующие регулярной динамике, построены для случая $0.0009 < \Gamma_{io}^i < 0.00095$. Приведенные на рис. 4 примеры траекторий движения КА для случаев 1 – 4 демонстрируют характер изменения траекторий от высокоэллиптических (в первом приближении), совершающих периодические движения в пределах сферы Хилла с касанием данной сферы, до почти круговых. Примеры 5 и 6 соответствуют начальным условиям выведения КА на возмущенные ляпуновские орбиты точки L_2 . Траектории 7 и 8 являются возмущенными траекториями орбит

F -класса, причем траектория 7 отстает от движения планеты, а траектория 8 опережает его. Траектория 9 является одной из возможных траекторий для двухимпульсных схем выведения КА на ляпуновскую орбиту в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 . Траектория 10 – возмущенная траектория периода, кратного 4, проходящая через окрестности двух коллинеарных точек либрации планеты.

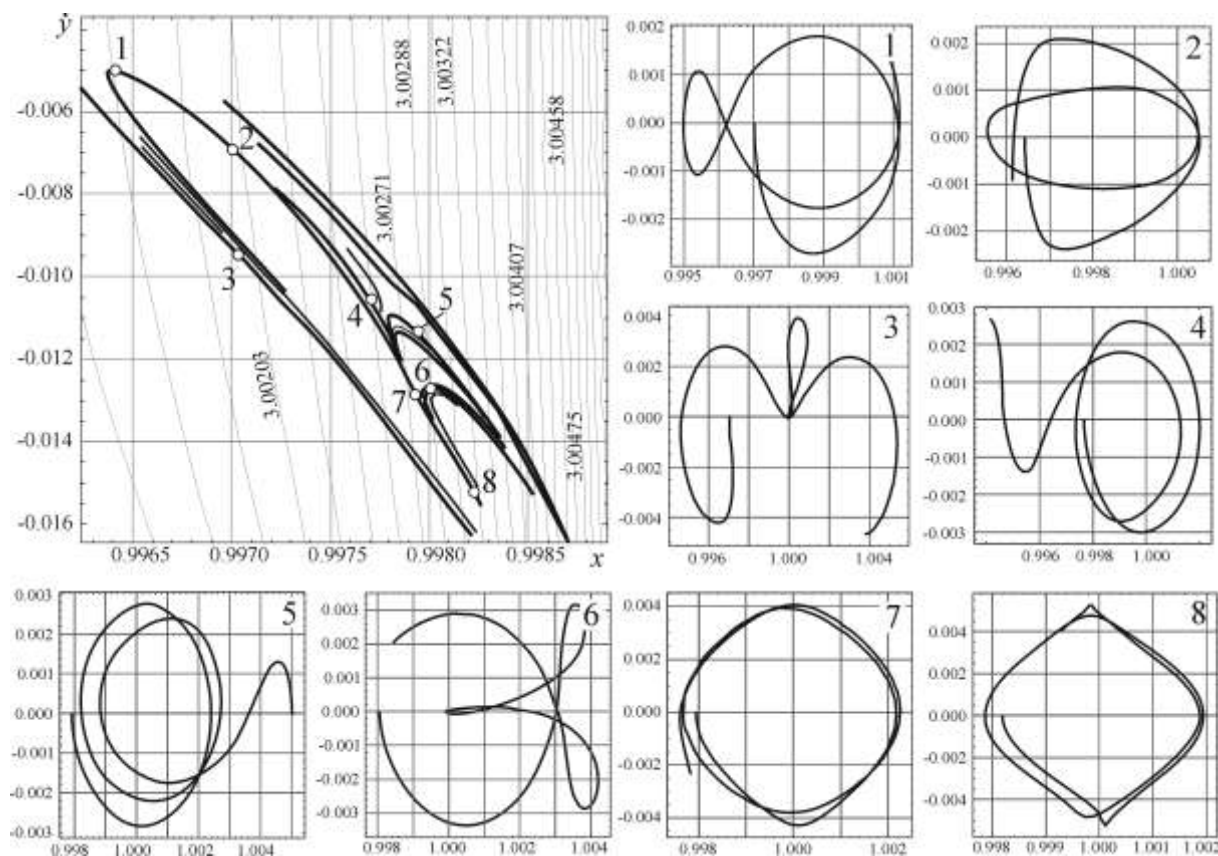


Рис. 5. Схема структуры границ «островов»

На рис. 5 представлена схема границ двух нижних «островов», полученная для случая $\Gamma_{io}^i < 0.0005$. Даны типичные орбиты, начальными условиями для получения которых послужили указанные границы. Также на рисунке нанесены линии уровней функции Якоби, соответствующие покоящейся точке. Хорошо прослеживается характер изменений формы для орбит 1 – 2 – 7 – 8 от самопересекающейся двухпериодической орбиты до орбиты, которая в дальнейшем превращается в «двойную восьмерку». Орбита 3 представляет собой одну из возможных гетероклинических орбит перелета из окрестности точки либрации L_1 в окрестность точки либрации L_2 и обратно. Орбиты 4 и 5 демонстрируют выход во внутреннюю область (орбита 4) и во внешнюю область (орбита 5) сферы Хилла через окрестности коллинеарных точек либрации.

Не все из приведенных орбит являются периодическими вследствие ограничений численного характера исследования, однако они дают хорошее приближение для получения периодических орбит представленного вида.

Дальнейший анализ полученных начальных условий с учетом анализа по интегралу разности энергий может быть проведен посредством определения параметров оскулирующей орбиты, построенной для максимально и минимально удаленных точек исследуемой орбиты от притягивающего центра. Такая аппроксимация проводится для как минимум трех точек орбиты, что соответствует одному условному периоду обращения вокруг планеты. Вследствие того, что решениями ЭОЗТТ являются орбиты, не являющиеся эллиптическими, данный способ следует признать приближенным, но, как это показано ниже, он позволяет получить дополнительную информацию о форме и характере исследуемых орбит. Результаты представлены на рис. 6.

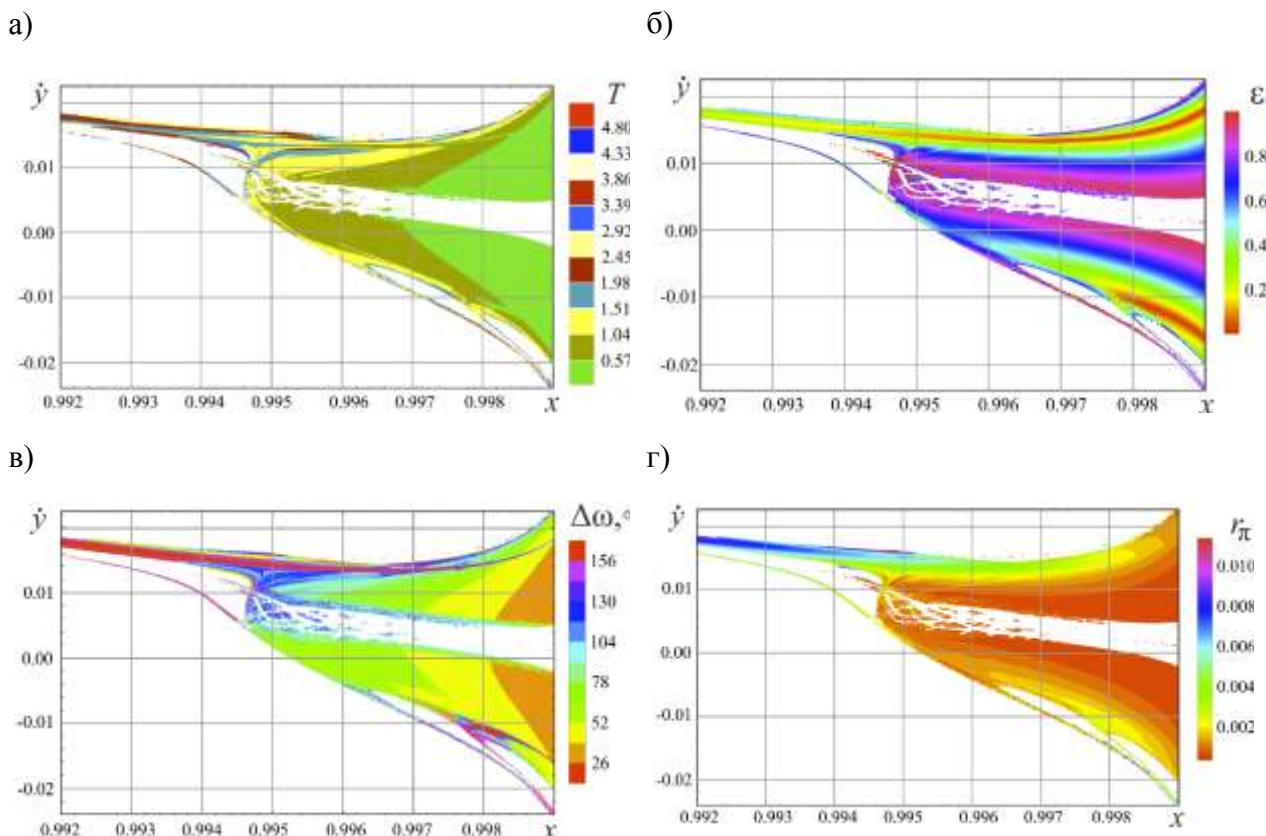
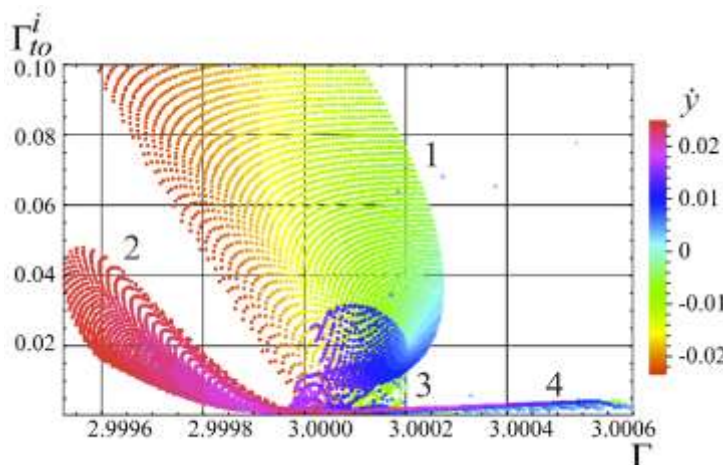


Рис. 6. Распределение орбит по усредненным параметрам оскулирующей орбиты для $\Gamma_{to}^i < 0.004$: а) по среднему периоду обращения; б) по среднему эксцентриситету; в) по среднему смещению линии апсид; г) по среднему расстоянию перицентра.

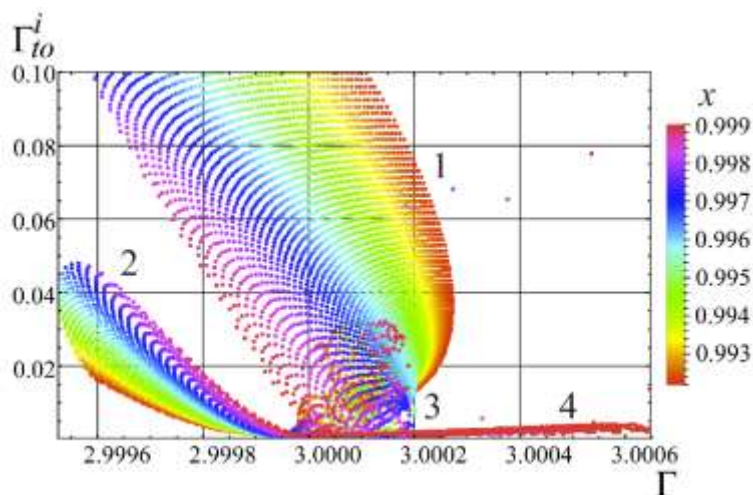
Приведенные рисунки показывают дополнительные особенности портрета начальных условий. При этом области регулярной и хаотической динамики четко проявляются. Следует обратить внимание, что на рис. 6 а) – в) в верхней части присутствует выделяющаяся другими цветами линия, соответствующая орбитам F -класса. На этом основании, а также на основании анализа структуры, приведенной на рис. 4, можно предположить, что орбиты F -класса ограничивают область периодических движений в ограниченной задаче трех тел сверху. Рис. 6 г) позволяет определить области движения КА по орбитам с заданным значением перицентра.

Энергетический анализ

Приведенный выше анализ позволил на уровне физических параметров «положение – скорость» начальных условий движения КА построить характеристики конечных орбит. Перейдя теперь от величин «положение-скорость», к рассчитанным энергетическим характеристикам можем построить множества, отражающие поведение КА, движущегося по разным орбитам, в координатах, описывающих энергетику такого движения.



а)



б)

Рис. 7. Распределение орбит в координатах Γ и Γ_{to}^i по НУ движения

Анализ представленных характеристик, а также характеристик, приведенных выше, дает основание для следующих заключений.

1. Представляется возможным выделить четыре большие области, к которым относятся траектории (орбиты) КА из ансамбля рассмотренных значений: 1 – область возмущенных опережающих орбит F -класса, 2 – область возмущенных отстающих орбит F -класса, 3 – область сложной динамики и сильной зависимости от начальных условий движения, 4 – область периодических орбит.

2. Каждая из областей содержит траектории, обладающие почти всем диапазоном рассмотренных значений начальных условий движения, что не позволяет только по двум параметрам, характеризующим энергетику траектории, однозначно выделить требуемую. В то же самое время этот факт говорит о принципиальной достижимости требуемого движения при достаточно широком диапазоне начальных условий движения либо по положению, либо по скорости.

Область существования периодических и квазипериодических орбит без особенностей динамики согласно рис. 3 представлена на рис. 8. Множество траекторий предварительно разделяется на подмножества по третьему параметру, для указанного случая – фазовой скорости $\dot{\varphi}$.

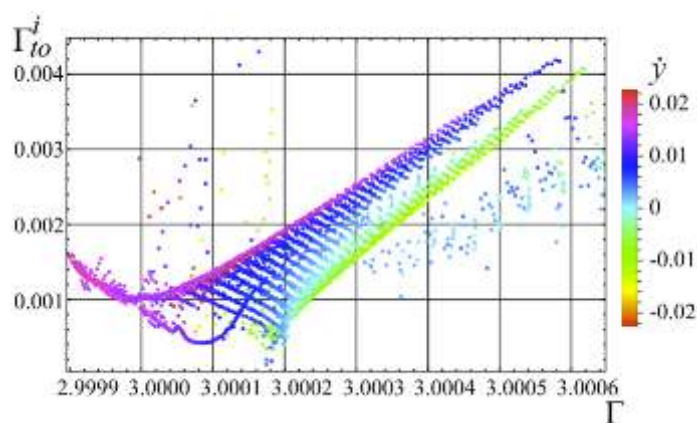


Рис. 8. Область НУ для движения по периодическим и квазипериодическим орбитам без особенностей динамики

Область существования периодических решений, условно говоря, представляет собой наконечник копья. Верхней границей «копья» является продолжение множества орбит F -класса внутри сферы Хилла. Эти почти круговые орбиты имеют попятное (ретроградное) движение. Нижней границей «копья» является множество почти круговых орбит, имеющих прямое движение. Основание «копья» ограничено ляпуновскими орбитами в окрестности точки L_1 («хвостик» на рисунках). В левой части образуется «перешеек», в котором ляпуновские орбиты и орбиты F -класса сближаются. Данная область в соответствии с рис. 7 может быть отнесена к области сложной динамики.

Анализ области существования периодических орбит в координатах, характеризующих энергетику этих орбит, а также, как это следует из анализа, результаты которого отражены на рис. 3 – 6, позволил установить, что:

1. Орбиты хорошо кластеризуются по различным параметрам, таким как направление обращения, средний период обращения, средний эксцентриситет, среднее изменение углового положения линии апсид и другим.
2. Чем ближе характеристическая точка орбиты расположена к средней линии «копья», тем большее значение эксцентриситета у данной орбиты.

3. Чем ближе характеристическая точка орбиты расположена к основанию «копья», тем большую величину имеет перицентр этой орбиты и тем более ее форма близка к круговой.

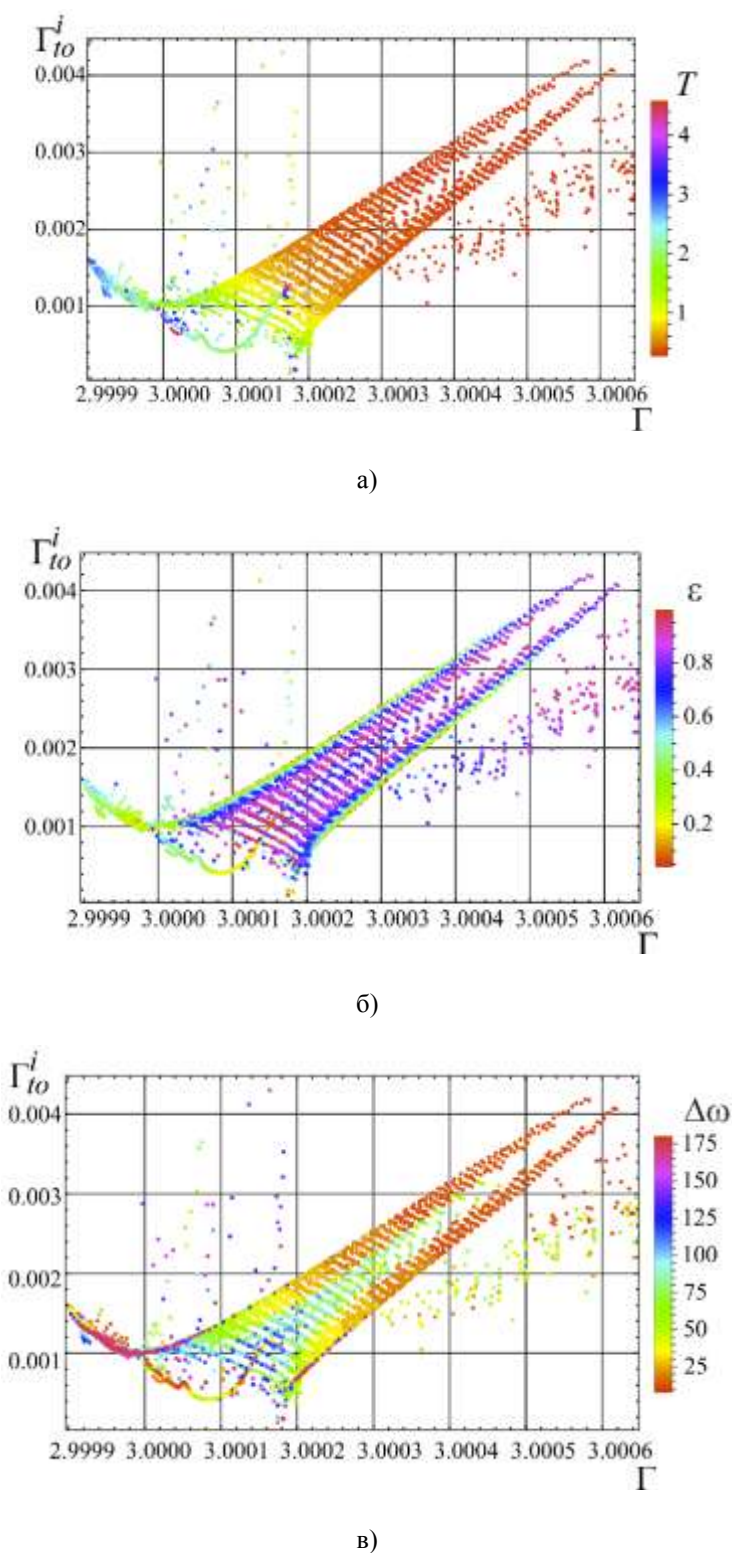


Рис. 9. Средние параметры оскулирующих орбит: а) средний период обращения, б) средний эксцентриситет, в) среднее изменение углового положения линии апсид

Основные выводы и обобщения

Введенный интеграл разности энергий позволил дать достаточно полное описание траекторий движения (орбит) КА в рамках эллиптической ограниченной задачи трех тел для рассмотренных начальных условий движения. Так, применение указанного интеграла позволило четко дифференцировать области регулярной и хаотической динамики задачи трех тел, проследить эволюцию формы орбит, определить характеристики оскулирующих орбит, дающих представление о параметрах движения КА внутри сферы Хилла.

Укажем на установленные важные свойства введенного интеграла разности энергий.

1. Функция интеграла всюду неотрицательно определена.
2. Минимум данного интеграла достигается в точках либрации.
3. Первые локальные минимумы интеграла для заданных начальных условий движения КА лежат на ляпуновских орбитах соответствующего радиуса.
4. Следующие локальные минимумы интеграла достигаются на границах обособленных областей внутри областей регулярной динамики и указывают на существование хаотических динамических режимов в системе.
5. В областях регулярной динамики значения интеграла изменяются плавно, без скачков, что, напротив, свойственно областям хаотической динамики.

Возможной физической интерпретацией интеграла разности энергий может быть следующая. Данный интеграл фактически позволяет определить обратную степень зависимости движения от начальных условий. Так, из коллинеарных точек либрации, являющихся неустойчивыми, движение возможно в любом направлении при минимальных возмущениях. Для ляпуновских орбит, являющихся пересечением притягивающих и отталкивающих многообразий точек либрации [13, с. 49] выбор движения ограничен траекториями соответствующего фазового пространства. Наконец, движение вблизи притягивающего центра фактически полностью определено в рамках задачи двух тел.

Проведенные авторами исследования НУ для движения КА в окрестности Венеры, Марса, Земли, Юпитера с использованием введенного интеграла позволяют сделать вывод о том, что структура областей, определяемых значениями интеграла, топологически идентична рассмотренному в настоящей работе случаю.

Список литературы

1. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Дубошина Г.Н. . М.: Наука, 1976. 864 с.
2. Henon M. Generating families in the restricted three-body problem. Springer, 1997. 289 p. DOI: [10.1007/3-540-69650-4](https://doi.org/10.1007/3-540-69650-4)
3. Себекей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел: [пер. с англ.] / под ред. Дубошина Г.Н. . М.: Наука, 1982. 656 с.
4. Звягин Ф.В. Об одном классе орбит в задачах трех и четырех тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2010. №2. С. 105–113.

5. Звягин Ф.В. Двухимпульсные перелеты с околоземных орбит ожидания на орбиты F-класса задачи трех тел // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. №4. С. 1-13. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/353104.html> (дата обращения 03.07.2016)
6. Лысенко Л.Н., Звягин Ф.В. Перспективы использования орбит F-класса при решении задач баллистического обеспечения межпланетных полетов // ОНТЖ «Полет». 2013. №4. С. 31–37.
7. Звягин Ф.В., Лысенко Л.Н. Энергетический анализ перспектив использования орбит F-класса для построения спутниковых систем прикладного назначения // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. №3. С. 81–91.
8. Звягин Ф.В., Лысенко Л.Н. Анализ реализуемости продолжительного удержания КА в окрестности спутника планеты при движении по управляемым и свободным орбитам F-класса // ОНТЖ «Полет». 2014. № 9. С. 15-20.
9. Маршал К. Задача трех тел. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. 639 с.
10. Лысенко Л.Н., Бетанов В.В., Звягин Ф.В. Теоретические основы баллистико-навигационного обеспечения космических полетов / под общ. ред. Л.Н. Лысенко // М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 520 с.
11. Звягин Ф.В. Двухимпульсные перелеты на гало-орбиты в задаче трех тел // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. №3. С. 1-12. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/352636.html> (дата обращения 03.07.2016)
12. Звягин Ф.В. Об оптимизации орбит перелета в окрестность точки либрации L_1 системы Солнце—Земля // ОНТЖ «Полет». 2010. № . С. 19–24.
13. Wang Sang Koon, Martin W. Lo, Jerrold E. Marsden, Shane D. Ross, Dynamical Systems: The Three-body Problem and Space Mission Design (Interdisciplinary Applied Mathematics). Springer, 2011. 331 p.

Application of Integral Criterion for the Research of Periodic and Quasi-Periodic Orbits in the Three-Body Problem

F.V. Zvyagin^{1,*}, L.N. Lysenko¹

^{*}pk-bmstu@ya.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: elliptic restricted three-body problem, Hill sphere, distant retrograde orbits, integral criterion, periodic and quasiperiodic orbits

The periodic and quasi-periodic orbits of the spacecraft flights are one of the foundations for ballistic design of space exploration missions. In the simplest case the orbits can be a solution of the problem of two bodies, which does not allow us to reach high calculation accuracy of the flight trajectory. Modern ballistic design tasks have to be solved using the restricted problem of three bodies (RPTB). This problem has no general solution that can be directly used for calculations. Each time a particular solution of the system of differential equations is determined for the particular initial conditions of the movement. This is a possible way to calculate the periodic and quasi-periodic orbits within the Hill sphere and outside of it. The F-orbits (distant retrograde orbits), hetero-clinic orbits connecting the collinear libration points and some others have been resulted from the numerical solution of a system of differential equations of elliptic RPTB. For some initial conditions the task demonstrates the properties of a chaotic system. Calculation of Lyapunov's characteristic exponents is often used to analyze such systems. This method has disadvantages. The strictly periodic orbits, for instance, have a zero senior Lyapunov's characteristic exponent. As a result, this makes it difficult to determine, for example, the multiplicity of the orbit period.

The paper suggests an integral criterion based on calculation of the integral of the square of the phase velocity along the trajectory, which is a particular solution of the elliptical RPTB. This criterion allows us to build the maps of dynamical regimes as a dependence on the initial conditions, completely demonstrating a complexity of the system dynamics. Due to the fact that the periodic and quasi-periodic orbits were of main the interest for research the appropriate sets of initial conditions were used. The fact that a region of the existence of periodic orbits in a neighborhood of the smaller attracting body of the RPTB lies between the Lyapunov's orbits and the distant retrograde orbits can be considered to be an important result of the study. In addition, the applied integral criterion allows us to give a quantitative estimate of the topological properties of the computed orbits, demonstrates a versatility of the map of dynamic regimes for all the planets of the Solar system.

References

1. Duboshin G.N., ed. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoj mehanike i astrodinamike* [Reference manual on celestial mechanics and astrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 864 p. (in Russian).
2. Henon M. *Generating families in the restricted three-body problem*. Springer, 1997. 289 p. DOI: [10.1007/3-540-69650-4](https://doi.org/10.1007/3-540-69650-4)
3. Szebehely V. *Theory of orbits. The Restricted Problem of Three Bodies*. Yale University, New Haven, Connecticut. Academic Press New York and London, 1967. 656 p. (Russ. ed.: *Teoriia orbit: ogranichennaiia zadacha trekh tel.* Moscow, Nauka Publ, 1982. 656 p.).
4. Zvyagin F.V. About One Class of Orbits in Three- and Four-Body Problems. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie = Ser. Instrument Engineering*, 2010, no. 2, pp. 105-113. (in Russian).
5. Zvyagin F.V. Double-pulse flights from near-earth waiting orbits to F-orbits of the three-body-problem. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*. 2012, no. 4, pp. 1-13. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/353104.html> (accessed 03.07.2016) (in Russian).
6. Lysenko L.N., Zvyagin F.V. On Perspective Of Using F-class Orbits In Interplanetary Mission Design and Navigation. *ONTZh «Polet» = All-Russian Scientific-Technical Journal «Polyot» («Flight»)*, 2013, no. 4, pp. 31–37 (in Russian).
7. Zvyagin F.V., Lysenko L.N. Energy Analysis of Prospects of Using the F-Class Orbits for Formation of Applied Satellite Systems. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie = Ser. Instrument Engineering*. 2014. no. 3, pp. 81–91. (in Russian).
8. Zvyagin F.V., Lysenko L.N. Analysis of Opportunity of Prolonged Retention Spacecraft in the Vicinity of the Satellite Planet While Driving on a Controlled and Free Orbits F-class. *ONTZh «Polet» = All-Russian Scientific-Technical Journal «Polyot» («Flight»)*, 2014, no. 9, pp. 15-20 (in Russian).
9. Marchal C. *The Three-body Problem*. Elsevier, 1990. 639 p. (Russ. ed.: *Zadacha trekh tel.* Moscow-Izhevsk, Institute of Computer Science Publ., 2004. 639 p.).
10. Lysenko L.N., Betanov V.V., Zvyagin F.V. *Teoreticheskie osnovy ballistiko-navigacionnogo obespechenija kosmicheskikh poletov* [The theoretical basis of the space flight ballistic-navigation support]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2014. 520 p. (in Russian).
11. Zvyagin F.V. Double-pulse flights to halo-orbits in the three-body problem. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*. 2012, no. 3, pp. 1-12. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/352636.html> (accessed 03.07.2016) (in Russian).
12. Zvyagin F.V. On Optimization Of Trajectory Of Flight Towards Libration Point L_1 In Sun-Earth System. *ONTZh «Polet» = All-Russian Scientific-Technical Journal «Polyot» («Flight»)*, 2010, no.4, pp. 19-24 (in Russian).

13. Wang Sang Koon, Martin W. Lo, Jerrold E. Marsden, Shane D. Ross, *Dynamical Systems: The Three-body Problem and Space Mission Design (Interdisciplinary Applied Mathematics)*. Springer, 2011. 331 p.