

УДК 537.87

Об обратной теореме Пойнтинга в классической электродинамике

Макаров А. М.¹, Лунёва Л. А.^{1,*},

[*lunevala2008@rambler.ru](mailto:lunevala2008@rambler.ru)

Макаров К. А.¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Следствием системы уравнений классической электродинамики является известная теорема Пойнтинга. Обратная теорема Пойнтинга состоит в утверждении, что систему уравнений Максвелла (закон электромагнитной индукции и закон полного тока) можно получить исходя из постулата об априорной справедливости теоремы Пойнтинга и выражения для плотности потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга). В работе проведён анализ известного доказательства обратной теоремы Пойнтинга, устранены погрешности этого доказательства и математически строго получены уравнения закона электромагнитной индукции и закона полного тока. Проведено обсуждение границ применимости предложенного метода.

Ключевые слова: закон электромагнитной индукции, закон полного тока, вектор Пойнтинга, теорема Пойнтинга, система уравнений Максвелла

Введение

При дедуктивном методе обучения основам классической электродинамики можно постулировать систему дифференциальных уравнений Максвелла как теоретическое обобщение всех известных экспериментальных результатов исследований электромагнитных явлений и принципа близкодействия [1]. Известны методы обоснования системы уравнений Максвелла с использованием вариационных методов [2], методов, использующих скрытую симметрию уравнений электро- и магнитостатики в предположении сохранения упомянутой симметрии в общем случае [3,4], методы теории калибровочных полей [5] и методы непосредственного использования постулатов СТО [6]. Математический аппарат векторного анализа, необходимый для выполнения соответствующих выкладок в полной мере содержится в монографии [7]. Следствием системы уравнений Максвелла является известная теорема Пойнтинга. Для первого знакомства с предметом важно обеспечить логическую строгость изложения, доступность и наглядность проводимых вычислений для студента, только приступающего к изучению современной физики. Курс "Введение в теоретическую физику" Макса Планка во многих отношениях является образцом для преподавания физики в техническом университете [8]. В монографии [8] предложен

метод получения «роторных» уравнений классической электродинамики, исходя из постулата об априорной справедливости теоремы Пойнтинга (обратная теорема Пойнтинга). Заметим, что связанные с теоремой Пойнтинга вопросы актуальны и сегодня, как с точки зрения теоретических исследований, так и с точки зрения практического использования [9-14].

В настоящей работе устранены погрешности доказательства обратной теоремы Пойнтинга, проведённого в монографии [8], и выявлены границы применимости предлагаемого метода.

Рассмотрим локальную формулировку теоремы Пойнтинга в современной форме записи с использованием общепринятых обозначений (используется система единиц измерения СИ):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) + \operatorname{div} \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0. \quad (1)$$

Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга) в уравнении (1) имеет вид

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (2)$$

Система уравнений классической электродинамики с необходимостью должна содержать материальные уравнения среды. Для изотропной однородной неподвижной среды, в частности, имеют место зависимости:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E},$$

в которых параметры среды являются постоянными скалярными величинами. Все использованные выше обозначения имеют общепринятое в классической электродинамике физическое содержание.

Следуя М.Планку, первое слагаемое уравнения (1) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

и вычислим дивергенцию плотности потока энергии (2) электромагнитного поля:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}. \quad (4)$$

Уравнение (1) с учётом соотношений (3) и (4) перепишем с выделением в явной форме напряжённостей электрического и магнитного полей в качестве сомножителей:

$$\vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{j} \right) + \vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} \right) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) является основополагающим уравнением метода М.Планка: "Имеющее общее значение уравнение (5) однородно и второй степени относительно *шести сла-*

гающих напряжений поля и их производных. Чтобы получить из него *шесть однородных линейных дифференциальных уравнений*, представляется наиболее естественным приравнять в нём нулю в отдельности те величины, которые имеют своими множителями $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ [8].

В символической форме записи эти дифференциальные уравнения имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (7)$$

Уравнения (6)-(7) в монографии [8] объявлены основными уравнениями теории Максвелла, а приведённые выкладки - "выводом" уравнений классической электродинамики из закона сохранения энергии электромагнитного поля как теоретического обобщения всех известных экспериментальных результатов исследований электромагнитных явлений и принципа близкодействия.

Рассмотрим замечания по предложенному выводу уравнений Максвелла.

Замечание 1. Существенной частью исходного постулата (1) является утверждение о том, что объёмная плотность энергии электромагнитного поля является суммой объёмной плотности энергии электрического поля (отдельно) и объёмной плотности энергии магнитного поля (тоже отдельно). При выводе "прямой теоремы Пойнтинга" других слагаемых в рассматриваемом выражении просто не возникало, хотя при более тщательном рассмотрении это обстоятельство заслуживает обсуждения. При доказательстве "обратной теоремы" форма записи объёмной плотности энергии электрического поля и объёмной плотности энергии магнитного поля ниоткуда не следует и вводится без какого то ни было доказательства, что, по-видимому, является некоторым недостатком исходного постулата.

Замечание 2. В работе [8] утверждается, что, поскольку совокупность независимых векторных полей "напряжения электрического поля $\vec{E}$ " и "напряжения магнитного поля $\vec{H}$ " описывается *шестью* компонентами поля (проекции на направления осей декартовой системы координат), то из уравнения сохранения электромагнитной энергии (теорема Пойнтинга в дифференциальной форме) достаточно получить *шесть* скалярных уравнений.

Известно, что для определения произвольного векторного поля в безграничном пространстве трёх измерений необходимо располагать объёмной плотностью векторного источника поля (это "ротор векторного поля") и объёмной плотностью скалярного источника векторного поля (это "дивергенция векторного поля") [7]. Таким образом, для установления системы уравнений классической электродинамики необходимо иметь не шесть уравнений, а восемь: уравнения для двух роторов и для двух дивергенций.

Замечание 3. В монографии [8] при попытке обосновать получаемые результаты используется предположение о "совершенной независимости друг от друга" напряжённости электрического поля и напряжённости магнитного поля. Однако, соотношения (6) и (7), как результат исходных предпосылок, никоим образом не могут считаться независимыми друг от друга. Если вернуться к уравнению (5), можно заметить, что условий независимости между собой векторных полей напряжённости электрического и магнитного поля не требуется для получения нужного результата. Действительно, "роторные" уравнения Максвелла (6) и (7) являются частными решениями уравнения (5). При этом открытым остаётся вопрос о существовании и возможном физическом содержании общего решения уравнения (5). В монографии [8] не использована возможность объявить уравнения Максвелла справедливыми как частное решение уравнения (5), а противоречащее существу получаемых результатов условие независимости компонент напряжённости электрического и магнитного поля применено некорректно.

Ниже обсудим возможности рассматриваемого подхода к установлению "роторных" уравнений Максвелла из "принципа энергии" [8]. Введём обозначение

$$f = \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{rot} \vec{H} + \vec{j} \right) + \vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} \right). \quad (8)$$

Правая часть выражения (8) является функцией независимых переменных (x, y, z, t) , т.е. пространственных координат и времени. Рассмотрим дифференциал функции f при бесконечно малых приращениях координат и времени:

$$df = (d\vec{r} \cdot \nabla) f + dt \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = d\vec{r} \cdot (\nabla f) + dt \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

Поскольку бесконечно малые приращения координат и времени являются независимыми (друг от друга) величинами, из уравнения (9) следует система дифференциальных соотношений

$$\nabla f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Используем полученный результат в конкретном случае, когда функция f определена соотношением (8):

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} - \text{rot} \vec{H} \right) \cdot \nabla \right) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} - \text{rot} \vec{H} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} - \text{rot} \vec{H} \right) \times \text{rot} \vec{E} + \vec{E} \times \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} - \text{rot} \vec{H} \right) + \\ & + \left(\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} \right) \cdot \nabla \right) \vec{H} + (\vec{H} \cdot \nabla) \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} \right) \times \text{rot} \vec{H} + \vec{H} \times \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} \right) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} - \text{rot} \vec{H} \right) + \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} - \text{rot} \vec{H} \right) + \\ & + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} \right) + \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} \right) = 0. \end{aligned}$$

Получаем четыре дифференциальных уравнения по числу независимых переменных – три пространственные координаты и время.

Заметим, что, если справедливы уравнения Максвелла, легко видеть, что соотношения (11) обращаются в тождество. Частное решение рассматриваемой системы получено. Но с поиском общего решения дело обстоит сложнее. Во-первых, система рассматриваемых уравнений нелинейная. Во-вторых, рассматриваемая система получена повторным дифференцированием, т.е. её порядок "выше", чем порядок исходного уравнения, что приводит к расширению множества возможных решений, часть из которых, возможно, не удовлетворяет исходному уравнению. Последнее легко продемонстрировать на простейшем примере

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = C, \quad \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = C_1 x + C. \quad (12)$$

В решении уравнения второго порядка (12) необходимо потребовать выполнения условия $C_1 = 0$.

Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении волновых процессов в классической электродинамике однородных изотропных сред. Выполняя операцию вычисления ротора векторного поля по отдельности к уравнению закона полного тока (непроводящая среда) и к уравнению электромагнитной индукции, после известных упрощений с использованием условий обращения в нуль объёмной плотности электрических "сторонних" зарядов и равенства нулю объёмной плотности магнитных зарядов получаем внешне независимые друг от друга классические волновые уравнения для векторного поля напряжённости электрического поля и векторного поля напряжённости магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{H}. \quad (13)$$

Решения этих уравнений, полученных с помощью повторного дифференцирования, порождают иллюзию существования отдельно электрических и отдельно магнитных волн и только обращение к исходной системе дифференциальных уравнений Максвелла позволяет выявить все особенности волновых процессов в рассматриваемом случае.

Заключение

1. Метод получения уравнений классической электродинамики [8] – обратная теорема Пойнтинга - внутренне противоречив, получаемые при этом результаты не могут считаться строго обоснованными, но можно надеяться, что они правильные по существу, что нуждается во всесторонней экспериментальной и теоретической проверке.

2. Предложенный в настоящей работе метод исследования баланса энергии электромагнитного поля, в основе которого лежит очевидное предположение о независимости между собой значений пространственных координат и времени, математически безупречен, но приводит к нелинейной системе дифференциальных уравнений более высокого порядка относительно векторных полей классической электродинамики, чем порядок системы дифференциальных уравнений Максвелла. Показано, что искомые уравнения Максвелла являются частным решением полученной системы уравнений. Вопрос о существовании и возможных свойствах других решений полученной системы уравнений остаётся открытым. По-видимому, это обстоятельство является непреодолимым свойством рассматриваемого подхода при доказательстве обратной теоремы Пойнтинга.

3. В рамках предлагаемого подхода вопрос об объёмной плотности скалярных источников векторного поля электрической индукции (вектор $\vec{D}$) и магнитной индукции (вектор $\vec{B}$), т.е. о дивергенции вектора $\vec{D}$ и дивергенции вектора $\vec{B}$, приходится решать дополнительно.

4. Теорема Пойнтинга в классической электродинамике не является исчерпывающим (всеобъемлющим) соотношением: при доказательстве прямой теоремы Пойнтинга никак не использованы скалярные источники электромагнитного поля.

Список литературы

1. Матвеев А.Н. Электродинамика: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1980. 383 с.
2. Фок В.А. Теория пространства времени и тяготения. М.: Эдиториал УРСС, 2007. 568 с.
3. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. О структуре системы уравнений классической электродинамики // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3. С. 39-52.
4. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Система уравнений классической электродинамики в неподвижной изотропной среде // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 4. С. 25-39.
5. Рубаков В.А. Классические калибровочные поля. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 336 с.
6. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Аксиоматическое построение системы уравнений классической электродинамики // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 45-60. DOI: [10.18698/1812-3368-2016-1-45-60](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-1-45-60)
7. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 427 с.
8. Планк М. Введение в теоретическую физику. Теория электричества и магнетизма. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 184 с.

9. Кирюшин А.В. Теорема Пойнтинга в вузовском курсе общей физики // Ученые за-метки ТОГУ. 2016. Т. 7, № 1. С. 130-132. Режим доступа: <http://pnu.edu.ru/ejournal/pub/articles/1186/> (дата обращения 01.07.2016).
10. Малыгин В.М. Теорема Умова-Пойнтинга и вектор плотности потока электромагнит-ной энергии: разные условия, разные решения // Пространство и Время. 2015. № 3 (21). С. 103-109. Режим доступа: <http://www.space-time.ru/arxiv/zhurnal-prostranstvo-i-vremya-3-21-2015.html> (дата обращения 01.07.2016).
11. Сотников В.В. Теорема и вектор Пойнтинга и их интерпретация для стационарного и квазистационарного режимов // Электрика. 2015. № 12. С. 11-17.
12. Краснов И.П. Об энергии и импульсе электромагнитного поля // Письма в Журнал технической физики. 2009. Т. 35, № 3. С. 89-95.
13. Алиев И.Н., Меликянц Д.Г. О теоремах Пойнтинга и Абрагама в электродинамике сверхпроводников Лондонов // Вестник Московского государственного областного университета. Сер. Физика-математика. 2015. № 4. С. 83-91.
14. Найденко В.И. Характеристики собственных волн открытой гребенки // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. 2010. Т. 53, № 2. С. 16-28.

The Inverse Theorem of Poynting in Classical Electrodynamics

A.M. Makarov¹, L.A. Luneva^{1,*},
K.A. Makarov¹

[*lunevala2008@rambler.ru](mailto:lunevala2008@rambler.ru)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: law of electromagnetic induction, total current law, Poynting vector, Poynting Theorem, system of Maxwell's equations

About a hundred years ago M. Plank attempted to derive the equations of the electromagnetic induction and the total current law assuming that a Poynting theorem for a homogeneous isotropic medium in the framework of classical electrodynamics (converse Poynting theorem) is valid. A record form of the bulk density of the electromagnetic energy and the expression for the bulk energy density, i.e. the Poynting vector, are supposed to be specified. And the vector electric and magnetic fields are considered to be "independent" of one another and, furthermore, the components of each of these fields are also independent of each other. The basic error of the "derivation" under consideration is obvious: according to Maxwell's equations, the electric and magnetic fields are interdependent physical fields.

In this work, we remedy the error: as the "independent features" are used three spatial coordinates and time. In this case, there is a strictly derived non-linear system of four partial higher derivative differential equations, where private "solutions" are the law of the total current and the law of electromagnetic induction. Finding the equations of the electromagnetic field based on a general solution of the obtained nonlinear system of differential equations is difficult because of its complexity.

References

1. Matveev A.N. *Elektrodinamika* [Electrodynamics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1980. 383 p. (in Russian).
2. Fock V. *The Theory of Space Time and Gravitation*. Pergamon Press, London, UK, 1959. (Russ. ed.: Fok V.A. *Teoriya prostranstva, vremeni i tyagoteniya*. Moscow, GIFML Press, 1961. 563 p.).
3. Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Concerning Structure of Simultaneous Equations of the Classical Electrodynamics. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye*

- nauki* = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science, 2014, no. 3, pp. 39-52. (in Russian).
4. Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. The System of Equations of Classical Electrodynamics in a Fixed Isotropic Medium. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science, 2014, no. 4, pp. 25-39. (in Russian).
 5. Rubakov V.A. *Klassicheskie kalibrovochnye polya* [Classical Theory of Gauge Fields]. Moscow, Editorial URSS Publ., 1999. 335 p. (in Russian).
 6. Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Axiomatic construction of classical electrodynamics equations. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science, 2016, no. 1, pp. 45-60. DOI: [10.18698/1812-3368-2016-1-45-60](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-1-45-60) (in Russian).
 7. Kochin N.E. *Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya* [Vectorial calculus and the onset of tensor calculus]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 427 p. (in Russian).
 8. Planck M. *Introduction to Theoretical Physics: Theory of electricity and magnetism. Vol. 3.* Macmillan, 1932. 247 p. (Russ. ed.: Plank M. *Vvedenie v teoreticheskuyu fiziku. Teoriya elektrichestva i magnetizma.* Moscow, URSS Publ., 2004. 184 p.).
 9. Kiryushin A.V. Poynting's theorem in the high school course of the general physics. *Uchenye zametki TOGU*, 2016, vol. 7, no. 1, pp. 130-132. Available at: <http://pnu.edu.ru/ejournal/pub/articles/1186/>, accessed 01.07.2016. (in Russian).
 10. Malygin V.M. Umov-Poynting Theorem and Electromagnetic Flux Density Vector: Different Conditions, Different Solutions. *Prostranstvo i Vremya = Space and Time*, 2015, no. 3 (21), pp. 103-109. Available at: <http://www.space-time.ru/arxiv/zhurnal-prostranstvo-i-vremya-3-21-2015.html>, accessed 01.07.2016. (in Russian).
 11. Sotnikov V.V. Theorem and Poynting's vector and interpretation of them for stationary and quasi-stationary modes. *Elektrika = Electrics*, 2015, no. 12, pp. 11-17. (in Russian).
 12. Krasnov I.P. On the energy and momentum of electromagnetic fields. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2009, vol. 35, no. 3, pp. 89-95. (English version of journal: *Technical Physics Letters*, 2009, vol. 35, iss. 2, pp. 141-143. DOI: [10.1134/S1063785009020138](https://doi.org/10.1134/S1063785009020138)).
 13. Aliev I., Melikyants D. Poynting and abraham theorems in the electrodynamics of london superconductors. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Ser. Fizika-matematika* = Bulletin of the Moscow State Regional University. Ser. Physics and Mathematics, 2015, no. 4, pp. 83-91. (in Russian).
 14. Naidenko V.I. Characteristics of eigen waves of an open comb. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Radioelektronika*, 2010, vol. 53, no. 2, pp. 16-28. (English version of journal: *Radioelectronics and Communications Systems*, 2010, vol. 53, no. 2, pp. 74-83. DOI: [10.3103/S0735272710020020](https://doi.org/10.3103/S0735272710020020)).