

Теорема Майхилла-Нероуда в теории формальных языков и ее применение

07, июль 2016

Белоусов А. И.

УДК: 519.76+372.851

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

al_belous@bk.ru**Введение**

Предлагаемая статья продолжает ряд публикаций автора по теории формальных языков [1–3].

Теория формальных языков является важной математической дисциплиной с точки зрения приложений к информационным технологиям, технологии программирования в том числе.

В статье рассматривается один из классических результатов теории формальных языков – теорема Майхилла — Нероуда. Она основана на результатах работы Нероуда [4] по теории линейных автоматных преобразований и впоследствии неоднократно переизлагалась в литературе [5, 6]. Доказано также ее обобщение для языков деревьев [7]. Во всех работах, посвященных этой теореме, подчеркивается ее сущностная связь с процедурой минимизации конечных детерминированных автоматов [8 - 10]. Заслуживает отдельного внимания связь теоремы с проблемой сложности распознавания языков и имеющей отношение к этой проблеме проблемой угадывания языков [11].

Но в отечественной литературе теорема Майхилла — Нероуда отражена очень слабо. Можно указать лишь на пособие [8], хотя там теорема не упоминается, но рассматривается близкий к ней результат по структуре контекстов (свойства синтаксического моноида).

Предлагаемая статья имеет целью как-то восполнить этот пробел, заново изложив доказательство основной теоремы и кроме этого специально обсудить некоторые методы анализа языков на предмет их регулярности/нерегулярности, особенно, когда лемма о разрастании не применима.

В доказательстве основной теореме мы следуем в основном стандартной схеме, но дополнительно делаем акцент на некоторых подробностях, связанных, во-первых, с алгоритмом минимизации и, во-вторых, с конструкцией конечного автомата при доказательстве достаточности условия теоремы.

Продemonстрировано использование теоремы при доказательстве регулярности языка, полученного как частное от деления регулярного языка на произвольный. Важность этого примера состоит в том, что в данном случае доказательство регулярности языка дается в

случае, когда принципиально невозможно описать конструкцию конечного автомата, который его допускает.

На базе примеров анализа языков на предмет доказательства их нерегулярности делается некое обобщение: рассматривается специальный класс отношений на множестве натуральных чисел, и на этой основе доказывается одно достаточное условие нерегулярности для весьма широкого класса языков. Этот результат является полностью оригинальным.

1. Об одном отношении эквивалентности на множестве слов

Определение 1. Пусть $L \subseteq V^*$ — некоторый язык. Зададим отношение $\equiv_L$ на V^* так, что

$$u \equiv_L v \Leftrightarrow (\forall x \in V^*)(ux \in L \Leftrightarrow vx \in L).$$

Иначе говоря, два слова из V^* находятся в отношении $\equiv_L$ тогда и только тогда, когда при любом $x \in V^*$ слова ux и vx одновременно принадлежат или не принадлежат L . Без труда проверяется, что $\equiv_L$ — эквивалентность.

Докажем некоторые свойства этого отношения.

Предложение 1. 1) Если $u \in L$ и $u \equiv_L v$, то $v \in L$ (*свойство насыщенности*).

2) Если $u \equiv_L v$, то $(\forall y \in V^*)(uy \equiv_L vy)$.

Доказательство. 1) Так как $u \equiv_L v$, то для любого x из $ux \in L$ следует $vx \in L$. В частности, при $x = \lambda$ получаем требуемое.

2) Фиксируем произвольно слово y в алфавите V и рассмотрим множество слов вида ux' для всех возможных $x' \in V^*$.

Из того, что $u \equiv_L v$, полагая $x = ux'$, получим, что $uux' \in L$ тогда и только тогда, когда $vux' \in L$. В силу произвольности слова x' отсюда следует, что $(uy \equiv_L vy)$.

Следствие 1. Если $C \in V^*/\equiv_L$, $a \in V$, то найдется класс $C' \in V^*/\equiv_L$ такой, что $Ca \subseteq C'$.

Доказательство. Пусть C — некоторый класс эквивалентности по отношению $\equiv_L$. Тогда для любых $u, v \in C$ и любой буквы a алфавита V в силу п. 2 утверждения 6.2 $ua \equiv_L va$, но это и означает, что множество всех слов Ca содержится в некотором классе эквивалентности по отношению $\equiv_L$.

Замечание. Нетрудно показать также, что если для некоторых классов C и C' эквивалентности по отношению $\equiv_L$ и некоторой буквы a имеет место $Ca \cap C' \neq \emptyset$, то $Ca \subseteq C'$. Действительно, тогда для некоторой цепочки $x \in C$ выполняется $xa \in C'$. Тогда для любой цепочки $y \in C$ (т.е. $y \equiv_L x$) $ya \equiv_L xa$, откуда $ya \in C'$, что равносильно включению $Ca \subseteq C'$.

2. Теорема Майхилла — Нероуда

Определение 2. Индексом отношения эквивалентности $\rho \subseteq A^2$ (для какого-то множества A) называется мощность фактор-множества $A/\rho: ind \rho = |A/\rho|$

Теорема 1 (Майхилл — Нероуд, 1958). Язык L регулярен тогда и только тогда, когда индекс отношения $\equiv_L$ конечен.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть язык L регулярен. Тогда он допускается некоторым КА $M = (Q, V, q_0, F, \delta)$ (который можно считать детерминированным). Для произвольных слов u и v эквивалентность $u \equiv_L v$ означает, что существуют такие состояния q_u и q_v в Q , что для любого $x \in V^*$ имеет место: $q_0 \Rightarrow_u^* q_u \Rightarrow_x^* r_1$ и $q_0 \Rightarrow_v^* q_v \Rightarrow_x^* r_2$ влечет, что либо оба состояния r_1 и r_2 заключительные, либо оба не заключительные.

Замечание. Обозначение $q \Rightarrow_x^* r$ для конечных автоматов понимается так: слово (цепочка) x читается на некотором пути из состояния (вершины) q в состояние (вершину) r , т.е. x принадлежит метке некоторого пути в графе автомата, ведущего из q в r [10].

Очевидно, что состояния q_u и q_v эквивалентны в смысле процедуры минимизации [10].

Замечание. Имея в виду процедуру минимизации и фигурирующие там отношения эквивалентности, индукцией по k можно показать, что $q_1 \equiv_k q_2$ тогда и только тогда, когда для любой цепочки x , длина которой не больше k , и любых состояний p_1, p_2 таких, что $q_1 \Rightarrow_x^* p_1$ и $q_2 \Rightarrow_x^* p_2$, состояния p_1, p_2 либо оба заключительные, либо оба не заключительные.

Следовательно,

$$q_1 \equiv q_2 \Leftrightarrow (\forall x)(\forall p_1)(\forall p_2)[(q_1 \Rightarrow_x^* p_1) \& (q_2 \Rightarrow_x^* p_2) \Rightarrow ((p_1 \in F) \& (p_2 \in F)) \vee ((p_1 \notin F) \& (p_2 \notin F))].$$

Запишем это в виде $q_u \equiv q_v$. Заметим при этом, что неэквивалентным цепочкам отвечают и неэквивалентные состояния. Действительно, если $\neg(u \equiv_L v)$, то для некоторой цепочки x имеет место $ux \in L, vx \notin L$ (или наоборот). Тогда найдутся такие состояния r_1 и r_2 , что $q_0 \Rightarrow_u^* q_u \Rightarrow_x^* r_1$, $q_0 \Rightarrow_v^* q_v \Rightarrow_x^* r_2$, но одно из них заключительное, а другое нет. Итак, отображение фактор-множества $V/\equiv_L$ в фактор-множество $Q/\equiv$ является инъекцией. Это значит, что $ind(\equiv_L) \leq ind(\equiv)$, т.е. отношение $\equiv_L$ имеет конечный индекс.

Замечание. Можно даже показать, что $ind(\equiv_L) = ind(\equiv)$. Действительно, если $p_1 \equiv p_2$, то в минимальном КА однозначно определено множество цепочек, читаемых на некотором пути из начального состояния в состояние, определяемое классом состояний p_1, p_2 . Все эти цепочки будут эквивалентны в смысле $\equiv_L$. Кроме того, ввиду детерминированности автомата, множества цепочек, читаемых на некотором пути из начальной вершины в заданную вершину q , попарно не пересекаются для различных q . Поскольку, как замече-

но выше, отображение $V/\equiv_L$ в $Q/\equiv$ инъективно, каждому классу эквивалентности состояний отвечает единственный класс $\equiv_L$ -эквивалентности (и тем самым имеет место биекция между указанными фактор-множествами). Итак, $ind(\equiv_L) = ind(\equiv)$.

2) *Достаточность*. Пусть $V^*/\equiv_L = \{C_1, \dots, C_n\}$. Определим конечный автомат

$$M = (V^*/\equiv_L, V, [\lambda]_{\equiv_L}, \{C_i : C_i \cap L \neq \emptyset\}, \{C_i a \rightarrow C_j : (\forall a)(C_i a \subseteq C_j)\}).$$

В силу следствия 1 — это определение корректно.

Замечание. Исключительно в методических целях можно обозначить состояние, соответствующее классу C_i через $\hat{C}_i$, различив тем самым состояния автомата и классы эквивалентности.

Индукцией по длине цепочки x докажем, что

$$(\forall k = \overline{1, n})((x \in C_k) \Leftrightarrow ([\lambda]_{\equiv_L} \Rightarrow_x^* C_k)).$$

Во-первых, заметим, что построенный выше конечный автомат является детерминированным ввиду дизъюнктивности всех классов эквивалентности и в силу следствия 1.

Докажем стрелку $\Rightarrow$.

При $x = \lambda$ имеем $[\lambda]_{\equiv_L} \Rightarrow_\lambda^0 [\lambda]_{\equiv_L}$, что очевидно.

Пусть доказываемое верно для любой цепочки, длина которой не превосходит $m-1$ для некоторого m . Возьмем цепочку $x \in C_k, |x| = m$. Пусть $x = ya, a \in V$. Цепочка y принадлежит некоторому классу C_j , откуда в силу индукционного предположения $[\lambda]_{\equiv_L} \Rightarrow_y^* C_j$. Но тогда $C_j a \cap C_k \neq \emptyset$ (и тем самым $C_j a \subseteq C_k$), и существует команда $C_j a \rightarrow C_k$ и $[\lambda]_{\equiv_L} \Rightarrow_{x=ya}^* C_k$.

Докажем стрелку $\Leftarrow$.

Базис ($x = \lambda$) тривиален. Далее, если некоторая непустая цепочка x (длины $m > 1$) читается на некотором пути из $[\lambda]_{\equiv_L}$ в какое-то состояние C_k , то существует такое состояние C_j и такая буква a , что $C_j \rightarrow_a C_k$, т.е. есть команда $C_j a \rightarrow C_k$ и цепочка y такая, что $x = ya, [\lambda]_{\equiv_L} \Rightarrow_y^* C_j$, и, согласно индукционному предположению, $y \in C_j$. Но поскольку, ввиду наличия команды $C_j a \rightarrow C_k$, имеет место включение $C_j a \subseteq C_k$, то $x \in C_k$.

Тогда, поскольку из свойства насыщенности следует, что $C_i \cap L \neq \emptyset$, влечет $C_i \subseteq L$, то $(x \in L) \Leftrightarrow ([\lambda]_{\equiv_L} \Rightarrow_x^* C_i), C_i \in F$, т.е. $C_i \subseteq L$. Теорема доказана.

Следствие 2. Язык L регулярен тогда и только тогда, когда L есть объединение классов эквивалентности по отношению $\equiv_L$ конечного индекса.

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из теоремы Майхилла — Нероуда, так как

$$L = \bigcup_{k: C_k \subseteq L} C_k; C_k \in V/\equiv_L.$$

Обратно, если $L = C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_m}$, где $(\forall j = \overline{1, m})(C_{i_j} \in V / \equiv_L)$, то, объявляя в КА M из доказательства достаточности теоремы Майхилла — Нероуда заключительными только состояния $C_{i_j}, 1 \leq j \leq m$, получим КА M , допускающий язык L .

Следствие 3. Если L — регулярный язык, то каждый класс эквивалентности по отношению $\equiv_L$ есть регулярный язык.

Доказательство. В доказательстве достаточности условия следствия 2 полагаем $m = 1$.

Следствие 4. Любой регулярный язык может быть представлен в виде конечного объединения попарно непересекающихся регулярных языков.

3. Примеры анализа языков с помощью теоремы Майхилла — Нероуда

Докажем теперь один результат о регулярности с использованием теоремы Майхилла — Нероуда.

Определение 3. Правым частным от деления языка L_1 на язык L_2 называется язык

$$L_1 / L_2 = \{w : (\exists x)(x \in L_2)(wx \in L_1)\}.$$

Например, если $L_1 = \{abc, bacba, ca\}, L_2 = \{bc, ba, acba\}$, то $L_1 / L_2 = \{a, b, bac\}$.

Язык L_1 / L_2 возникает тем самым при «отрезании» у слов языка L_1 префиксов всех таких цепочек, «хвосты» которых принадлежат L_2 .

Предложение 2. Если L_1 — регулярный язык, то $L = L_1 / L_2$ регулярен при любом языке L_2 .

Доказательство. Действительно, если неверно, что $u \equiv_{L_1/L_2} v$, то $(\exists x)(ux \in L_1 / L_2)$, но $(vx \notin L_1 / L_2)$, т.е. $(\exists y \in L_2)(uxy \in L_1)$, но $vxy \notin L_1$, так как иначе, т.е. если $(\forall y \in L_2)(uxy \in L_1) \& (vxy \in L_1)$, то $vx \in L_1 / L_2$.

Итак, из $\neg(u \equiv_{L_1/L_2} v)$ следует $\neg(u \equiv_{L_1} v)$. Это значит, что разбиение, порождаемое отношением $\equiv_{L_1/L_2}$, не мельче разбиения, порождаемого отношением $\equiv_{L_1}$, т.е. $ind(\equiv_{L_1/L_2}) \leq ind(\equiv_{L_1})$, а так как второй индекс конечен, то и первый конечен. Следовательно, по теореме Майхилла — Нероуда язык $L = L_1 / L_2$ регулярен.

Теорему Майхилла — Нероуда можно, как и лемму о разрастании, использовать для доказательства нерегулярности языков. При этом рассуждения часто оказываются значительно проще, чем при использовании леммы.

Возьмем, например, язык $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$. Тогда, очевидно, $\neg(a^n \equiv_L a^m)$ при $n \neq m$, поскольку $a^n b^n \in L$, но $a^m b^n \notin L$.

Таким образом, может быть построена бесконечная последовательность слов $a^{n_1}, a^{n_2}, \dots, a^{n_k}, \dots$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ — бесконечно возрастающая последовательность. В силу сделанного выше замечания все слова этой последовательности попарно не-

эквивалентны. Следовательно, множество классов эквивалентности по отношению $\equiv_L$ бесконечно.

По существу, теми же рассуждениями доказывается нерегулярность языков $\{a^m b^n : m \neq n\}$, $\{a^m b^n : m > n\}$, $\{a^m b^n : m < n\}$ (с заменой строгих неравенств на нестрогие).

Таким образом, нерегулярность нескольких языков доказывается одним простым рассуждением.

Заметим для сравнения, что для регулярного языка $R = a^* b^*$ две любые цепочки a^m, a^n будут $\equiv_R$ -эквивалентны, так как при $x = b^k$ (для произвольного k) обе цепочки $a^m x, a^n x$ принадлежат R , и обе не принадлежат при любой другой цепочке x .

Рассмотрим теперь несколько более сложные ситуации с нерегулярностью.

1) Выясним, при каких k язык $L_k = \{a^m b^n : НОД(m, n) \geq k\}$ регулярен.

Очевидно, что при $k = 1$ получаем регулярный язык $L_1 = a^* b^*$.

Если же $k > 1$, то возьмем цепочки $u = a^m, v = a^n$, где m и n взаимно простые числа, причем $n \geq k$. Тогда цепочка $x = b^n$ будет *разделяющей*, т.е. $ux = a^m b^n \notin L_k$, а $vx = a^n b^n \in L_k$. Таким образом, если взять последовательность цепочек $\{a^m\}$, в которой длины цепочек попарно взаимно просты, то все эти цепочки окажутся в разных классах эквивалентности, т.е. множество этих классов бесконечно.

Заметим, что этот язык не может быть проанализирован с помощью леммы о разрастании.

2) Пусть $L_0 = \{a^m b^n : m \neq n, m, n > 0\}$, $L = L_0 L_0^+$. Доказать, что язык L нерегулярен.

Рассмотрим пересечение $L_0 \cap a^* b^* a^* b^* = \{a^m b^n a^{m_1} b^{n_1} : m \neq n, m_1 \neq n_1\}$. Возьмем цепочку $u = a^m b^n a^{m_1}$ и цепочку $v = a^m b^n a^{n_1}$ при $m \neq n$ и при $m_1 \neq n_1$. Тогда цепочка $x = b^{n_1}$ разведет цепочки ux и vx по разным классам эквивалентности. Таким образом, любые две различные цепочки u, v при различных параметрах m_1, n_1 попадут в разные классы эквивалентности, и, следовательно, множество этих классов будет бесконечно.

Точнее, может быть построена бесконечная последовательность слов $a^m b^n a^{n_1}, a^m b^n a^{n_2}, \dots, a^m b^n a^{n_k}, \dots$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ и в которой все слова попарно неэквивалентны.

Заметим, что, если допустить нулевые показатели степеней, язык становится регулярным (см. [3]).

Можно описать класс отношений на множестве натуральных чисел, таких, что если числа вхождений символов алфавита связаны отношением этого класса, то такой язык не будет регулярным.

Определение. Отношение $\rho \subseteq N^n$ на множестве натуральных чисел называется *ω-отделимым по компонентам* $i_1, \dots, i_k, 1 \leq k \leq n$, если существует бесконечная последовательность $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_m, \dots$ попарно различных кортежей такая, что для любого $m \geq 1$ суще-

ствуют такие значения координат $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$, что кортежи $\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_{m+1}$ имеют совпадающие значения указанных выше координат, причем $\tilde{\alpha}_m \in \rho$, а $\tilde{\alpha}_{m+1} \notin \rho$ (или наоборот).

Из определения сразу следует, что как само такое отношение, так и его дополнение будут бесконечными. Более того, и дополнение такого отношения также будет ω -отделимым по тем же компонентам.

Отношение, ω -отделимое по каким-то компонентам, будем называть просто ω -отделимым.

Все отношения в приведенных выше примерах, определяющие числа вхождений символов в слова, именно таковы. Таким будет и отношение $\rho = \{(x, y) : \text{НОД}(x, y) = 1\}$. Действительно, существует бесконечная последовательность упорядоченных пар $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m), \dots$, в которой все первые компоненты попарно взаимно просты, а для любого $m \geq 1$ $y_m = y_{m+1} = x_{m+1}$. Тогда $(x_m, y_m) \in \rho, (x_{m+1}, y_m) \notin \rho$. Также можно определить последовательность, в которой (при прочих равных условиях) для любого $m \geq 1$ $y_m = y_{m+1} = x_m$. Разумеется, все числа в парах считаются большими единицы.

Теорема. Язык L в алфавите $V = \{a_1, \dots, a_n\}$, состоящий из всех таких слов, в которых числа вхождений символов алфавита V образуют кортежи, принадлежащие произвольному ω -отделимому n -арному отношению, не регулярен.

Доказательство. Обозначим через $n_x(a_i)$ число вхождений символа $a_i \in V$ в слово x . Пусть отношение $\rho \subseteq N^n$ ω -отделимо по компонентам, а язык $L \subseteq V^*$ состоит из всех таких слов x , что $(n_x(a_1), \dots, n_x(a_n)) \in \rho$.

Обозначая для краткости $n_x(a_i)$ через α_i , рассмотрим пересечение языка L с регулярным языком $(a_{j_1})^* \dots (a_{j_{n-k}})^* (a_{i_1})^* \dots (a_{i_k})^*$, где $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ – дополнение множества $\{i_1, \dots, i_k\}$ до $\{1, \dots, n\}$. Это пересечение будет состоять из всех слов вида $a_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \dots a_{j_{n-k}}^{\alpha_{j_{n-k}}} a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots a_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$, где $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \rho$. Тогда, в силу ω -отделимости отношения ρ , существует бесконечная последовательность попарно различных слов, в которой любые два соседних члена u_m, u_{m+1} имеют вид:

$$u_m = a_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \dots a_{j_{n-k}}^{\alpha_{j_{n-k}}} a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots a_{i_k}^{\alpha_{i_k}},$$

$$u_{m+1} = a_{j_1}^{\beta_{j_1}} \dots a_{j_{n-k}}^{\beta_{j_{n-k}}} a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots a_{i_k}^{\alpha_{i_k}},$$

где для первого слова кортеж показателей степеней принадлежит отношению ρ , а для второго – нет (или наоборот). Тем самым $u_m \in L$, а $u_{m+1} \notin L$ (или наоборот), а цепочка $w = a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots a_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$ является разделяющей, т.е. указанные слова не являются эквивалентными в смысле отношения $\equiv_L$, и множество классов эквивалентности бесконечно, что доказывает нерегулярность языка L .

Заключение

Основными результатами статьи являются:

- 1) Изложение пересмотренного доказательства теоремы Майхилла — Нероуда.
- 2) Доказательство регулярности частного от деления регулярного языка на произвольный с использованием теоремы Майхилла — Нероуда.
- 3) Разбор примеров применения теоремы Майхилла — Нероуда к доказательству нерегулярности языка и обобщение этих примеров в виде теоремы, дающий достаточные условия нерегулярности в весьма широком классе языков.

Статья носит научно-методический характер. Методический аспект раскрыт в первых двух из перечисленных выше пунктов, тогда как теорема об отделимых отношениях представляет собственно научный оригинальный результат.

Список литературы

- [1]. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Мультиграфовое представление автоматов с магазинной памятью // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журн., 2012. № 9. С.141-152. DOI: [10.7463/0912.0460973](https://doi.org/10.7463/0912.0460973)
- [2]. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Построение контекстно-свободной грамматики по мультиграфу автомата с магазинной памятью // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журн., 2014. № 7. С.128-142. DOI: [10.7463/0714.0717777](https://doi.org/10.7463/0714.0717777)
- [3]. Белоусов А.И. О методике изложения некоторых разделов теории формальных языков: леммы о разрастании // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 12. С. 1020-1031. Режим доступа: <http://engbul.bmstu.ru/doc/828263.html> (дата обращения: 23.12.15).
- [4]. Nerode A. Linear Automaton Transformations // Proceedings of the American Mathematical Society. 1958. № 9. pp. 541—544. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1958-0135681-9>
- [5]. Trevisan L. Notes on the Myhill-Nerode Theorem // Stanford University – CS103: Math for Computer Science, Handout LN15, 5/12/2014 Режим доступа: <http://www.eecs.berkeley.edu/~luca/cs103-14/lecture15.pdf> (дата обращения: 6.05.2016)
- [6]. Regan K. Notes on the Myhill-Nerode Theorem // CSE396, 2010, retrieved 2016-03-22. Режим доступа: <http://www.cse.buffalo.edu/~regan/cse396/CSE396MNT.pdf> (дата обращения: 6.05.2016)
- [7]. Comon H., Dauchet M., Gilleron R., Löding C., Jacquemard F., Lugiez D., Tison S., Tommasi M. Tree Automata Techniques and Applications. – TATA Ed. 2008. 262 p. Режим доступа: <http://tata.gforge.inria.fr/> (дата обращения: 6.05.2016)
- [8]. Пентус А.Е., Пентус М.Р. Математическая теория формальных языков. М.: Интернет-университет информационных технологий. БИНОМ. Лаборатория знаний. 2006. 247 с.
- [9]. Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. 2-е изд. Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс». 2002. 528 с.

- [10]. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. 4-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2006. 744 с.
- [11]. Исмагилов Р.С., Мاستихина А.А. К вопросу частичного угадывания формальных языков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2016. № 2. С. 3-15.