

Нелинейная диаграмма растяжения материала, обусловленная его сетчатой структурой и естественной искривленностью волокон

06, июнь 2016

Владыкин Н. Г.¹, Зинченко Л. В.^{1,*}

УДК: 539.4

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

*zinlar@yandex.ru

Введение

Для большинства органических материалов (кожа, древесина, костная ткань) наблюдается нелинейность диаграммы растяжения в пределах упругости, причём касательный модуль упругости по мере возрастания деформации увеличивается [1,2]. Эту особенность диаграммы растяжения можно распространить на искусственные материалы, имеющие волокнистую структуру, как и многие естественные материалы. В связи с этим возникает необходимость оценки различных структурных факторов, связанных как с ориентацией волокон, так и с их непрямолинейной формой на вид диаграммы растяжения материала.

Материалы с сетчатой структурой часто встречаются в природе (кожа, костно-мышечные ткани). Примером таких рукотворных материалов являются текстильные материалы, армированные пластики. Волокна в них могут иметь как определённую ориентацию, так и быть беспорядочно направленными (Рис. 1а), причём иметь как некоторую преимущественную ориентацию, так и не иметь её (в последнем случае приходим к изотропному материалу). Предположение о сетчатой ориентации волокон как о причине нелинейности приведено в статье [3].

Рассмотрим процесс деформирования волокна с начальной длиной R под действием вертикальной силы F (Рис.1б), полагая нижний конец волокна закреплённым, а верхний получившим вертикальное перемещение S .

Угол наклона волокна к вертикали изменил своё значение (в начале процесса A , а в конце - B). Длина волокна после его деформирования равна

$$KL = \left[(S + R \cos A)^2 + R^2 \sin^2 A \right]^{1/2} = \left[R^2 + 2RS \cos A + S^2 \right]^{1/2}.$$

Относительное удлинение волокна

$$\varepsilon = \frac{KL - R}{R} = \left[1 + 2\varepsilon_0 \cos A + \varepsilon_0^2 \right]^{1/2} - 1 \quad (1),$$

где $\varepsilon_0 = S/R$.

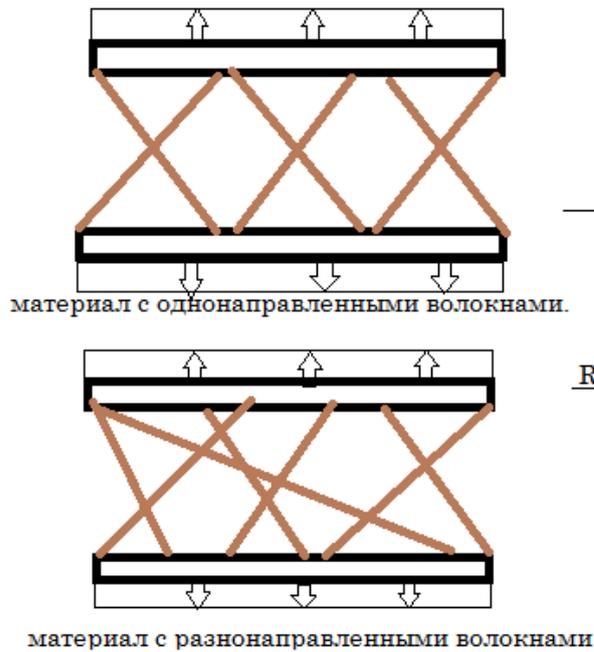


Рис.1а. Схемы волокнистых материалов

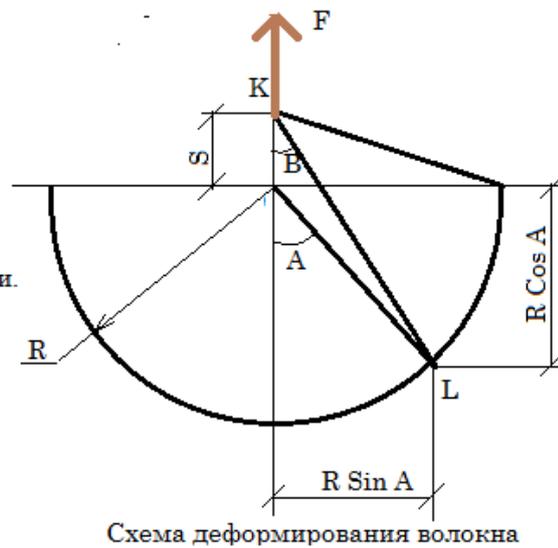


Рис.1б. Схема деформирования волокна

Обозначив жёсткость сечения волокна C и считая, что материал волокна следует закону Гука, проецируем упругую силу на вертикаль

$$F = \varepsilon \cdot C \cdot \cos B \quad (2)$$

Обозначим

$$Z = [1 + 2\varepsilon_0 \cdot \cos A + \varepsilon_0^2]^{1/2} .$$

Тогда $\cos B = (\varepsilon_0 + \cos A) / Z$, что позволяет записать (2) в компактном виде, принимая $C=1$.

$$F = (\cos A + \varepsilon_0)(Z - 1) / Z .$$

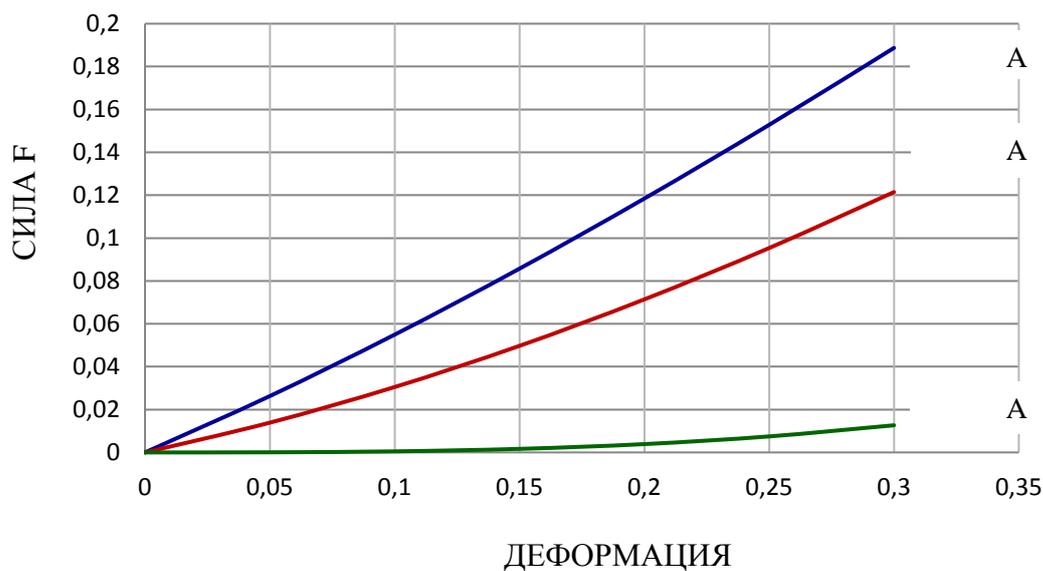


Рис. 2. Диаграммы растяжения волокон в зависимости от угла наклона A

На рис.2 приведены диаграммы растяжения волокон при углах их наклона к вертикали 45°, 60° и 90°. Из вида диаграмм следует, что нелинейность, заключающаяся в возрастании касательного модуля упругости по мере увеличения деформации, характерна для больших углов наклона волокон, причём при значениях $A < 45^\circ$ диаграмма практически становится линейной. Поэтому при равновероятном направлении волокон и с учётом большей нагруженности волокон с малым углом наклона диаграмма растяжения материала будет почти линейной.

Второй причиной нелинейности может быть структура самих волокон. Рассмотрим растяжение естественно закрученных волокон [4], которые можно рассматривать, как цилиндрическую винтовую пружину с большим шагом. Зависимость между перемещением δ и нагрузками P при больших деформациях была получена Н. А. Чернышевым [5,6], где в качестве параметра принят текущий угол наклона витка

$$\delta = l_0 (\sin \alpha - \sin \alpha_0)$$

$$P = \frac{4B \cdot C}{D_0^2} \cdot \frac{\sin(\alpha - \alpha_0) \cdot \cos^2 \alpha_0}{\cos \alpha} \cdot \frac{B \cos \alpha \cdot \cos \alpha_0 + C \sin \alpha \cdot \sin \alpha_0}{(B \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha)^2}$$

Здесь α и α_0 – текущее и начальное значения углов подъёма витка;

B и C – изгибная и крутильная жёсткость сечения витка пружины;

D_0 и l_0 – начальные диаметр и длина пружины, соответственно.

Для получения диаграммы растяжения проведём расчёты в пределах относительного удлинения волокон $\varepsilon = \delta/l_0 = \sin \alpha - \sin \alpha_0 = 0 \div 0,35$ (Рис.3).

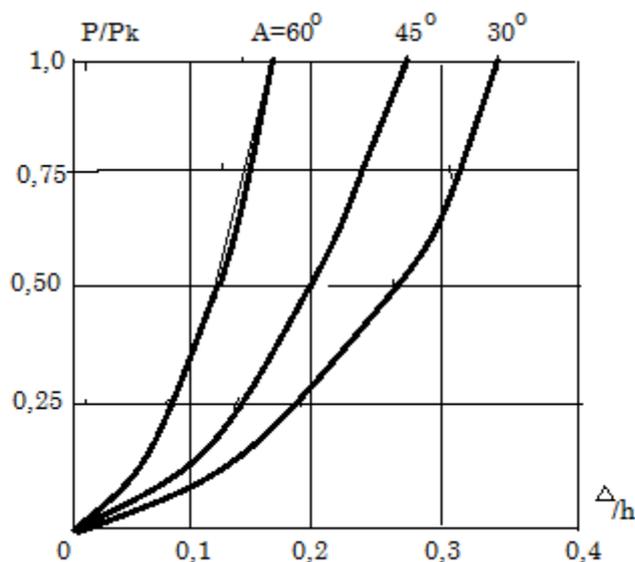


Рис. 3. Диаграмма растяжения материала с закрученными волокнами

При этом в качестве силового параметра примем $p^* = P/P_k$, где P_k – максимальное расчётное значение нагрузки. Расчёты приведены для значений начальных углов наклона витка 30°, 45° и 60°. Соотношение для изгибной и крутильной жёсткости примем $C = 0,8 \cdot B$, как для круглого сечения витка.

Третьей причиной нелинейности может оказаться волнистая форма волокон, при распрямлении которых возникают усилия, нелинейно связанные с удлинениями [4]. Модель растянутого волокна показана на рис.4.

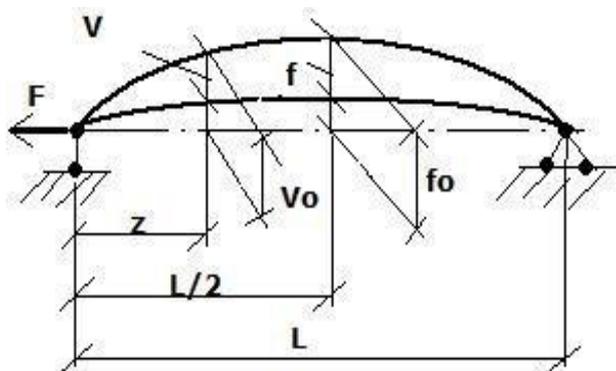


Рис. 4. Модель растянутого волокна

Приближённая зависимость между удлинением и силой в предположении, что форма искривления волокон является синусоидой и сохраняется в процессе деформирования, приведена в статье [7].

$$\Delta L_0 = \frac{F}{C} + K \cdot \left[1 - \left(\frac{F_{кр}}{F + F_{кр}} \right)^2 \right];$$

$$F_{кр} = \pi^2 EI_{min}/L^2; \quad C = EA/L; \quad K = (\pi f_0)^2 / 4L,$$

где f_0 , L – начальный прогиб и длина волокна;

$F_{кр}$ – критическая сила при продольном изгибе бруса данного сечения;

C – жёсткость прямого стержня при растяжении;

A , E_{min} – площадь и минимальный момент инерции поперечного сечения.

Диаграмма растяжения волокна (Рис. 5) позволяет выделить линейную часть деформации, соответствующую закону Гука и нелинейную часть, связанную с распрямлением волокна. Причём кривая на диаграмме асимптотически стремится к наклонной прямой $\Delta L_0 = f_0 + F/C$.

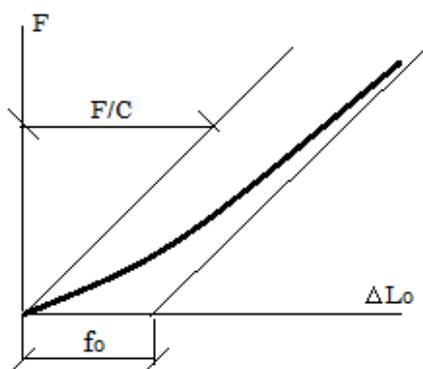


Рис.5. Диаграмма растяжения волокна волнистой формы.

Заключение

•Для волокнистых материалов характерна нелинейность с возрастанием касательного модуля по мере увеличения деформации.

•Искривлённость волокон и их естественная закрутка является более существенной причиной нелинейности, чем наклон волокон к направлению нагружения.

•Нелинейность диаграммы, обусловленная наклоном волокон к направлению приложения нагрузки заметна только при сравнительно больших углах наклона ($> 45^\circ$).

Список литературы

- [1]. Миненков Б.В., Стасенко И.В. Прочность деталей из пластмасс. М.: Машиностроение. 1977. 264 с.
- [2]. Тимошенко С.П., Гере Дж.М. Механика материалов: Учебник для вузов. 2-е изд., стер. СПб.: Лань. 2002. 669 с.
- [3]. Шестакова Н.А., Шнейдерович Р.М. Реологические характеристики кожи на основе сетчатой модели. // Кожевенная и обувная промышленность. № 3. 1972. С. 33-37
- [4]. Владыкин Н.Г., Шестакова Н.А. Определение диаграммы растяжения материала с естественно закрученными волокнами. // Сб. трудов «Совершенствование технологии лёгкой промышленности». МГАЛП. 2001. С. 62 - 64
- [5]. Владыкин Н.Г., Шестакова Н.А. Определение диаграммы растяжения волокна волнистой формы. // Сб. научн. трудов «Динамика машин легкой промышленности». МГАЛП. 1996 г. С. 56 - 59
- [6]. Пономарёв С.Д., Андреева Л.А. Расчёт упругих элементов приборов. М.: Машиностроение. 1980. 326 с.
- [7]. Владыкин Н.Г. Реологическая модель материала с волнистой структурой волокон // Инженерный вестник. Электронный научно-технический журнал. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 5. С. 38 - 42. Режим доступа: <http://engbul.bmstu.ru/doc/762097.html> (дата обращения: 4.04.2016)