

УДК 539.374, 539.376

Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости

Хохлов А. В.^{1,*}

^{*}andrey-khokhlov@ya.ru

¹НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

Исследуется одномерное интегральное соотношение вязкоупругости с произвольными функциями релаксации и ползучести, с целью уточнения его области применимости и арсенала возможностей по описанию изотермического поведения вязкоупругопластичных материалов. При минимальных априорных математических ограничениях на функции релаксации и ползучести исследованы уравнения семейств порождаемых им базовых квазистатических кривых (кривых обратной ползучести и ползучести при любом ступенчатом нагружении, релаксации с произвольной начальной стадией деформирования, диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации или нагружения и др.), аналитически изучены общие свойства этих семейств в зависимости от характеристик функции ползучести и релаксации и параметров программ нагружения: интервалы монотонности и выпуклости, скачки и изломы, асимптотики и двусторонние оценки теоретических кривых, характер сходимости их семейств при стремлении параметров программ нагружения (например, скорости деформирования или нагружения, длительности начальной стадии деформирования и др.) к нулю и бесконечности, условия затухания памяти, условия немонотонности кривых ползучести при ступенчатом нагружении, влияние перестановки ступеней нагружения и т.п.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, интегральное определяющее соотношение, функция ползучести (релаксации), кривые деформирования (ползучести, релаксации, обратной ползучести), затухание памяти, индикаторы (не)применимости

Линейная теория вязкоупругости (наследственности), казалось бы, всесторонне проработана за полтора столетия, начиная с работ Вебера, Кольрауша, Максвелла, Больцмана, Вольтерры и др.: в период 1950-1970-ых годов (и позднее) ей посвящены тысячи статей, докладов, монографий (например, [1-43] и др.). Но, как ни странно, несмотря на бурное развитие нелинейных теорий (сотни нелинейных определяющих соотношений), по-прежнему выходят статьи и диссертации, демонстрирующие, что многие математические свойства линейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругости – даже напрямую связанные с моделированием классических реологических эффектов и типичных кривых поведения материалов – ещё малоизвестны, не сформулированы или не систематизированы, полный арсенал возможностей линейной теории не выявлен, область её адекватности

(и область её непригодности, отделённая от первой не чёткой границей, а пограничной полосой) до сих пор не очерчена достаточно чётко и явно, в виде достаточно полной системы индикаторов, удобных для проверки в опытах, а компьютерное моделирование нередко остаётся без необходимого фундамента. Во многих работах (и последних лет) не осознаются или даже нарушаются общие ограничения на функции ползучести и релаксации, не прослеживаются следствия принятых допущений, выхватываются лишь отдельные аспекты поведения материалов и отдельные необходимые условия применимости линейной теории (и нередко подаются как достаточные, например, независимость модуля релаксации материала от уровня деформации или податливости от уровня напряжения), выводы формулируются в довольно туманной форме и порой содержат неточности и неверные представления (см. подробные обзоры и библиографию в [44-46]). Некоторые эффекты, обнаруженные в экспериментах, считаются признаками нелинейности специфических классов материалов, а их моделирование – достижением и преимуществом новых нелинейных ОС ([47-51 и др.]), хотя можно доказать, что линейное ОС вязкоупругости их воспроизводит.

В эти вопросы стоило бы внести дополнительную ясность, точность и систематичность, чтобы точнее знать признаки нелинейности поведения материала, все эффекты которые можно и которые принципиально нельзя описать линейным ОС (в определённом диапазоне температур, деформаций и скоростей деформаций). Детальное знание арсенала возможностей линейного ОС поможет предотвратить неверные интерпретации экспериментальных данных и ложные установки при выборе характеристик ОС для их описания. Для планирования экспериментов и расшифровки их результатов, верного выбора ОС, его идентификации, настройки и грамотного применения необходимо точное знание *общих* свойств теоретических кривых (релаксации, ползучести, деформирования) рассматриваемого ОС, полученное в результате *аналитического* изучения их уравнений.

В данной статье технология качественного анализа нелинейных определяющих соотношений для вязкоупругопластических материалов, разработанная ранее автором в цикле работ [52-57] и др., прилагается к линейному интегральному уравнению вязкоупругости с произвольными функциями релаксации и ползучести (ФР и ФП), инвариантному относительно сдвигов по времени. При минимальных априорных математических ограничениях на ФР и ФП выведены в общем виде уравнения семейств всех основных теоретических кривых одномерного ОС, аналитически изучены их качественные свойства (в зависимости от общих свойств ФР и ФП и параметров нагружения). На основе их сопоставления с типичными качественными свойствами кривых испытаний широкого класса вязкоупругопластических материалов (с целевым списком моделируемых термомеханических эффектов) выведены минимальные необходимые феноменологические ограничения на функции релаксации и ползучести, обеспечивающие адекватное описание (квазистатических) экспериментальных кривых. Выявлены те эффекты, которые линейные ОС принципиально не могут описать ни при каких ФР и ФП (например, ускоряющаяся ползучесть, финитная релаксация, наличие точки перегиба или максимума у диаграммы деформиро-

вания, зависимость мгновенного и длительного модулей от скорости деформации и т.п.), и те, которые могут быть описаны при определённых дополнительных ограничениях, наложенных на ФП (например: установившаяся ползучесть, затухание памяти, накопление остаточной деформации, эффект Кольрауша, сходимость кривых деформирования к кривой мгновенного деформирования, билинейное очертание кривых деформирования, течение при постоянном напряжении, зависящем от скорости деформирования и др.).

Выявлен набор характерных свойств (атрибутивных признаков) теоретических кривых, наличие которых следует установить у экспериментальных кривых деформирования при постоянных скоростях нагружения и деформирования, кривых релаксации с учётом начальной стадии деформирования и кривых ползучести при ступенчатом нагружении, прежде чем пытаться моделировать поведение конкретных (классов) материалов в рамках линейной теории. Эти признаки могут служить индикаторами адекватности линейного ОС вязкоупругости, удобными для экспериментальной проверки, они позволяют точнее и в более явной форме указать границу области его применимости. Если хотя бы одно из указанных свойств-индикаторов не выполняется для какой-то экспериментальной кривой (в рамках погрешности эксперимента и потенциальных расчётов), то комплексная адекватность линейных ОС под вопросом (хотя, быть может, отдельные аспекты поведения материала они всё же описывают удовлетворительно). Если достоверно установлено нарушение нескольких (или одного первостепенного), то линейные ОС принципиально не применимы к описанию поведения данного материала в рассматриваемых условиях.

Такой качественный анализ теоретических кривых – важная стадия аттестации любого ОС, выявления арсенала его возможностей и области адекватности, разработки способов идентификации, настройки, верификации и численной реализации [52-58]. Он необходим и для того, чтобы сформулировать общие требования к способам аналитического представления экспериментальных данных и материальных функций: используемые аппроксимации должны удовлетворять базовым ограничениям теории и обладать определёнными качественными свойствами, чтобы ОС корректно описывало определённый комплекс реологических эффектов, присущих некоторому классу материалов.

В статье приняты следующие сокращения: ОС – определяющее соотношение; ФР, ФП – функции релаксации и ползучести, КП – кривая ползучести (ТКП – теоретическая, ЭКП – экспериментальная); КР – кривая релаксации (ТКР, ЭКР); ДД – диаграмма деформирования (ТДД, ЭДД); СД, СН – скорости деформации и нагружения; $h(t)$ – функция Хевисайда, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, РеМ – регулярные модели (с ФП: $P(0) \neq 0$); СиМ – сингулярные модели (ФР содержит слагаемое $\eta\delta(t)$); РеМ- n (СиМ- n) – класс эквивалентности всех регулярных (сингулярных) несократимых n -звенных моделей из линейных пружин и демпферов; $y(0) := y(0+)$ – предел функции $y(t)$ справа в т. $t = 0$, $\hat{y}(t_*)$ – скачок $y(t)$ в т. t_* .

1. Линейные определяющие соотношения вязкоупругости

Будем рассматривать изотермические одномерные процессы в структурно-стабильных (не стареющих) вязкоупругопластичных материалах, характеризуемые в данной точке тела историями напряжения $\sigma(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$, $t > 0$. Они связаны линейными интегральными операторами, инвариантными относительно сдвигов по времени:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

где $R(x)$, $x > 0$ - функция релаксации (ФР), $\Pi(x)$, $x \geq 0$, - функция ползучести (ФП). Входные процессы предполагаются кусочно непрерывными и кусочно гладкими при $t \geq 0$, а время и напряжение – обезразмеренными. Операторами вида (1.1) задаются и трёхмерные ОС вязкоупругости в изотропном случае: тогда (1.1) связывают компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций с одинаковыми индексами, а также – их первые инварианты, но уже с другими ядрами $R_\nu(x)$ и $\Pi_\nu(x)$. Операторами вида (1.1) описываются (в линейной области) и зависимости между историями (обобщённых) нагрузок и перемещений при испытаниях образцов на растяжение, сжатие кручение, изгиб, индентирование и т.п.

ФР $R(x)$ и ФП $\Pi(x)$ предполагаются непрерывными положительными функциями с ограниченной вариацией на любом отрезке (следовательно, они дифференцируемы почти всюду, а их производные интегрируемы по Лебегу). Они должны удовлетворять априорным математическим ограничениям, гарантирующим существование интегралов, необходимую гладкость образов (в зависимости от гладкости входных процессов), непрерывность операторов в рассматриваемых счётно-нормированных пространствах, сходимость ряда для резольвенты и т.п. А также – дополнительным ограничениям, обеспечивающим выполнение общих принципов механики и термодинамики и сходство качественных свойств теоретических кривых модели и типичных кривых испытаний материалов, поведение которых хотелось бы описывать ОС (1.1). Из этих соображений ниже на ФП и ФР будут наложены дополнительные ограничения, обеспечивающие феноменологическую адекватность ОС: ФП $\Pi(t)$ и ФР $R(t)$ в (1.1) должны быть положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, $\Pi(t)$ – возрастающей и выпуклой вверх на $(0; \infty)$, а $R(t)$ – убывающей и выпуклой вниз на $(0; \infty)$, ФР может иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в т. $t = 0$ (такие ФР появляются в частности, при рассмотрении реологических моделей из линейных пружин и демпферов, поскольку ФР $R = \eta \delta(t)$, $\eta > 0$, задаёт ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$). Из этих ограничений следует, в частности, что в т. $t = 0$ существуют пределы справа $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$ и $R(0+) = \sup R(t) > 0$ ($R(0+) = +\infty$, если ФР не ограничена).

Операторы (1.1) взаимно обратны ($\mathbf{R}\Pi = \mathbf{I} = \mathbf{P}R$), и потому их ядра связаны зависимостями $\mathbf{R}\Pi = \mathbf{I} = \mathbf{P}R$, $t > 0$, т.е. (в предположении, что $R(0) < \infty$)

$$\int_0^t \dot{R}(t-\tau)\Pi(\tau) d\tau + R(0)\Pi(t) = 1, \text{ или } \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau) d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, t > 0, \quad (1.2)$$

Эти уравнения эквивалентны, т.к. операторы с разностными ядрами коммутируют. Зная ФР, можно найти ФП из уравнения (1.2), и наоборот. Поэтому одномерное ОС (1.1) содержит одну материальную функцию, а изотропное трёхмерное – две. При $R(0) \neq 0$ и $\Pi(0) \neq 0$ (1.2) – интегральное уравнение Вольтерры *второго* рода с ограниченными (если конечен предел $\dot{R}(0+)$) ядрами, и потому они однозначно разрешимы в классе суммируемых функций (даже в $L_2[0, b]$).

Операторы (1.1), в частности, определены на множестве кусочно непрерывных и кусочно дифференцируемых функций; они представимы в виде: $y(t) = y_r(t) + y_s(t)$, где $y_r(t)$ – регулярная часть (непрерывная кусочно-дифференцируемая функция, $y_r(0) = 0$), а $y_s(t) = y(0)h(t) + \sum_1^n \hat{y}(t_i)h(t-t_i)$ – ступенчатая функция ($\hat{y}(t_i) := y(t_i+0) - y(t_i-0)$ – скачок в т. t_i , $h(t)$ – функция Хевисайда). Тогда

$$y'(t) = y'_r(t) + y(0)\delta(t) + \sum \hat{y}(t_i)\delta(t-t_i),$$

и оператор (1.1) переводит такой процесс $\sigma(t)$ в деформацию

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) \dot{\sigma}_r(\tau) d\tau + \sigma(0)\Pi(t) + \sum \hat{\sigma}(t_i)\Pi(t-t_i)h(t-t_i), \quad t \geq 0.$$

В точках t_i $\varepsilon(t)$ имеет скачки $\hat{\varepsilon}(t_i) = \hat{\sigma}(t_i)\Pi(0)$: поскольку интегральное слагаемое непрерывно всюду (в силу непрерывности Π и интегрируемости $\dot{\sigma}_r(\tau)$), то $\hat{\varepsilon}(t_i)$ совпадает со скачком слагаемого $\hat{\sigma}(t_i)\Pi(t-t_i)h(t-t_i)$: $\hat{\varepsilon}(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i+0} \hat{\sigma}(t_i)\Pi(t-t_i) = \hat{\sigma}(t_i)\Pi(0+)$. Возрастающая последовательность точек разрыва t_i может быть и бесконечной (как при циклических нагружениях), но не должна иметь предельных точек (тогда все t_i изолированы и в сумме включается только конечное число слагаемых с $t_i < t$). В точках разрыва напряжения разрывна и скорость деформации (даже если $\dot{\sigma}_r(\tau)$ непрерывна):

$$\dot{\varepsilon}(t) = \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau) \dot{\sigma}_r(\tau) d\tau + \Pi(0)\dot{\sigma}_r(t) + \sigma(0)\dot{\Pi}(t) + \sum \hat{\sigma}(t_i)\dot{\Pi}(t-t_i)h(t-t_i) + \sum \hat{\sigma}(t_i)\Pi(t-t_i)\delta(t-t_i),$$

первое слагаемое всегда непрерывно, третье – лишь если $\dot{\Pi}(t)$ непрерывна в т. t_i , поэтому

$$\hat{\dot{\varepsilon}}(t_i) = \Pi(0)\hat{\dot{\sigma}}_r(t_i) + \sigma(0)\hat{\dot{\Pi}}(t_i) + \sum_{j < i} \hat{\sigma}(t_j)\hat{\dot{\Pi}}(t_i - t_j) + \hat{\sigma}(t_i)\dot{\Pi}(0).$$

Если $\dot{\Pi}(t)$ непрерывна при $t \geq 0$, то

$$\hat{\dot{\varepsilon}}(t_i) = \Pi(0)\hat{\dot{\sigma}}_r(t_i) + \dot{\Pi}(0)\hat{\sigma}(t_i).$$

Если

$$\hat{\sigma}_r(t_i) = 0$$

(например, при ступенчатом нагружении), то всё же

$$\hat{\varepsilon}(t_i) = \dot{\Pi}(0) \hat{\sigma}(t_i) \neq 0.$$

Итак, если модель *регулярна* (т.е. $\Pi(0) \neq 0$) и $\dot{\Pi}(t)$ и $\dot{R}(t)$ непрерывны при $t \geq 0$, то скачки в любой точке t_* связаны формулами:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(t_*) &= \hat{\sigma}(t_*) \Pi(0), \quad \hat{\varepsilon}(t_*) = \Pi(0) \hat{\sigma}(t_*) + \dot{\Pi}(0) \hat{\sigma}(t_*); \\ \hat{\sigma}(t_*) &= R(0) \hat{\varepsilon}(t_*), \quad \hat{\sigma}(t_*) = R(0) \hat{\varepsilon}(t_*) + \dot{R}(0) \hat{\varepsilon}(t_*) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если же модель *сингулярна* (если в ФР присутствует слагаемое $\eta \delta(t)$), то $\Pi(0) = 0$ и

$$\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$$

и потому

$$\hat{\varepsilon}(t_*) = 0, \quad \hat{\varepsilon}(t_*) = \hat{\sigma}(t_*) / \eta,$$

а скачки $\hat{\varepsilon}(t)$ даже при непрерывной деформации $\varepsilon(t)$ (когда $\hat{\varepsilon}(t_*) = 0$) вызывают разрывы напряжения [45,59]:

$$\hat{\sigma}(t_*) = R(0) \hat{\varepsilon}(t_*) + \eta \hat{\varepsilon}(t_*), \quad \hat{\sigma}(t_*) = \dot{R}(0) \hat{\varepsilon}(t_*) + R(0) \hat{\varepsilon}(t_*) + \eta \hat{\varepsilon}(t_*) \quad (1.4)$$

Следует отметить, что скачок процесса-отклика в любой точке t_* линейно (и локально) зависит от скачка программы нагружения (и её производных) в t_* и *не зависит* от t_* и от предыстории (нелинейное ОС Работнова уже не обладает этим свойством [57]), в частности, модуль скачка отклика не меняется при изменении знака скачка нагрузки (если $\dot{\Pi}(t)$ и $\dot{R}(t)$ непрерывны). Эти свойства можно использовать как необходимые индикаторы применимости линейного ОС (1.1) [57,59] к описанию поведения конкретного материала. Например, в испытаниях нескольких сплавов алюминия при ступенчатом нагружении зафиксировано [60], что модуль скачка деформации вниз в момент сброса нагрузки меньше, чем скачок вверх в момент её приложения; поэтому вряд ли стоит пытаться моделировать их ползучесть с помощью ОС (1.1).

На множестве непрерывных (и кусочно дифференцируемых) при $t \geq 0$ функций операторы (1.1) действуют по формулам:

$$\varepsilon(t) = \Pi(0) \sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = R(0) \varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (1.5)$$

При $\Pi(0) \neq 0$ первое соотношение (1.5) с заданной $\varepsilon(t)$ – уравнение Вольтерры второго рода для $\sigma(t)$; если $\dot{\Pi}(0) < \infty$, то ядро ограничено, и построение резольвенты даёт обратный оператор, заданный второй формулой (1.5) (тогда и $\dot{R}(0) < \infty$). Ограничение $R(0) \neq 0$ обязательно. Нарушение условия $\Pi(0) \neq 0$ приводит к уравнениям *первого* рода

(1.5) и (1.2) для $\varepsilon(t)$ и для ФР, наличием сингулярности или разрыва второго рода у $R(x)$ в т. $x=0$, неограниченности оператора $\mathbf{R}$, «нехорошим» ТДД и т.п. [44-46,61-65].

Переходя в (1.2) к пределам $t \rightarrow 0+$ и $t \rightarrow +\infty$, получим: $\Pi(0)R(0)=1$, $\Pi(\infty)R(\infty)=1$. Это следует из существования конечных пределов $R(0+)$, $\Pi(\infty)$ и интегрируемости $\dot{R}(t)$ на отрезках. Если ещё и $\dot{R}(0) < \infty$, то $\dot{\Pi}(0) < \infty$ и

$$\dot{\Pi}(0)/\Pi(0) = -\dot{R}(0)/R(0).$$

Если же $\Pi(0)=0$ или $R(\infty)=0$, то все эти предельные равенства нарушаются [44, 62]).

Отметим, что тождество (1.2) получится, если потребовать взаимную обратность операторов (1.1) только на одном процессе $\varepsilon(t)=h(t)$. Отсюда будет следовать и $\mathbf{P}\mathbf{R}\varepsilon=\varepsilon$ для любого непрерывного $\varepsilon(t)$. Это объясняется тем, что оператор $\mathbf{P}\mathbf{R}$ линеен и инвариантен относительно сдвигов по времени, а линейная оболочка процессов вида $\varepsilon(t)=h(t-t_1)-h(t-t_2)$, $t_i > 0$ (даже с $t_i \in \mathbb{Q}$), т.е. множество всех финитных ступенчатых функций, плотно в пространствах кусочно непрерывных на отрезке $[0,t]$ функций с C -нормой.

В работах [44-46] детально изучены общие качественные свойства семейств всех основных теоретических кривых интегрального ОС (1.1) с произвольными ФР и ФП: кривых деформирования при постоянных скоростях нагружения и деформации, релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения и др. Анализ показал, что среди моделей, описываемых ОС (1.1) с различными ФР и ФП, необходимо выделять (как минимум) три основных класса, поскольку качественные свойства базовых теоретических кривых моделей трёх этих классов (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются: 1) регулярные модели (РеМ) – у которых $\Pi(0) \neq 0$ (тогда мгновенный модуль $E=R(0+)=1/\Pi(0+)$ конечен и (1.1) сводятся к уравнениям Вольтерры второго рода (1.5)); 2) сингулярные (СиМ) – с ФР, содержащей слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$ (ФР $R=\eta\delta(t)$ задаёт ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma=\eta\dot{\varepsilon}$ и входит слагаемым в ФР «половины» реологических моделей из пружин и демпферов – см. ниже), тогда $\Pi(0)=0$ и

$$\dot{\Pi}(0)=\eta^{-1};$$

3) нерегулярные модели с неограниченной ФР, не содержащей слагаемого $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в т. $t=0$ ($R(0+)=+\infty$).

При малых временах $t/\tau < 1$ (и больших скоростях деформации – когда велико значение безразмерного параметра $\dot{\varepsilon}\tau$, τ – минимальное время релаксации) РеМ ведут себя как твёрдые тела, а СиМ – как жидкости (но при больших временах и малых скоростях модели могут сменить поведение на «противоположное», например, модели Максвелла и их параллельные соединения (РеМ), ведут себя как жидкости, а модели Фойгта и их последовательные соединения (СиМ) – как твёрдые тела) [62]. Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя. К нему относится, например, ФР

$R(t) = At^{-u}$, $u \in (0;1)$, $A > 0$, задающая так называемый «фрактальный» элемент «фрактальных» моделей («fractional models» – модели с оператором дробного дифференцирования); соответствующая ФП имеет вид $\Pi(t) = A^{-1}C(u)t^u$ и обладает не только свойством $\Pi(0) = 0$, как и СиМ, но и свойством $\dot{\Pi}(0) = \infty$, переходным к $\Pi(0) \neq 0$, характеризующему РеМ. Эти три класса не исчерпывают все возможные модели вида (1.1) (хотя исчерпывают все используемые в практических приложениях, монографиях и учебной литературе); например, параллельное соединение моделей из второго и третьего класса даст модель с ФР, в которой есть слагаемое с сингулярностью и слагаемое с интегрируемой особенностью.

2. Структурные реологические модели

ОС (1.1) задаются и все модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством последовательных и параллельных соединений (они будут использованы для иллюстрации общих свойств кривых ползучести ОС (1.1)). Схемы всех трёх- и четырёх-звенных моделей (в русско- и англоязычной терминологии нет единства: [2-5,7-9,13-15, 27-32]) приведены на рис.1.

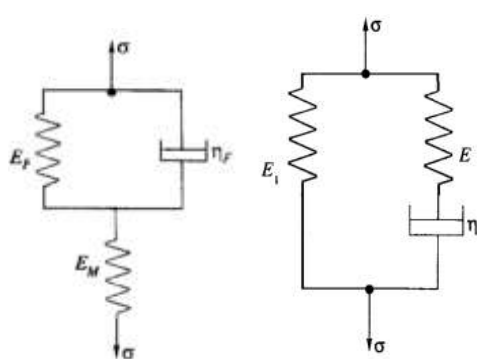


Рис.1,а. РеМ-3

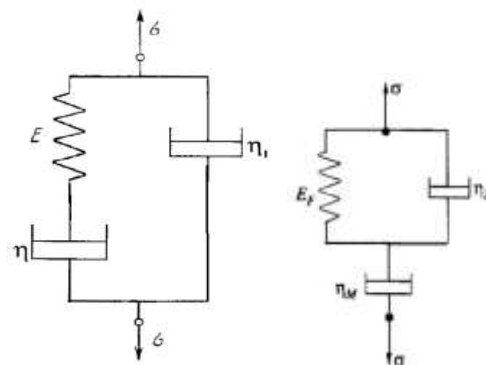


Рис.1,б. СиМ-3

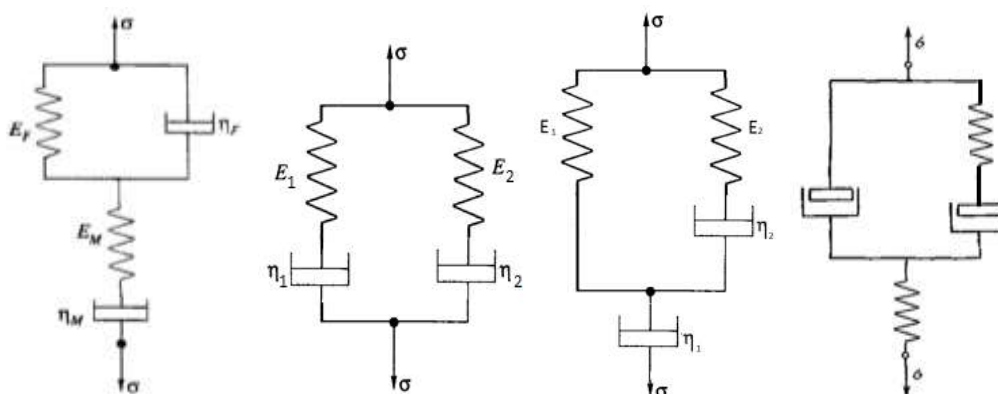


Рис.1,в. Регулярные четырёхзвенные модели (РеМ-4)

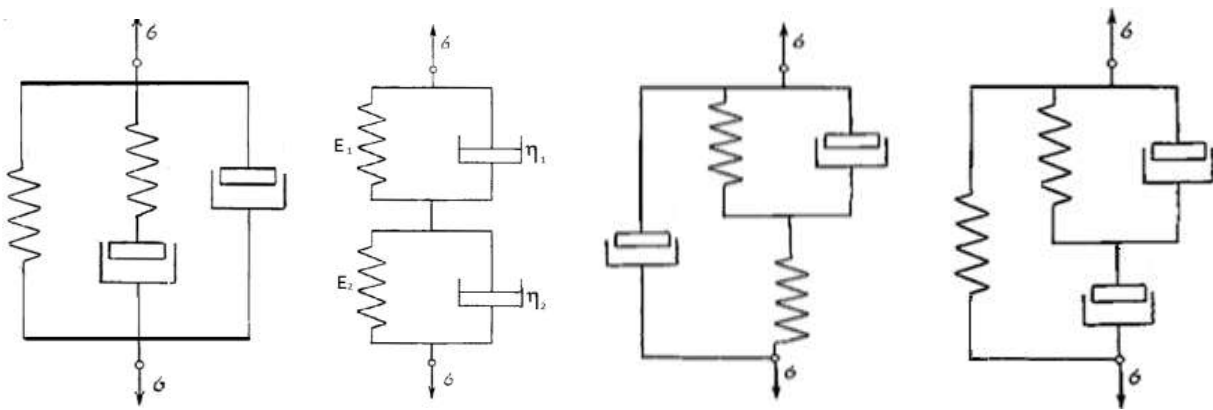


Рис.1,г. Сингулярные четырёхзвенные модели (СиМ-4)

Любая реологическая модель описывается уравнением вида $\mathbf{P}[\mathbf{d}]\sigma = \mathbf{Q}[\mathbf{d}]\varepsilon$ с двумя дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами, где порядки операторов (их характеристических многочленов) $p = \deg \mathbf{P}$, $p \geq 0$, и $q = \deg \mathbf{Q}$ либо равны, либо $q = p + 1$ [4,7], а характеристические корни вещественны, различны и неотрицательны. Из теории линейных дифференциальных уравнений следует, что функция ползучести любой реологической модели – сумма экспонент с отрицательными показателями и коэффициентами, и, возможно, функции $\alpha t + \beta$, $\alpha, \beta \geq 0$, а функция релаксации – сумма экспонент с отрицательными показателями и положительными коэффициентами и, возможно, постоянной $\beta \geq 0$ и сингулярности $\eta \delta(t)$, $\eta \geq 0$.

Можно доказать, что множество всех несократимых n -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности [44]: регулярные (при $q = p$) и сингулярные (с $q = p + 1$) модели (будем обозначать их РеМ- n и СиМ- n). Структурно различные модели мы называем эквивалентными [44,61], если они задаются одинаковыми семействами функций ползучести (или релаксации); у них отличаются только формулы выражающие параметры через модули упругости пружин и коэффициент вязкости демпферов. В частности, эквивалентны: 1) трёхзвенные РеМ Пойнтинга-Томсона и Кельвина (рис.1,а), в англоязычной литературе они называются «standard linear solid model» и «Zener model»; 2) трёхзвенные СиМ Лесерсича (Lethersich) и Джеффриса (Jeffreys) (рис.1,б; другое название – «anti-Zener model»); 3) все четыре РеМ-4 (рис.1,в) эквивалентны модели стандартного тела (последовательному соединению моделей Максвелла и Фойгта, т.е. соединению РеМ-2 и СиМ-2), которая именуется ещё моделью Бюргерса («Burgers model»); 4) все четыре СиМ-4 (рис.1,г) эквивалентны последовательному соединению двух моделей Фойгта с разными временами ползучести (retardation time); 5) все РеМ-2 k , $k > 1$, эквивалентны параллельному соединению k моделей Максвелла с разными временами релаксации; 6) все СиМ-2 k , эквивалентны последовательному соединению k моделей Фойгта с разными временами ползучести; 7) РеМ-(2 k +1) получается из СиМ-2 k последовательным присоединением упругого элемента (с ФР $R(t) = E$ и ФП $\Pi = 1/E$), а СиМ-(2 k +1) – из РеМ-2 k параллельным подключением вязкого элемента (с ФР $R = \eta \delta(t)$ и ФП $\Pi = t/\eta$).

Например, семейство функций ползучести

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta + \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \geq -\beta \quad (2.1)$$

порождает все регулярные четырёхзвенные модели и все трёхзвенные модели. При $\gamma \in (-\beta, 0)$ – РеМ-4 (модель «стандартного тела», рис. 1,в). При $\alpha = 0$ – РеМ-3 (рис. 1,а); ФП двух последних имеют горизонтальную асимптоту: $\Pi(\infty) = \beta$. Поскольку $\Pi(0) = \beta + \gamma$, то ФП (2.1) порождает *сингулярные* модели только тогда, когда $\gamma = -\beta$ (тогда из (1.2) ФР $R(t) = \eta \delta(t) + A e^{-\nu t}$, $\nu := \alpha \lambda (\alpha + \beta \lambda)^{-1} \in (0, \lambda)$, $\eta := (\alpha + \beta \lambda)^{-1} \in (0, \alpha^{-1})$, $A := \beta \lambda^2 \eta^2 > 0$ [44,62]); при $\alpha = 0$ это модель Фойгта (тогда $\nu = 0$, $A = \beta^{-1}$), если $\alpha > 0$, то получаются (все) сингулярные трёхзвенные модели (рис.1,б), а при $\lambda = 0$ или $\beta = 0$ (т.е. $A = 0$) – модель ньютоновской жидкости. При $\gamma = 0$ (2.1) превращается в модель Максвелла. Случай $\gamma > 0$, как показано ниже, приводит к возрастанию кривой обратной ползучести и потому должен быть исключён наложением ограничений на ФП. ФП модели СиМ-4 не входят в семейство (2.1).

3. О сопоставлении теоретических и экспериментальных кривых

Базовый список типичных качественных свойств квазистатических экспериментальных кривых (ползучести, релаксации, деформирования и т.п.) структурно стабильных вязкоупругопластичных материалов (и кривые конкретных материалов) приведён в [53,55;44]. Из него вытекают необходимые феноменологические ограничения на материальные функции и параметры ОС, обеспечивающие наличие тех же свойств у теоретических кривых, порождаемых ОС.

Сопоставляя теоретические кривые с экспериментальными (ЭК), будем, прежде всего, иметь в виду испытания на чистый сдвиг: тогда в (1.1) $\sigma := \sigma_{12} = s_{12}$, $\varepsilon := \varepsilon_{12} = e_{12}$, $R := R_s$ и $\Pi := \Pi_s$ – сдвиговые функции релаксации и ползучести. Применяя ОС (1.1) к описанию опытов на одноосное растяжение-сжатие и полагая $\sigma := \sigma_{11}$, $\varepsilon := \varepsilon_{11}$, нужно иметь в виду, что ФП в (1.1) будет зависеть как от сдвиговой, так и от объёмной ФП: $\Pi := \Pi_1 = (6\Pi_s + \Pi_v)/9$. Поперечные деформации $\varepsilon := |\varepsilon_{22}|$ связаны с $\sigma := \sigma_{11}$ посредством ФП $\Pi_2 = (3\Pi_s - \Pi_v)/9$. Измеряя $\varepsilon_{11}(t)$ и $|\varepsilon_{22}(t)|$ в испытаниях на ползучесть при $\sigma_{11} = \bar{\sigma} h(t)$, можно найти $\Pi_1(t)$ и $\Pi_2(t)$, а затем найти $\Pi_s = \Pi_1 + \Pi_2$, $\Pi_v = 3\Pi_1 - 6\Pi_2$, т.е. идентифицировать трёхмерные ОС.

Возможно и прямое сопоставление теоретических кривых с экспериментальными кривыми растяжения-сжатия: если в испытаниях обнаруживается отсутствие «единой кривой» (зависимость от вида НДС), всё же *качественные* свойства кривых испытаний на сдвиг и одноосное растяжение, как правило, одинаковы.

4. Семейства кривых релаксации и ползучести линейных ОС

Семейства теоретических КП и КР получаются подстановкой в ОС (1.1) процессов $\sigma(t) = \bar{\sigma} h(t)$ и $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} h(t)$ с произвольными значениями $\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$:

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma} \Pi(t), \quad \sigma(t) = \bar{\varepsilon} R(t) \quad (4.1)$$

ТКП (4.1) линейно зависят от уровня напряжений, а ТКР – от уровня деформации (эти свойства вытекают только из однородности (4.1) интегральных операторов), поэтому $\dot{\varepsilon}(t)/\varepsilon(t)$ не зависит от $\bar{\sigma}$, а изохронные ТКП всегда линейны по σ : $\varepsilon = k\sigma$, где $k := \Pi(t)$. При $t \rightarrow 0$ семейство изохронных ТКП сходится к прямой $\varepsilon = \sigma \Pi(0)$, т.е. к прямой $\sigma = R(0)\varepsilon$, если $\Pi(0) \neq 0$ (тогда $\Pi(0)R(0) = 1$). Ниже будет показано, что эта прямая – диаграмма мгновенного деформирования, т.е. к ней сходится семейство ТДД $\sigma(\varepsilon, a)$ при постоянных СД a , когда $a \rightarrow \infty$. Если модель не регулярна ($\Pi(0) = 0$), то семейства изохронных ТКП и ТДД сходятся к вертикальной прямой $\varepsilon = 0$ (при этом у моделей класса НЕМ $R(0+) = \infty$, а у СИМ $R(0+) < \infty$, но наличие сингулярности в ФР влечёт наличие вертикального начального участка на ТДД).

Время релаксации находится по ТКР (4.1) из условия $\sigma(0)/\sigma(\tau) = e$: $\tau = \rho(R(0)/e)$, $\rho := R^{-1}$. Таким образом, время релаксации регулярных моделей (1.1) не зависит от уровня деформации и является убывающей функцией параметра $R(0) := E$.

Перечисленные свойства ТКР и ТКП намечают границы адекватности линейных ОС (1.1). Их наличие у ЭКР и ЭКП материала следует считать первыми необходимыми признаками линейности его поведения при обсуждении применимости к его моделированию ОС (1.1). Подчеркнём, что только из линейности изохронных ЭКП (из однородности оператора) не следует адекватность линейных ОС: надо проверить ещё и аддитивность.

5. Об ограничениях на материальные функции ОС (1.1)

Как ни странно, вопрос о точной формулировке полного списка минимальных базовых ограничений на ФП и ФР ОС (1.1) и об их истоках и следствиях, отражающихся на свойствах базовых теоретических кривых, порождаемых ОС, как-то фрагментируется и обходится в большинстве монографий и статей по вязкоупругости и механике полимеров. Недостаточно полно он освещён и в [1-43] (см. обзоры и более полную библиографию в [44-46]). Порой это приводит к скрытым допущениям, необоснованным ссылкам на математические результаты, неверным представлениям и попыткам использования линейных ОС для моделирования эффектов, которые они описывать не могут.

В силу (4.1), ФР и ФП полностью определяют форму всех КР и КП. Из сравнения ТКР (4.1) с типичными ЭКР следуют *минимальные необходимые ограничения* на ФР в ОС (1.1): $R(x)$ *положительна и дифференцируема*, $R'(x)$ *отрицательна и возрастает при $x > 0$ (т.е. $R(x)$ убывает и выпукла вниз)*. Эти же ограничения можно вывести из диссипативного неравенства и требования затухания памяти материала [8]. Случаи

$$\dot{R}(0+) = -\infty \text{ и } R(0) = +\infty$$

не запрещаются, но требуют особого рассмотрения.

Отметим, что из монотонности ФР $R(t)$ и ФП $\Pi(t)$ следует, что они могут иметь лишь точки разрыва первого рода на $(0; \infty)$, что $\dot{R}(t)$ и $\dot{\Pi}(t)$ существуют почти всюду и интегрируемы по Лебегу (если предел $\dot{R}(0+)$ конечен), и что ОС (1.1) можно интегрировать по частям. Однако из монотонности непрерывной функции $f(t)$ не следует справедливость формулы Ньютона-Лейбница для $\dot{f}(t)$: для этого требуется абсолютная непрерывность $f(t)$ на отрезке (монотонность производной $\dot{f}(t)$ обеспечивает это, т.к. гарантирует выполнение условия Липшица для $f(t)$). Из убывания и положительности ФР следует существование предела $R(+\infty) = \inf R(x) \geq 0$, т.е. наличие горизонтальной асимптоты у ФР и всех ТКР (4.1). Если $R(x)$ ограничена в правой проколотой окрестности нуля, то существует и конечный предел $R(0+) = \sup R(x) > 0$ (как у РеМ и СиМ).

Отказ от ограниченности $R'(x)$ или $R(x)$ в окрестности т. $x=0$ (и тем самым – от условия ограниченности вариации ФР на $[0, t]$) и использование $R(x)$ с интегрируемой особенностью или сингулярностью типа δ -функции, локализованной в нуле, возможен, но приводит к сингулярности интегральных уравнений (1.1)-(1.5) и кривых релаксации, отвечающих процессам деформирования $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} h(t)$, к «нехорошим» (качественно иным) свойствам семейств ТДД, к бесконечности начального (мгновенного) касательного модуля («модуля упругости», модуля сдвига и т.п.) в нуле, бесконечности скорости распространения волн, неограниченности оператора $\mathbf{R}$, к склеиванию оператором Π скачков $\sigma(t)$ (они вызывают лишь скачки $\dot{\varepsilon}(t)$, т.к.

$$\hat{\varepsilon}(t_*) = \Pi(0)\hat{\sigma}(t_*) + \dot{\Pi}(0)\hat{\sigma}(t_*),$$

к появлению скачков $\sigma(t)$ в точках излома $\varepsilon(t)$ ($\hat{\sigma}(t_*) = \eta \hat{\varepsilon}(t_*)$, если в ФР присутствует слагаемое $\eta \delta(t)$) или бесконечности $\dot{\sigma}(t_*+0)$ в этих точках (когда ФР не ограничена, но не сингулярна) и т.д. [44-46, 59, 61-65].

Экспериментальные КП куда более разнообразны по форме и типичных форм ЭКП существует несколько [6,10]: КП со всеми тремя стадиями, КП с постоянной скоростью ползучести или только с убывающей (выпуклые вверх) или с возрастающей. Поэтому универсальными требованиями к ФП можно считать только положительность, возрастание и дифференцируемость $\Pi(t)$ при $t \geq 0$ (помимо неявных ограничений, вытекающих из (1.2) и требований к ФР). Ограничения на интервалы выпуклости ФП, казалось бы, можно варьировать в зависимости от свойств ЭКП классов материалов (например, в [7, с.27] на рис.5 приведён «характерный график» функции ползучести с точкой перегиба). Однако следует проверить, не приводят ли они к недопустимым следствиям для других кривых модели (например, ТДД). Оказывается нарушение условия $\dot{\Pi}(t) \leq 0$ в некоторой точке влечёт наличие участка возрастания на теоретической кривой обратной ползучести и

должно быть запрещено, т.к. в испытаниях структурно стабильных материалов всегда наблюдается монотонное убывание деформации при мгновенной полной разгрузке.

6. Кривые обратной ползучести (последствия) и ограничение на ФП

Ступеньку $\sigma(t) = \bar{\sigma}[h(t) - h(t-T)]$, где $\bar{\sigma} > 0$, $T > 0$, $h(t)$ – функция Хевисайда, оператор (1.1) переводит в процесс $\varepsilon(t) = \bar{\sigma}[\Pi(t)h(t) - \Pi(t-T)h(t-T)]$, $t \geq 0$. В т. $t = T$ $\varepsilon(t)$ и $\dot{\varepsilon}(t)$ имеют скачки $\hat{\varepsilon}(T) = -\bar{\sigma}\Pi(0)$,

$$\hat{\varepsilon}(T) = \Pi(0)\hat{\sigma}(T) + \dot{\Pi}(0)\hat{\sigma}(T) = -\bar{\sigma}\dot{\Pi}(0)$$

(т.к. $\hat{\sigma}(T) = 0$), а после мгновенной полной разгрузки деформация меняется по закону:

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma}S(t;T), \quad t > T, \quad S(t;T) := \Pi(t) - \Pi(t-T) \quad (6.1)$$

Для модели Максвелла $\Pi(t) = \alpha t + \beta$, и потому (6.1) имеет вид: $\varepsilon(t) = \bar{\sigma}\alpha T \equiv \text{const}$ при $t > T$, т.е. вся накопленная деформация ползучести оказывается необратимой. Для ФП (2.1) формула (6.1) даёт: $\varepsilon(t) = \bar{\sigma}[\alpha T - ce^{-\lambda t}]$, где $c := \gamma(e^{\lambda T} - 1)$. У моделей Кельвина и Фойгта $\alpha = 0$, и потому $S(t) = |\gamma|(e^{\lambda T} - 1)e^{-\lambda t}$, и $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. При $\gamma > 0$ будет $c > 0$, т.е. $\varepsilon(t)$ возрастает после нырка под предельный уровень $\varepsilon_{\infty} = \bar{\sigma}\alpha T$.

У всех стабильных материалов после снятия нагрузки наблюдается постепенное убывание (релаксация) деформации до некоторого уровня (нулевого для сетчатых полимеров в высокоэластичном состоянии). Это явление называется упругим восстановлением («recovery»), возвратом, последствием, обратной ползучестью [6,10,60,68-85]. Задача его адекватного описания налагает на функцию ползучести дополнительное ограничение.

Из требования (нестрогого) убывания теоретических кривых обратной ползучести (6.1) (с любым T) следует невозрастание $\dot{\Pi}(t)$ (т.е. выпуклость вверх $\Pi(t)$). В самом деле,

$$\dot{S}(t,T) = \dot{\Pi}(t) - \dot{\Pi}(t-T); \quad \dot{S}(t,T) \equiv 0$$

при всех $t > T$ тогда и только тогда, когда $\dot{\Pi}(t) = \text{const}$, т.е. $\Pi(t)$ линейна (модель Максвелла); $\dot{S}(t,T) \leq 0$ при всех $t > T$ тогда и только тогда, когда $\dot{\Pi}(t)$ убывающая (нестрого) функция. От противного: если бы существовали точки

$$t_* > T > 0: \dot{\Pi}(t_*) > \dot{\Pi}(t_* - T), \text{ то } \dot{\varepsilon}(t_*) > 0,$$

и потому t_* – точка возрастания $\varepsilon(t)$ ($\varepsilon(t_* + \Delta t) > \varepsilon(t_*) > \varepsilon(t_* - \Delta t)$), т.е. после сброса нагрузки деформация всё же возрастала бы в окрестности некоторой точки. Подобное явление ещё никогда не наблюдалось в испытаниях структурно стабильных материалов. Поэтому для на ФП в ОС (1.1) следует накладывать ограничение: $\Pi(t)$ не имеет участков выпуклости вниз (это требование отсутствует во многих работах, например в [1-7, 9-21, 25-28,32,34-36,39, 43 и др.]). В силу (4.1) из этого следует, что линейные ОС не могут описывать стадию ускоряющейся ползучести.

Можно доказать, что ограничение $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ на ФП не является следствием остальных ограничений на ФР и ФП (и тождества (1.2)): существует гладкая убывающая ФР с $\ddot{R}(t) \geq 0$, такая, что соответствующая ФП строго монотонна, но имеет участок с $\ddot{\Pi}(t) > 0$ (хотя на всём этом участке $\ddot{R}(t) > 0$) [44].

По (4.1), скорость ползучести

$$\dot{\varepsilon}(t) = \bar{\sigma} \dot{\Pi}(t)$$

убывает на луче $t > 0$ и, значит, имеет предел $v_{\infty} = \bar{\sigma}v \geq 0$, $v := \dot{\Pi}(\infty)$. Тогда и $\Pi(t)/t \rightarrow v$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. $\Pi(t) = vt + o(t)$, если $v > 0$. Значит, при больших t ТКП (4.1) либо выходят на режим установившейся ползучести со скоростью $\bar{\sigma}v > 0$, либо обладают свойствами $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t) = o(t)$.

Т.к. кривая обратной ползучести (6.1) убывает и положительна (ограничена снизу), она имеет предел $\varepsilon_{\infty} \geq 0$ при $t \rightarrow \infty$, причём $\varepsilon_{\infty} = \bar{\sigma}s(T)$ (остаточная деформация), где $s(T) := \lim_{t \rightarrow \infty} S(t; T) \geq 0$. Легко доказать, что $s(T) = vT$ для любой дифференцируемой на интервале $t > 0$ ФП $\Pi(t)$. В самом деле, по теореме Лагранжа

$$S(t; T) = \dot{\Pi}(t - \xi) T,$$

где $\xi = \xi(t) \in (0; T)$. Поскольку $t - \xi(t) > t - T \rightarrow \infty$, то $t - \xi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и, переходя к пределу, получим $s = vT$, $\varepsilon_{\infty} = \bar{\sigma}vT$, где $v := \dot{\Pi}(\infty)$. Поэтому требования $v = 0$ и $\varepsilon_{\infty} = 0$ (отсутствия остаточной деформации) равносильны.

Отметим, что в монографиях [74, с.37; 89, с.151] ошибочно утверждается, что в рамках линейной теории наследственности кривая обратной ползучести всегда имеет нулевой предел при $t \rightarrow \infty$, т.е. «последствие является упругим» (а также – что длительный модуль $1/\Pi(\infty)$ всегда больше нуля, хотя не предполагается, что ФП ограничена).

Если $v > 0$, то память модели (точнее, память оператора Π) не затухает, ибо след, оставленный прямоугольным импульсом нагрузки (любым финитным возмущением), не стирается никогда. При циклическом импульсном нагружении (с коэффициентом асимметрии цикла равным нулю и произвольным временем отдыха между импульсами нагружения) условие $v > 0$ обеспечивает неограниченное нарастание пластической деформации (ratcheting), а условие $v = 0$ – её стабилизацию («приспособляемость» материала, «shake-down»).

Для идентификации параметра v по экспериментальной КОП можно использовать формулу $v = \varepsilon_{\infty} / (\bar{\sigma}T)$, если удаётся зарегистрировать ε_{∞} . Отметим, что определить предельную остаточную деформацию ε_{∞} непросто, поскольку скорость обратной ползучести обычно велика в окрестности т. $t = T$, а затем быстро падает до близких к нулю значений, восстановление идёт очень долго и трудно определить, закончилось ли оно. Для определения ε_{∞} используют нагрев, резко ускоряющий восстановление [6, 70].

На рис. 2 приведены кривые обратной ползучести ($\bar{\sigma}=1$) для моделей семейства (2.1) с $\lambda=0.1$: «стандартного тела» ($\gamma=-0.5$, $\alpha=0.1$; асимптота $\varepsilon=1$), Максвелла ($\gamma=0$, $\alpha=0.1$; $\varepsilon \equiv 1$ при $t>T$), Кельвина ($\alpha=0$, $\gamma=-0.5$; $\Pi(0)=1$, а при $t>T$ лежит ниже остальных и имеет асимптоту $\varepsilon=0$), Фойгта ($\beta=-\gamma=1.5$; асимптота $\varepsilon=0$). На КП модели Фойгта нет скачка $\varepsilon(t)$ в момент скачка напряжения, ибо у неё $\Pi(0)=0$ (и $\dot{\Pi}(0)=\eta<\infty$). Нет скачка и на КП модели с ФП $\Pi(t)=\alpha t^\omega$, но у неё $\dot{\Pi}(0+)=+\infty$ и $\dot{\Pi}(T+0)=-\infty$. Штриховая кривая (с разрывом, $\Pi(\infty)=1$) – КП для выпуклой вниз ФП (2.1) при $\gamma>0$ (недопустимой, т.к. КП возрастает и при $t>T$). Штрих-пунктир – обычные КП (без разгрузки) моделей Фойгта и Кельвина (с $\Pi(\infty)=1.5$).

Мгновенные нагружение и деформирование до заданного постоянного уровня напряжения или деформации не осуществимы при испытаниях материалов: на практике все-

гда имеется начальная стадия деформирования (НС). Её наличие и влияние её длительности t_* и других характеристик необходимо учитывать при обработке и интерпретации экспериментальных КР и КП, при идентификации материальных функций и параметров. Для этого необходимо детальное аналитическое изучение свойств семейств КР и КП, которые порождает ОС (1.1) с произвольными ФР и ФП, и получение универсальных точных оценок их отклонения от идеальных КР и КП (4.1) при мгновенном деформировании в момент $t=0$ [45,46,65,66]. Систематическое исследование этих свойств в общем виде и даже краткий их перечень, к сожалению, отсутствуют в монографиях и обзорах по вязкоупругости, ползучести, механике полимеров и работах по исследованию и моделированию релаксации материалов и методикам определения ФР и ФП, в частности, в [1-43, 68-82] (в [46] дан подробный обзор состояния вопроса, в частности, дискуссии по поводу возможности ревизии «ten-times rule» и расширения окна наблюдения ФР и список литературы, содержащий более двухсот работ).

Рассмотрим (непрерывную) монотонную программу деформирования

$$\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} f(t/t_*) \text{ при } t \in [0; t_*], \quad \varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} = \text{const} \text{ при } t \geq t_*, \text{ где } t_*, \bar{\varepsilon} > 0, \quad (7.1)$$

$f(x)$ - произвольная непрерывная неубывающая функция на $[0;1]$, такая, что $f(0)=0$, $f(1)=1$ (например, $f(x)=x$ для НС с постоянными скоростями деформирования $a = \bar{\varepsilon}/t_*$).

На рис.3,а приведены примеры функций $f(x)$, задающие закон деформирования на НС, а на рис. 3,б – программы деформирования (7.1) с разными длительностями НС t_* при фиксированном $\bar{\varepsilon}$.

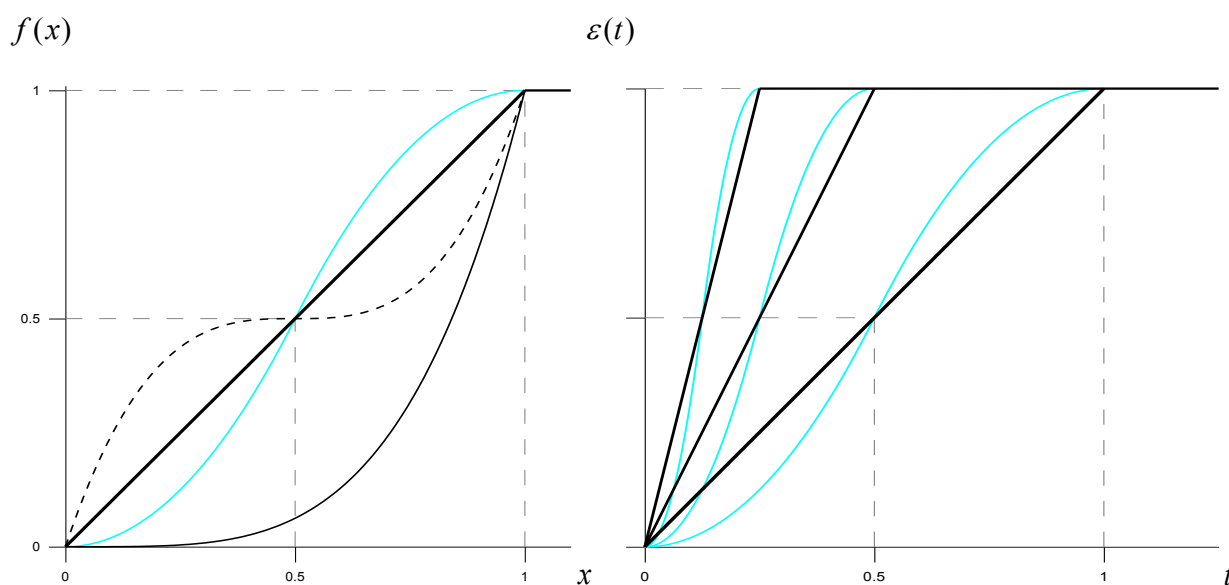


Рис. 3,а. Функции $f(x)$, задающие форму НС

Рис. 3,б. Программы деформирования (7.1) с разными t_*

Соответствующая по (1.5) кривая релаксации имеет вид:

$$\sigma(t; t_*) = \bar{\varepsilon} \int_0^{t/t_*} R(t - t_* x) f'(x) dx \text{ при } t \leq t_*, \quad \sigma(t; t_*) = \bar{\varepsilon} \int_0^1 R(t - t_* x) f'(x) dx \text{ при } t \geq t_* \quad (7.2)$$

Поведение $\sigma(t; t_*)$ при $t \leq t_*$ сильно зависит от поведения $f'(x)$. В сущности, можно гарантировать лишь два общих свойства: 1) если $R(0) < \infty$, то $\sigma(0; t_*) = 0$ для любой f ; 2) если $f'(x)$ нестрого возрастает $[0; \tau]$, то и $\sigma(t; t_*)$ возрастает на $[0; \tau / t_*]$ (т.к. $\dot{\sigma}(t; t_*) \geq 0$). Качественные свойства КР на втором участке, наоборот, от f , как показал анализ [65,46], практически не зависят и совпадают со свойствами идеальной КР (4.1), влияние НС быстро затухает с течением времени, и КР (7.2) быстро сближаются с идеальной КР как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t_* \rightarrow 0$.

В частности, доказано, что при любом фиксированном t_* КР (7.2) убывает по t , выпукла вниз на луче $[t_*; \infty)$ и имеет горизонтальную асимптоту $\sigma = \bar{\varepsilon} R(+\infty)$; эта асимптота общая для всех КР (не зависит от t_* и f) и совпадает с асимптотой идеальной КР. Максимальное (на $[t_*; \infty)$) значение КР (7.2) достигается в т. $t = t_*$, убывает с ростом t_* (с убыванием СД) и $\sigma(t_* + 0; t_*) \rightarrow \bar{\varepsilon} R(0+)$ при $t_* \rightarrow 0$, т.е. стремится к предельному значению идеальной КР в нуле. В точке сопряжения $t = t_*$ все КР непрерывны (если ФР не сингулярна), но имеют изломы (если $f'(1) \neq 0$), т.к. скачок $\dot{\sigma}(t)$ пропорционален скачку СД:

$$\hat{\dot{\sigma}}(t_*) = R(0+) \hat{\varepsilon}(t_*) = R(0+) \bar{\varepsilon} t_*^{-1} f'(1).$$

Начальная скорость релаксации $|\dot{\sigma}(t_* + 0; t_*)|$ убывает по аргументу t_* (т.е. растёт с уменьшением t_*), если только $|\dot{R}(t)|$ убывает (т.е. ФР выпукла вниз), а при $t_* \rightarrow 0$ имеем

$$\dot{\sigma}(t_* + 0; t_*) \rightarrow \bar{\varepsilon} \dot{R}(0+). \quad \sigma_{t_*}(t; t_*) > 0$$

при всех $t > t_*$, т.е. чем больше t_* , тем выше лежит КР (7.2) на $[t_*; \infty)$. При $t_* \rightarrow 0$ семейство КР $\sigma(t; t_*)$ (с фиксированной $f(x)$) сходится (сверху) к идеальной КР $\sigma(t; 0) = \bar{\varepsilon} R(t)$ равномерно внутри интервала $(0; \infty)$ (и даже - на любом луче $t \geq t_0$ с $t_0 > 0$). Это следует из оценки

$$\bar{\varepsilon} R(t) < \sigma(t; t_*) < \bar{\varepsilon} R(t - t_*), \text{ или } 0 < \sigma(t; t_*) - \sigma(t; 0) < \bar{\varepsilon} R(t - t_*) - \bar{\varepsilon} R(t) \text{ при } t > t_*$$

для любых $f(x)$ и $\bar{\varepsilon} > 0$ и из равномерной непрерывности ФР на отрезке.

Перечисленные свойства сохраняются и для сингулярных (в нуле) функций релаксации. Отличия наблюдаются только на начальной стадии деформирования: 1) левый предел

$\sigma(t_* - 0; t_*)$ растёт неограниченно при $t_* \rightarrow 0$ (а значит, стремится к бесконечности и норма отклика $\sigma(t; t_*)$ в пространствах $C[0; t_*)$ и $C[0; \infty)$, хотя норма входного процесса $\varepsilon(t; t_*)$ равна $\bar{\varepsilon}$ при всех t_*); 2) у КР (7.2) появляются разрывы первого рода в т. $t = t_*$ и

$$t = 0: \sigma(0+) = \eta \dot{\varepsilon}(0+) \text{ и } \hat{\sigma}(t_*) = \eta \hat{\dot{\varepsilon}}(t_*);$$

3) скачок $\dot{\sigma}(t)$ в т. $t = t_*$ содержит слагаемое, пропорциональное скачку $\ddot{\varepsilon}(t)$:

$$\hat{\dot{\sigma}}(t_*) = R(0+) \hat{\ddot{\varepsilon}}(t_*) + \eta \hat{\ddot{\varepsilon}}(t_*).$$

Тем самым доказано, что в линейной вязкоупругости *всегда* имеет место затухание памяти *при релаксации* – в том смысле, что модель забудет о любом воздействии (возмущении) конечной длительности $\varepsilon_*(t)$ по прошествии достаточно большого времени (разность откликов $R\varepsilon_*$ стремится к нулю при $t/t_* \rightarrow \infty$ или по некоторой норме, когда $t_* \rightarrow 0$) [45,52,65]. Для этого достаточно убывания и выпуклости вниз функции релаксации. Тогда как для затухания памяти при ползучести необходимо наложить на асимптотику ФП при $t \rightarrow \infty$ дополнительное ограничение: $\dot{P}(\infty) = 0$ [45,52,64-66].

Рассмотрим для иллюстрации общих свойств КР (7.2) модель РеМ-3 (рис.1,а) с НС

$$f = 0.5(2x)^2 = 2x^2 \text{ при } x \in [0; 0.5], \quad f(x) = -2(1-x)^2 + 1 \text{ при } x \in [0.5; 1] \quad (7.3)$$

($f'(x)$ непрерывна, $f'(0) = f'(1) = 0$, $x = 0.5$ – точка перегиба, $f(0.5) = 0.5$, интеграл $S = 0.5$). ФР РеМ-3 – $R(t) = Ae^{-\mu t} + r$, $A, \mu, r > 0$, поэтому КР (7.2) примут вид:

$$\sigma(t; t_*) = 4\bar{\varepsilon} A(\mu t_*)^{-2} [\mu t - 1 + e^{-\mu t}] + \bar{\varepsilon} r f(t/t_*) \text{ при } t \leq 0.5t_*$$

$$\sigma(t; t_*) = 4\bar{\varepsilon} A(\mu t_*)^{-2} [\mu t_* - \mu t + 1 - e^{-\mu t} (2e^{0.5\mu t_*} - 1)] + \bar{\varepsilon} r f(t/t_*) \text{ при } t \in [0.5t_*, t_*]$$

$$\sigma(t; t_*) = 4\bar{\varepsilon} A(\mu t_*)^{-2} (e^{0.5\mu t_*} - 1)^2 e^{-\mu t} + \bar{\varepsilon} r \text{ при } t \geq t_*.$$

На рис. 4 приведены КР (7.2) модели РеМ-3 с $A = 1$, $r = 0.1$ и $\mu = 0.01; 0.1; 1$ для двух НС с $t_* = 10$: $f = 4(x - 0.5)^3 + 0.5$ (три чёрные КР) и f из (7.3) (голубые КР без излома в т. t_*). При $t \rightarrow \infty$ все КР стремятся к общей асимптоте $\sigma = \bar{\varepsilon} r$ (она не зависит от A , μ и НС). Красные штриховые кривые – идеальные КР $\sigma(t) = \bar{\varepsilon} R(t)$ при мгновенном нагружении в момент $t = 0$.

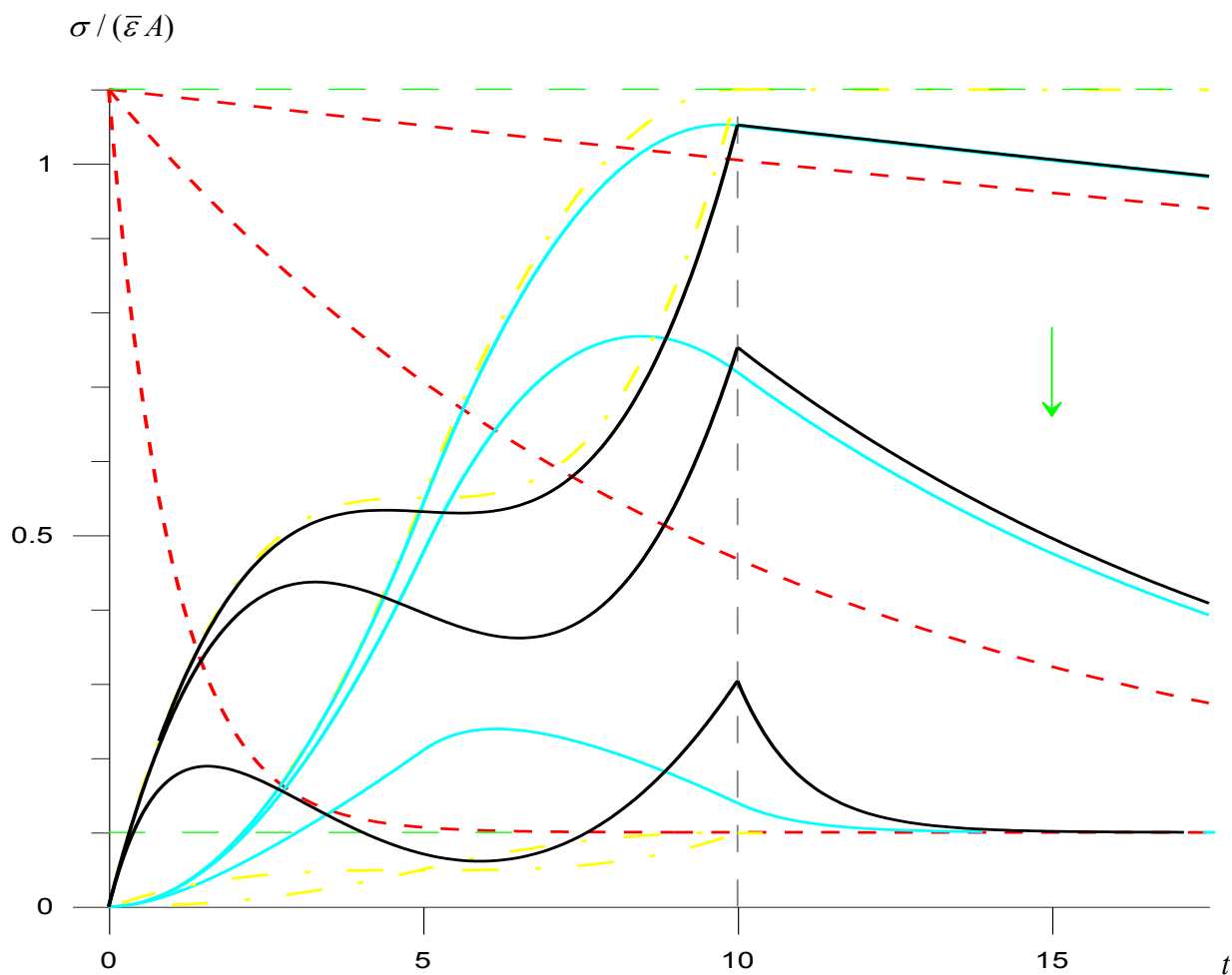


Рис. 4. КР РеМ-3 для НС $f = 4(x - 0.5)^3 + 0.5$ и НС (7.3) в зависимости от μ

При любых μ и f для КР модели Кельвина верны точные оценки

$$\bar{\varepsilon} r f(t/t_*) < \sigma(t; t_*) < \bar{\varepsilon} (A + r) f(t/t_*) \text{ при } t \leq t_*, \quad \bar{\varepsilon} r < \sigma(t; t_*) < \bar{\varepsilon} (A + r) \text{ при } t \geq t_*,$$

т.е. все КР с любыми значениями A, r, μ для любых $t_* > 0$ и $f(x)$ лежат в «полосе» между КР двух упругих элементов (жёлтые штрих-пунктирные кривые на рис. 4) с ФР $R = r$ и $R = A + r$ (т.е. с модулями упругости r и $A + r$). Нетрудно доказать [46], что с увеличением μ (с уменьшением времени релаксации) КР целиком опускается вниз и при $\mu \rightarrow \infty$ семейство КР РеМ-3 сходится к КР упругого элемента с модулем Юнга $E = r$ (нижняя жёлтая штрих-пунктирная кривая), а при $\mu \rightarrow 0$ семейство КР РеМ-3 сходится (снизу) к КР упругого элемента с модулем Юнга $E = A + r$. Сходимость монотонна и равномерна на любом отрезке $[0; T]$ (но не на луче $[T; \infty)$: отклонение любой КР с $\mu > 0$ от предельной кривой по норме $C[T; \infty)$ равно A , из-за наличия асимптоты $\sigma = \bar{\varepsilon} r$). Примечательно, что с уменьшением μ КР (7.2) всё медленнее стремится к своей асимптоте $\sigma = \bar{\varepsilon} r$, но память

о специфике начальной стадии при $t \geq t_*$ стирается всё раньше (рис. 4): относительное отклонение КР с разными НС при $\mu = 0.1$ не превышает 5% (при любом фиксированном $t > t_*$), а при $\mu \leq 0.01$ – 1 % (КР для разных f практически полностью сливаются при $t \geq t_*$). При $t \geq 3t_*$ относительное отклонение КР с разными НС меньше 1% для всех $\mu = 0.01; 0.1; 1$, т.е. память о начальной стадии затухает очень быстро (благодаря тому, что у f_1 и f_2 одинаковое значение интеграла $S = 0.5$ [46,65]).

Если $f(x) = x$, то программа (7.1) превращается в двухпараметрическую программу деформирования с постоянными скоростями $a = \bar{\varepsilon} / t_*$, t_* , $\bar{\varepsilon} > 0$ («ramp tests»). Отклики ОС (1.1) на такие программы гамп-деформирования (кривые релаксации) имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma(t; t_*) &= a \int_0^t R(t-\tau) d\tau = \bar{\varepsilon} t_*^{-1} \int_0^t R(u) du \quad \text{при } t \in [0; t_*], \\ \sigma(t; t_*) &= a \int_0^{t_*} R(t-\tau) d\tau = \bar{\varepsilon} t_*^{-1} \int_{t-t_*}^t R(u) du \quad \text{при } t > t_*\end{aligned}\quad (7.4)$$

Естественно, что в частном случае $f(x) = x$ КР (7.4) обладает специфическими дополнительными свойствами, помимо общих свойств КР (7.2), их удаётся изучить детальнее и получить более точные двусторонние оценки отклонений КР (7.4) от идеальной КР и универсальные двусторонние оценки для ФР через комбинации сдвигов КР (7.4) вдоль оси времени на t_* , $0.5t_*$ и $1.5t_*$ [46]. Основные обнаруженные в результате анализа свойств семейств КР (7.4) собраны в теореме заметки [67].

На рис.5 приведены КР модели РеМ-3 (ФР $R(t) = A e^{-\mu t} + r$ с $A = 1$, $\mu = 1$, $r = 0.1$; время релаксации $\tau = 1/\mu = 1$) с начальной стадией деформирования при постоянных скоростях $a = 0.1; 0.2; 0.3; 1$ ($f(x) = x$) до уровня $\bar{\varepsilon} = 1$ (соответственно - $t_*/\tau = 10; 5; 10/3; 1$). Красная штриховая линия – идеальная КР $\sigma(t) = \bar{\varepsilon} R(t)$; она будет предельной кривой семейства КР при $t_* \rightarrow 0$. Общая асимптота $\sigma = \bar{\varepsilon} r$ всех КР при $t \rightarrow \infty$ (она не зависит от параметров A, μ и скорости a) – зелёная прямая. Для сравнения штрих-пунктирными линиями намечены КР модели РеМ-3 с $\mu = 0.1$ (т.е. с увеличенными в 10 раз вязкостью и временем релаксации) при $t_* = 10; 5; 1$.

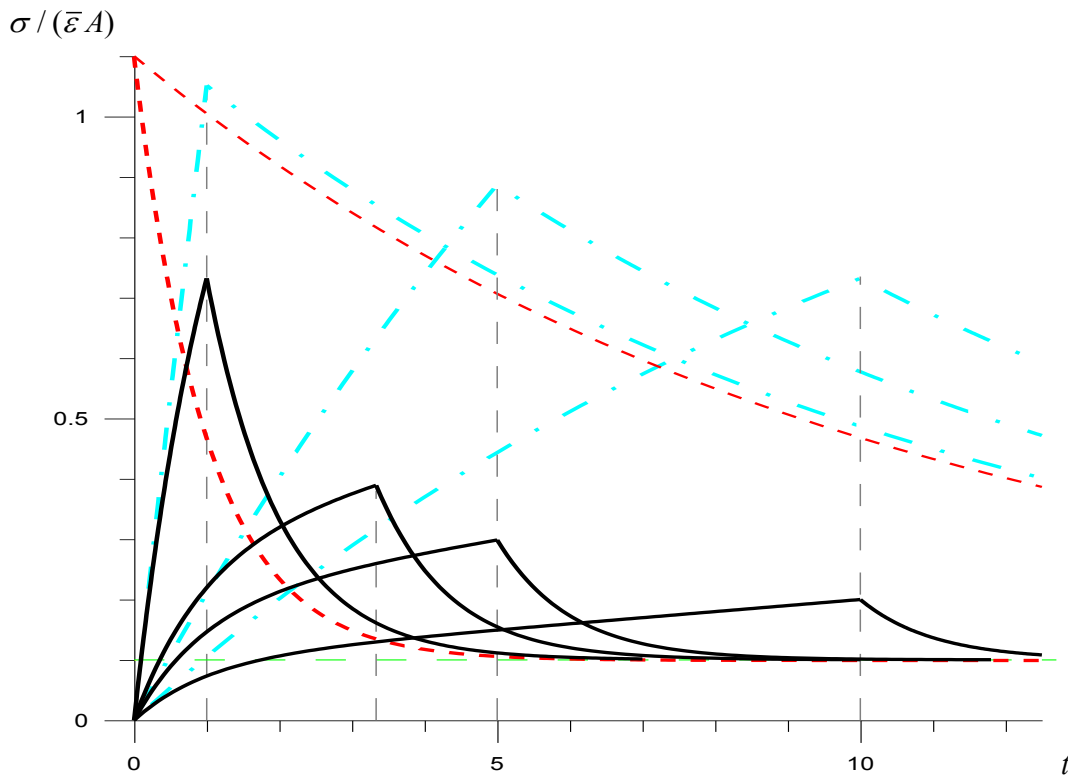


Рис. 5. КР моделей РеМ-3 при гауп-деформировании

На рис.6 приведены КР (7.4) сингулярной модели, полученной подключением вязкого элемента параллельно к РеМ-3, т.е. КР модели СиМ-4 с ФР $R(t) = Ae^{-\mu t} + r + \eta\delta(t)$ при $\eta = 1$, $A = 1$, $\mu = 1$, $r = 0.1$ (жёлтым цветом), и (чёрные) КР фрактальной модели, полученной параллельным присоединением к РеМ-3 степенного элемента вместо линейного демпфера (её ФР имеет вид $R(t) = Ae^{-\mu t} + r + Bt^u$, $A = 1$, $\mu = 1$, $r = 0.1$, $u = 2/3$, $B = 0.1$). НС деформирования с постоянными скоростями $a = 0.1; 0.2; 0.3; 1$ (соответственно – $t_* = 10; 5; 10/3; 2$). Для удобства сравнения с КР СиМ-4 зафиксированы одни и те же значения параметров: $A = 1$, $r = 0.1$, $\mu = 1$ (время релаксации СиМ-4: $\tau = 1$); поэтому все КР имеют общую асимптоту $\sigma = \bar{\epsilon}r$ при $t \rightarrow \infty$. СиМ-4 эквивалентна параллельному соединению моделей Фойгта и Максвелла (а также – последовательному соединению двух моделей Фойгта с разными временами ретардации, т.к. её ФП имеет вид $\Pi(t) = \beta_1(1 - e^{-\lambda_1 t}) + \beta_2(1 - e^{-\lambda_2 t})$ [62]). Её КР (7.2) отличаются от КР РеМ-3 (рис.5) только на отрезке $[0; t_*]$, причём – только постоянным слагаемым $a\eta = \eta\bar{\epsilon} / t_*$ [46]. Поэтому КР (7.4) модели СиМ-4 имеют в т. t_* разрыв со скачком $-a\eta$. При $t_* \rightarrow 0$ $\sigma(t_* + 0; t_*) \rightarrow \bar{\epsilon}R(0+) = \bar{\epsilon}(A + r)$, а $\sigma(t_* - 0; t_*) = \bar{\epsilon}[\eta t_*^{-1} + r + A + O(t_*)] \rightarrow \infty$ (в отличие от РеМ, у которых $\sigma(t_* - 0; t_*) \rightarrow \bar{\epsilon}R(0+)$). Розовая штриховая линия (с начальным значением $\sigma(0+) = \bar{\epsilon}(A + r) = 1.1$) - идеальная КР СиМ-4 (она совпадает при $t > 0$ с идеальной КР

РеМ-3); она будет предельной кривой семейства КР при $t_* \rightarrow 0$; сходимость равномерна на любом луче $[t_0; \infty)$ (т.к. при $t_* < t_0$ КР совпадают на $[t_0; \infty)$ с КР регулярной модели).

ФР фрактальной модели (РеМ-3)+Ф – $R(t) = Ae^{-\mu t} + r + Bt^u$ (она эквивалентна параллельному соединению модели Максвелла и «фрактальной» модели Фойгта), и КР (7.4) (чёрные КР на рис. 6) имеют вид:

$$\sigma(t; t_*) = a[A\mu^{-1}(1 - e^{-\mu t}) + rt + B(1-u)^{-1}t^{1-u}] \text{ при } t \leq t_*,$$

$$\sigma(t; t_*) = aA\mu^{-1}(e^{\mu t_*} - 1)e^{-\mu t} + art_* = \bar{\varepsilon}r + \bar{\varepsilon}A(\mu t_*)^{-1}(e^{\mu t_*} - 1)e^{-\mu t} \text{ при } t \geq t_*$$

Эта модель принадлежит к классу НеМ; в отличие от СиМ, её КР $\sigma(t; t_*)$ не имеет разрыва в т. $t = t_*$ и $\sigma(0; t_*) = 0$, а в отличие от РеМ, правые производные в точках $t = 0$ и $t = t_*$ бесконечны:

$$\dot{\sigma}(0+; t_*) = +\infty, \quad \dot{\sigma}(t_*+0; t_*) = -\infty.$$

Красная штриховая линия – идеальная КР (она будет предельной кривой семейства КР при $t_* \rightarrow 0$). Отметим, что отличие КР «фрактальной» модели от КР СиМ-4 в т. $t = t_*$ и в правой окрестности этой точки превышают отличия их идеальных КР (розовая и красная штриховые линии) в 2-3 раза.

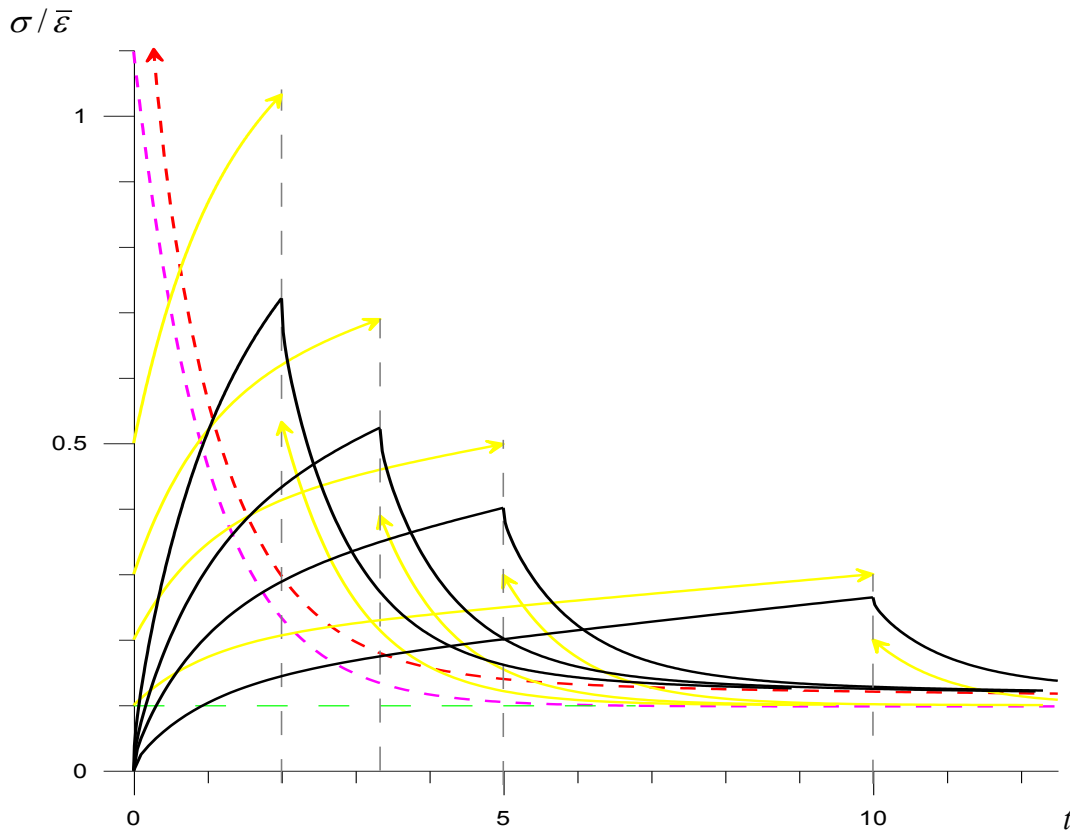


Рис. 6. КР СиМ-4 и фрактальной модели (РеМ-3)+Ф при гамр-деформировании

На результатах анализа общих свойствах семейств КР (7.4) при гамр-деформировании [46] и полученных универсальных оценках для ФР через КР (7.4), реги-

стрируемые в испытаниях материалов, и их сдвиги вдоль оси времени основаны новые методики идентификации ФР, предложенные в [46] и статье «Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики её идентификации», представленной для публикации в журнал «Известия РАН. Механика твёрдого тела». В общем виде даны оценки абсолютной и относительной погрешностей предложенных аппроксимаций функции релаксации, доказана равномерная сходимость семейства приближений к функции релаксации при $t_* \rightarrow 0$ (на любом луче $t \geq t_0$ с $t_0 > 0$), продемонстрированы более высокая точность (как в любой момент времени при фиксированном t_* , так и асимптотическая при $t_* \rightarrow 0$) найденных оценок и предлагаемого приближения по сравнению с известными родственными подходами к определению функции релаксации (в частности, по сравнению с формулой коррекции Запаса-Филлипса).

8. Диаграммы $\sigma - \varepsilon$ при постоянных скоростях деформирования

Подставим в ОС (1.1) процесс $\varepsilon = at$:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) a d\tau = a \int_0^t R(x) dx, \text{ или } \sigma(t) = P(t) \varepsilon, \text{ где } P(t) := t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau, t > 0, -$$

осреднение ФР. Исключив параметр $t = \varepsilon / a$, получим семейство ДД в явной форме:

$$\sigma(\varepsilon, a) = a \int_0^{\varepsilon/a} R(\tau) d\tau, \text{ или } \sigma(\varepsilon, a) = \int_0^{\varepsilon} R(x/a) dx, \text{ или } \sigma(\varepsilon, a) = P(\varepsilon/a) \varepsilon \quad (8.1)$$

Легко проверить, что $P(t)$ - убывающая непрерывно дифференцируемая функция при $t > 0$, причём $P(t) > R(t)$, ибо $R(t)$ убывает ($P(t) = R(t)$ лишь тогда, когда $R(t) = \text{const}$ на $[0, t]$, т.е. когда ОС (1.1) вырождается в закон Гука). Можно доказать, что

$$P(0+) = R(0), P(+\infty) = R(+\infty); \dot{P}(t) = t^{-1}(R(t) - P(t)) < 0; \dot{P}(0+) = \dot{R}(0+)/2;$$

при $t \rightarrow \infty \dot{P}(t) = o(t^{-1})$; для ФП справедлива оценка $P(t) > 1/\Pi(t) > R(t)$ [44].

Секущий и касательный модули ДД (8.1):

$$\sigma(\varepsilon, a) / \varepsilon = P(\varepsilon/a), \sigma'(\varepsilon) = R(\varepsilon/a).$$

Т.к. $\sigma'(\varepsilon) > 0$, ДД возрастает по ε . Из убывания ФР следует, что (при $a > 0$) $\sigma'(\varepsilon)$ убывает по ε , т.е. ДД всегда выпукла вверх на луче $\varepsilon > 0$.

Семейство ДД (8.1) возрастает по a (чем выше СД, тем выше лежит ДД), так как $\dot{P}(t) < 0$. Любая ДД лежит ниже прямой $\sigma = R(0)\varepsilon$, так как $P(t) < P(0) = R(0)$.

ДД (8.1) зависит от СД, но начальный (мгновенный) «модуль упругости» (модуль сдвига, объёмный модуль и т.п. – в зависимости от физического смысла σ и ε) не зависит от скорости деформации: $E := \sigma'_\varepsilon(0; a) = R(0)$ (полагаем что $R(0) < \infty$). Кстати, этим свойством обладает и нелинейная модель типа Максвелла с двумя материальными функциями (одна из них описывает упругие свойства и определяет форму мгновенной ДД, а

вторая описывает реологию и определяет зависимости ДД от СД, скорости ползучести от напряжения и т.п.) [55,58].

При СД $a \rightarrow +\infty$ семейство ДД (8.1) любой регулярной модели сходится к предельной кривой (прямой) $\sigma = E \varepsilon$ равномерно на любом отрезке оси ε , ибо, в силу убывания $P(x)$,

$$\sup_{[0,\omega]} |\sigma - E\varepsilon| = \sup_{[0,\omega]} \varepsilon |P(\varepsilon/a) - E| = \omega |P(\omega/a) - E| \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow \infty,$$

поскольку $P(+0) = E$. Поэтому $\sigma = E \varepsilon$ - мгновенная ДД. Если модель не регулярна, то $E = \infty$, касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД $\varepsilon(\sigma, a)$ равномерно сходится при $a \rightarrow \infty$ к прямой $\varepsilon = 0$.

Касательный и секущий модули ДД стремятся при $\varepsilon \rightarrow \infty$ к $r := R(+\infty) = P(+\infty) \geq 0$. Длительный модуль r тоже не зависит от СД. При $a \rightarrow 0$ семейство ДД (8.1) всегда сходится (сверху) к прямой $\sigma = r \varepsilon$ равномерно на любом отрезке полуоси $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{[\alpha,\omega]} |\sigma(\varepsilon) - r\varepsilon| = \sup_{[\alpha,\omega]} \varepsilon |P(\varepsilon/a) - r| < \omega |P(\alpha/a) - r| \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow 0,$$

т.к. $P(x)$ убывает.

Нарушение одного из установленных выше свойств у ЭДД материала – достаточный признак неприменимости линейного ОС (1.1). В частности, оно не годится (без модификации понятий) для материалов, у которых обнаруживается зависимость мгновенного или длительного модулей от СД (ряда керамических материалов, полимеров, композитов, костной ткани, твёрдого топлива и т.д.). Однако порой линейным ОС пытаются описать материалы, ЭДД которых имеют разные (это подчёркивается авторами) касательные в нуле при разных СД [18,86,87 и др.].

При $\varepsilon \rightarrow \infty$ $\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon \rightarrow r$, и ДД обладает асимптотой только тогда, когда интеграл

$$I := \int_0^{+\infty} [R(\tau) - r] d\tau \text{ сходится: } q = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (\sigma - r\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon} [R(x/a) - r] dx = a \int_0^{+\infty} [R(\tau) - r] d\tau.$$

Тогда любая ДД (8.1) имеет асимптоту $\sigma = r \varepsilon + q(a)$, её угловой коэффициент не зависит от a , $q(a) = aI$ возрастает, т.к. $I > 0$. Т.к. ФР убывает, то всегда $\sigma(\varepsilon, a) < r\varepsilon + Ia$, т.е. $\sigma(\varepsilon, a)$ стремится к асимптоте снизу. В этом случае при $a \rightarrow 0$ семейство ДД сходится к прямой $\sigma = r\varepsilon$ равномерно на всём луче $\varepsilon \geq 0$, ибо $|\sigma(\varepsilon, a) - r\varepsilon| \leq Ia$.

$E, r, I/(E-r)$ – материальные параметры, характеризующие поведение ФР в т. $t=0$, $t=\infty$ и среднюю скорость её убывания (для моделей Максвелла и Кельвина $I/(E-r)$ совпадает с временем релаксации), а значит, и управляющие свойствами ТДД, ТКР и ТКП. Для идентификации ОС (по ЭКР и ЭДД) удобно задавать ФР в виде семейства положительных убывающих выпуклых вниз функций, зависящего, как минимум, от этих трёх параметров (и, возможно, ещё и других). Например,

$$R(t) = A(t+h)^{-\alpha} + r, \quad h, A > 0, \quad \alpha > 1, \quad r \geq 0$$

(тогда $E = Ah^{-\alpha} + r$, $I / (E - r) = (\alpha - 1)h$) или

$$R(t) = (E - r)e^{-\mu t} + r, \quad E > r \geq 0, \quad \mu > 0 \quad (8.2)$$

Семейство ФР (8.2) при $r > 0$ порождает семейства моделей Кельвина и Пойнтинга-Томсона, т.е. все регулярные трёхзвенные модели (РеМ-3). Этой ФР соответствует (в силу (1.2)) ФП (2.1) с $\alpha = 0$ и $\gamma \in (-\beta, 0)$, причём

$$\beta = r^{-1}, \quad \gamma = E^{-1} - r^{-1}, \quad \lambda / \mu = r / E \in (0; 1)$$

(т.е. всегда $\lambda < \mu$ и время релаксации μ^{-1} меньше времени ползучести λ^{-1}). При $r = 0$ (8.2) вырождается в модель Максвелла, а при $E = r \neq 0$ или $\mu = 0$ - в упругий элемент.

Осреднение ФР и ДД (8.1):

$$\begin{aligned} P(t) &= (E - r)\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}) + r, \\ \sigma(\varepsilon, a) &= (E - r)\mu^{-1}a(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}) + r\varepsilon \end{aligned} \quad (8.3)$$

При любом a ДД обладает асимптотой $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I = (E - r)\mu^{-1}$.

На рис. 7 приведены (чёрным) ДД РеМ-3 (8.3) с $r = 1$, $E = \eta = 10$, $\mu = 1$ (т.е. $\beta = 1$, $\gamma = -0.9$, $\lambda = 0.1$) и Максвелла ($r = 0$ - синим цветом) для СД $a = 0.01; 0.1; 0.2; 0.3; 1$. При $a \rightarrow \infty$ семейства ДД сходятся к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (красная штрих-пунктирная линия).

$\sigma(\varepsilon, a)$

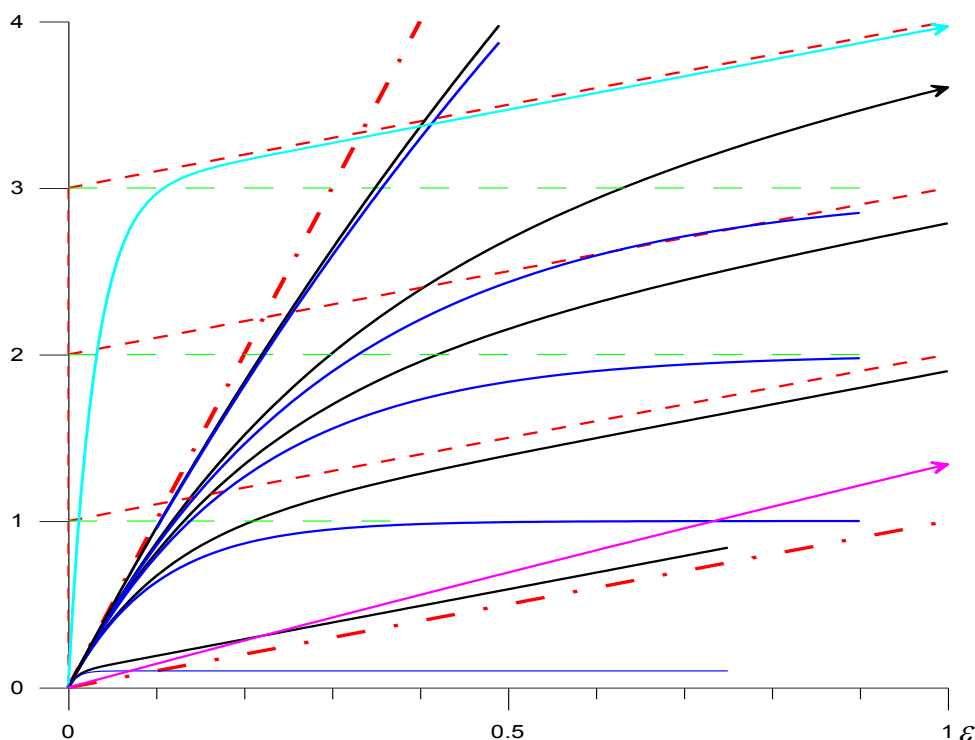


Рис. 7. Диаграммы деформирования РеМ-3, РеМ-2 и СиМ-2 при постоянных СД

Красные штриховые прямые рис. 7 – ДД модели Фойгта $\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a$ ($r = E_F = 1$, $\eta = 10$) при тех же СД; они совпадают с асимптотами $\sigma = r\varepsilon + aI$ ДД РеМ-3. Асимптоты ДД модели Максвелла горизонтальны и совпадают с ДД вязкого элемента (зелёные прямые – для $a = 0.1; 0.2; 0.3$). Для линейно вязкой жидкости $R(t) = \eta \delta(t)$, $r = 0$, $I = \eta$, $P(t) = \eta t^{-1}$, и ДД: $\sigma(\varepsilon, a) = \eta a$. ДД модели Фойгта совпадают с ДД жёсткопластического тела с линейным упрочнением, но пороговое напряжение зависит от СД: $\sigma(0) = \eta a \neq 0$ (наличие вертикального участка на ДД характерно для всех СиМ). При $a \rightarrow \infty$ семейство ДД Фойгта сходится к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$ ($E = \infty$), а при $a \rightarrow 0$ – к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (нижняя штрих-пунктирная линия). Розовая кривая – ДД (8.3) при $\beta = 1$, $\lambda = 0.1$, $\gamma = -0.3$ (тогда $r = 1$, $E = 10/7$, $\mu = 1/7$, $\eta = 10$) для $a = 0.3$, она иллюстрирует сходимость семейства ДД РеМ-3 с $a = \text{const}$ к прямой $\sigma = r\varepsilon$ при $\gamma \rightarrow 0$. Голубая кривая – ДД (8.3) при $\gamma = -0.99$ ($E = 100$, $\mu = 10$, $\eta = 10$) для $a = 0.3$, она иллюстрирует сходимость семейства ДД РеМ-3 с $a = \text{const}$ к ДД модели Фойгта при $\gamma \rightarrow -\beta + 0$.

Для неограниченных ФР, не содержащих $\delta(t)$, свойства ДД в окрестности т. $\varepsilon = 0$ отличаются от свойств ДД как регулярных, так и сингулярных моделей.

На рис. 8 приведены ДД модели со степенной ФР $R(t) = At^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$, $A > 0$: $\sigma(\varepsilon, a) = A(1 - \alpha)^{-1} a^\alpha \varepsilon^{1-\alpha}$. Касательный модуль $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = Aa^\alpha \varepsilon^{-\alpha}$ с ростом α возрастает в окрестности нуля, и ДД взлетает всё выше; мгновенный и длительный модули: $E := \sigma'_\varepsilon(0, a) = \infty$, $E_\infty := \sigma'_\varepsilon(\infty, a) = 0$. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ все ДД не имеют асимптот. При $a \rightarrow 0$ семейство ДД сходится к нулевой функции, а при $a \rightarrow \infty$ – к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$. На рис. 8 приведены ДД с $A = 1$ и разными α . Красные кривые – ДД для $\alpha = 0.9$ (близким к единице) при СД $a = 0.1; 0.5; 1; 2$, синяя – для $\alpha = 0.95$, $a = 1$. Они по очертаниям близки к ДД вязкого элемента (сходимость будет при $\alpha \rightarrow 1$, если $A = \eta(1 - \alpha)$, $\eta = \text{const}$). Голубые кривые – ДД для $\alpha = 0.5$ при СД $a = 0.01; 0.1; 1; 10$, чёрные – для $\alpha = 0.1$ при $a = 10^{\pm n}$, $n = 0; 1; 2; 3$. Стрелками помечены ДД с $a = 1$. При $\alpha \in (0.4; 0.6)$ ДД почти совпадают. При малом α модель становится менее чувствительной к СД, ДД спрямляются и сближаются, угол раствора веера быстро уменьшается, и при $\alpha \rightarrow 0$ он стягивается в единую прямую – ДД упругого элемента $\sigma = E\varepsilon$ (штрих-пунктир) с $E = A = 1$ (а ФР сходится к постоянной A на $(0, \infty)$).

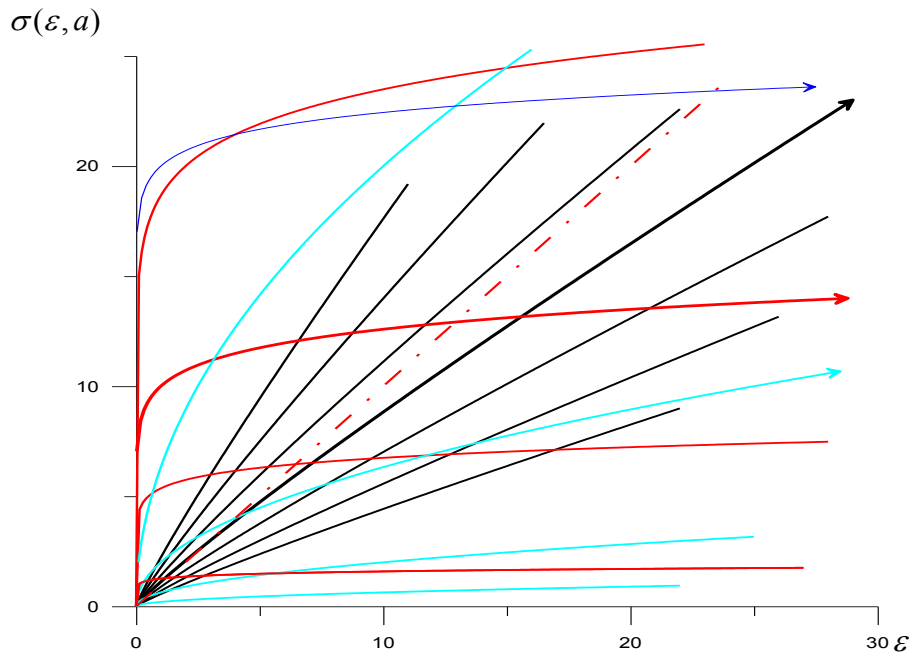


Рис. 8. Диаграммы деформирования моделей со степенной ФР при постоянных СД

9. Диаграммы деформирования при постоянных скоростях нагружения

ДД с постоянной СН получается подстановкой в ОС (1.1) процесса $\sigma = bt$:

$$\varepsilon(\sigma, b) = \int_0^\sigma \Pi(x/b) dx, \text{ или } \varepsilon(\sigma, b) = \Theta(\sigma/b) \sigma, \text{ где } \Theta(t) := t^{-1} \int_0^t \Pi(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (9.1)$$

Осреднение ФП $\Theta(t)$, $t > 0$, - возрастающая непрерывно дифференцируемая функция, $\Theta(t) < \Pi(t)$, ибо $\Pi(t)$ возрастает;

$$\Theta(0+) = \Pi(0+), \quad \Theta(+\infty) = \Pi(+\infty), \quad \dot{\Theta}(0+) = \dot{\Pi}(0+)/2.$$

Можно доказать [44], что всегда $\Theta(t)P(t) > 0.5$ и $P(t)/P(0) + \Theta(t)/\Theta(0) > 2$ при $t > 0$.

Через $\Theta(t)$ выражается секущий модуль: $E_s := \sigma / \varepsilon = \Theta(\sigma/b)^{-1}$.

$\varepsilon'_\sigma(\sigma, b) = \Pi(\sigma/b)$, а касательный модуль равен $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) = \Pi(\sigma/b)^{-1}$.

$\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) > 0$, следовательно, ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ возрастает по ε . Так как ФП возрастает, то $\varepsilon'_\sigma(\sigma, b)$ возрастает по σ и убывает по b , а $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b)$ убывает по ε и возрастает по b . Поэтому для любого $b > 0$ ДД $\varepsilon(\sigma, b)$ выпуклы вниз (как и $\varepsilon(t, b)$), а ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ всегда выпуклы вверх. Семейство ДД (9.1) убывает по b , т.к. $\Theta(\sigma/b)$ убывает с ростом b , а семейство ДД в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ возрастает по b (чем больше СН, тем выше лежит ДД). ДД (9.1) зависит от СН, но начальный (мгновенный) «модуль упругости» (модуль сдвига, объёмный модуль и т.п.) не зависит от СН: $E := \sigma'_\varepsilon(0, b) = \Pi(0)^{-1}$. Любая ДД (9.1) лежит «выше» (по оси ε) прямой $\varepsilon = \Pi(0)\sigma$, так как $\Theta(t) > \Theta(0+) = \Pi(0)$. Соответственно, все ДД в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ лежат ниже (по оси σ) этой прямой.

При СН $b \rightarrow +\infty$ семейство ДД $\varepsilon(\sigma, b)$ любой регулярной модели сходится к прямой $\varepsilon = \sigma / E$ равномерно на любом отрезке оси σ : в силу монотонности,

$$\sup_{[0,S]} |\varepsilon - \sigma / E| = \sup_{[0,S]} \sigma |\Theta(\sigma / b) - \Pi(0)| = s |\Theta(s / b) - \Pi(0)| \rightarrow 0 \text{ при } b \rightarrow \infty,$$

ибо $\Theta(0+) = \Pi(0)$. Поэтому $\sigma = E\varepsilon$ - теоретическая кривая мгновенного деформирования линейного ОС. К ней сходятся и семейство ДД при постоянных СД, и семейство изохронных ТКП.

Если модель не регулярна (т.е. $\Pi(0) = 0$), то $E = \infty$, касательная к любой ДД в нуле вертикальна, семейство ДД (9.1) равномерно сходится при $b \rightarrow \infty$ к прямой $\varepsilon = 0$.

Так как для любой фиксированной СН функция $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b)$ убывает по ε и ограничена снизу, то при $\varepsilon \rightarrow \infty$ существует предел $E_\infty(b)$. Если $\Pi(t)$ ограничена, то $E_\infty = 1/\Pi_\infty = R_\infty := r > 0$; если же ФП не ограничена, то $E_\infty = 0$. Таким образом, длительный модуль $E_\infty = r$ не зависит от СН b . Секущий модуль $E_s := \sigma / \varepsilon = \Theta(\sigma / b)^{-1}$ также стремится к r при $\varepsilon \rightarrow \infty$, поскольку $\Theta(+\infty) = \Pi(+\infty)$.

ДД (9.1) имеет асимптоту тогда и только тогда, когда $\Pi(t)$ ограничена и сходится интеграл $\int_0^{+\infty} [\Pi_\infty - \Pi(\tau)] d\tau := Y$. Тогда любая ДД при постоянной СН имеет асимптоту: $\varepsilon = \Pi_\infty \sigma - bY$, или $\sigma = r\varepsilon + rYb$, $r > 0$ ($r \neq 0$ - в отличие от ДД при постоянных СД). Угловой коэффициент не зависит от СН b , т.е. все асимптоты параллельны.

Этот результат (как и остальные свойства ДД) двойствен критерию существования асимптоты у ДД с постоянной СД, причём угловые коэффициенты асимптот всех ДД совпадают. Модель «стандартного тела» (она эквивалентна параллельному соединению двух моделей Максвелла с разными временами релаксации [44]) – пример (регулярной) модели, чьи ДД при постоянных СН не имеют асимптот, а ДД при постоянных СД имеют (причём – горизонтальные, т.к. $R_\infty = 0$).

Из наличия у ДД (9.1) наклонной асимптоты $\sigma = r\varepsilon + rYb$ следует, что, когда СН $b \rightarrow 0$, семейство ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$, т.е. к ДД упругой модели с модулем $r := E_\infty$. Сходимость равномерна на луче $\varepsilon \geq 0$, так как $\sigma(\varepsilon, b)$ стремится к асимптоте снизу, и потому $|\sigma(\varepsilon, b) - r\varepsilon| \leq brY$.

Для моделей с ФП (2.1) ДД (9.1) имеет вид:

$$\varepsilon(\sigma, b) = 0.5\alpha b^{-1}\sigma^2 + \beta\sigma + \gamma\lambda^{-1}b(1 - e^{-\lambda\sigma/b}), \quad \sigma > 0. \quad (9.2)$$

Для модели «стандартного тела» (РеМ-4) $\alpha \neq 0$ и $-\beta < \gamma < 0$, $\Pi(t)$ не ограничена, и ДД не имеют асимптот. Случай $\gamma > 0$ приводит к нарушению ограничения $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$. При $\alpha = 0$ и $-\beta < \gamma < 0$ (РеМ-3) $\Pi(t)$ ограничена, $Y = -\gamma / \lambda$, и ДД имеет асимптоту $\varepsilon = \beta\sigma + \gamma\lambda^{-1}b$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Поскольку $\Pi(0) = \beta + \gamma$, то (2.1) порождает сингулярные модели тогда и только тогда, когда $\gamma = -\beta$. При $\alpha > 0$ (2.1) порождает все сингулярные трёхзвенные модели (с ФР $R(t) = \eta\delta(t) + Ae^{-\nu t}$). У них модуль Юнга $\sigma'_\varepsilon(0+, b) = \infty$ (т.к. $\Pi(0) = 0$), асимптот у ДД при постоянных СН нет (т.к. $\Pi_\infty = \infty$), а у ДД при постоянных СД есть (горизонтальные, т.к. $R_\infty = 0$ и интеграл I сходится).

Для модели РеМ-3

$$\Pi(t) = \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad R(t) = r + A e^{-\mu t}, \quad \mu = \beta \lambda / (\beta - \gamma), \quad r = \beta^{-1}, \quad A = \gamma \beta^{-1} (\beta - \gamma)^{-1};$$

$$\Pi(0) = \beta - \gamma, \quad \Pi(\infty) = \beta, \quad R(0) = (\beta - \gamma)^{-1}, \quad E_{\infty} = R(\infty) = r = \beta^{-1} > 0; \quad \lambda / \mu = \Pi(0) / \Pi(\infty).$$

ДД РеМ-3 при постоянной СД задаётся уравнением (8.3), её асимптота при $\sigma \rightarrow \infty$ - $\sigma = r\varepsilon + A\mu^{-1}a$, или $\sigma = \beta^{-1}\varepsilon + \gamma\beta^{-2}\lambda^{-1}a$. ДД при постоянной СН:

$$\varepsilon(\sigma, b) = \beta\sigma - \gamma\lambda^{-1}b(1 - e^{-\lambda\sigma/b}) \quad (9.3)$$

ДД (9.3) имеет асимптоту $\varepsilon = \beta\sigma - \gamma\lambda^{-1}b$, или $\sigma = \beta^{-1}\varepsilon + \gamma\lambda^{-1}\beta^{-1}b$. Для СН $b = E_{\infty}a = ra$ асимптоты ДД при постоянных СН и СД совпадают. Для СН $b = Ea = (\beta - \gamma)^{-1}a$ асимптота ДД (9.3) $\sigma = \beta^{-1}\varepsilon + \gamma\lambda^{-1}\beta^{-1}(\beta - \gamma)^{-1}a$ лежит выше, чем асимптота ДД (8.3).

На рис. 9 приведены ДД (8.3) и (9.3) моделей РеМ-3 с $\lambda = 0.1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.9$ (тогда $\mu = 1$, $E = 10$, $r := A = 1$) при постоянных СД $a = 0.1; 0.2; 0.3$ (чёрные штриховые) и постоянных СН: чёрным – при $b = ra$ (когда ДД (8.3) и (9.3) имеют общие асимптоты $\sigma = \varepsilon + 9a$), а голубым – при $b = Ea = 10a$ (асимптоты ДД (9.3): $\sigma = \varepsilon + 90a$). Прямая $\sigma = E\varepsilon$ (красный штрих-пунктир) – мгновенная ДД, к которой сходятся снизу оба семейства ДД РеМ-3 (8.3) и (9.3) при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$. Розовые кривые – ДД модели Максвелла ($r = 0$, $\gamma = 0$) с такими же $\mu = 1$ и $E = 10$ (т.е. с $\alpha = \beta = 0.1$) при $a = 0.1$ и $b = Ea = 1$; асимптота ДД при постоянной СД (штриховая кривая) горизонтальна, т.к. $r = 0$ ($\sigma = A\mu^{-1}a$), а ДД при постоянных СН не имеют асимптот. Основные отличия РеМ-3 от модели Максвелла (РеМ-2) и РеМ-4 – ограниченная ФП, ненулевой длительный модуль $R(\infty) = r$, наличие наклонных асимптот у ДД при постоянных СН (9.3).

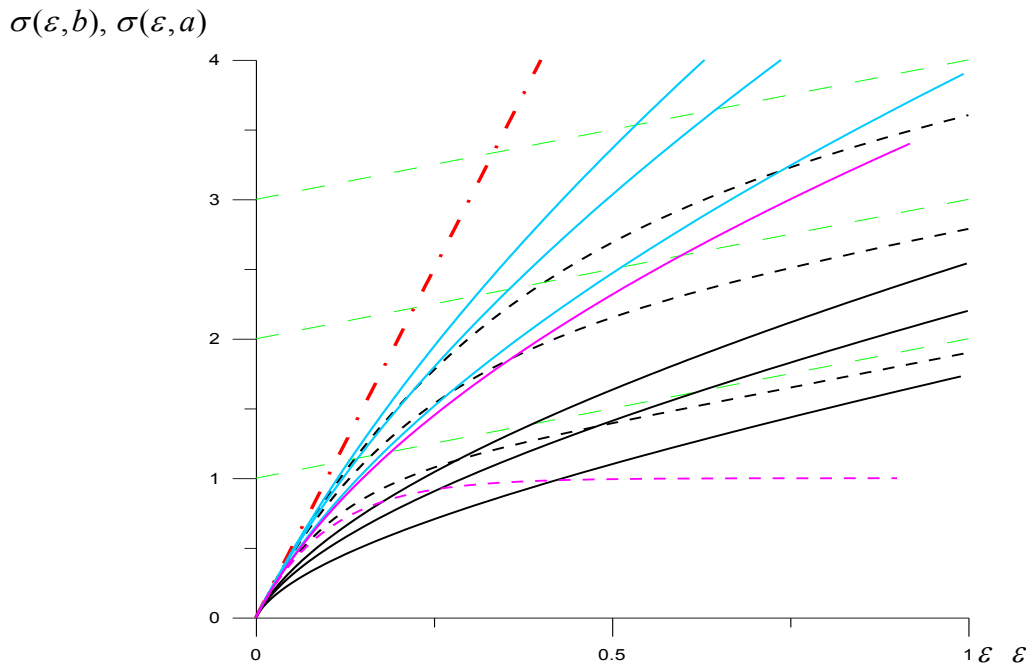


Рис. 9. Диаграммы деформирования РеМ-3 при постоянных СД и СН

На рис. 10 приведены ДД при СН $b = 1; 2; 3$ и при СД $a = 4; 8; 12$ (штриховые кривые) для сингулярной трёхзвенной модели вида (2.1) с $-\gamma = \beta = 1$, $\lambda = 1$ и двумя значениями α : чёрные кривые для $\alpha = 1$ (тогда $\Pi(t) = \alpha t + \beta - \beta e^{-\lambda t}$, $R(t) = \eta \delta(t) + A e^{-\nu t}$, $\nu = 0.5$, $\eta = 0.5$, $A = \beta \lambda^2 \eta^2 = 0.25$), синие – для $\alpha = 10$ (тогда $\nu = \frac{10}{11}$, $\eta = \frac{1}{11}$, $A = \frac{1}{121}$). Стрелками помечены ДД с $b = 1$. При достаточно больших ε любая ДД при постоянной СН лежит выше любой ДД при постоянной СД (последние имеют асимптоты $\sigma = a / \alpha$, а первые растут неограниченно). При малых ε , наоборот, любая ДД при постоянной СД имеет вертикальный участок ($\sigma(0, a) = \eta a$) и лежит выше любой ДД при постоянной СН (для них $\sigma(0, b) = 0$, $\sigma'_\varepsilon(0, b) = +\infty$). При $\alpha \rightarrow 0$ (тогда $\nu \rightarrow 0$, $A \rightarrow \beta^{-1}$, $\eta \rightarrow \beta \lambda^{-1}$) оба семейства ДД СиМ-3 сходятся (снизу) к ДД модели Фойхта при тех же СН и СД. Красные кривые – ДД модели Фойхта ($\alpha = 0$) при $b = 1; 2; 3$.

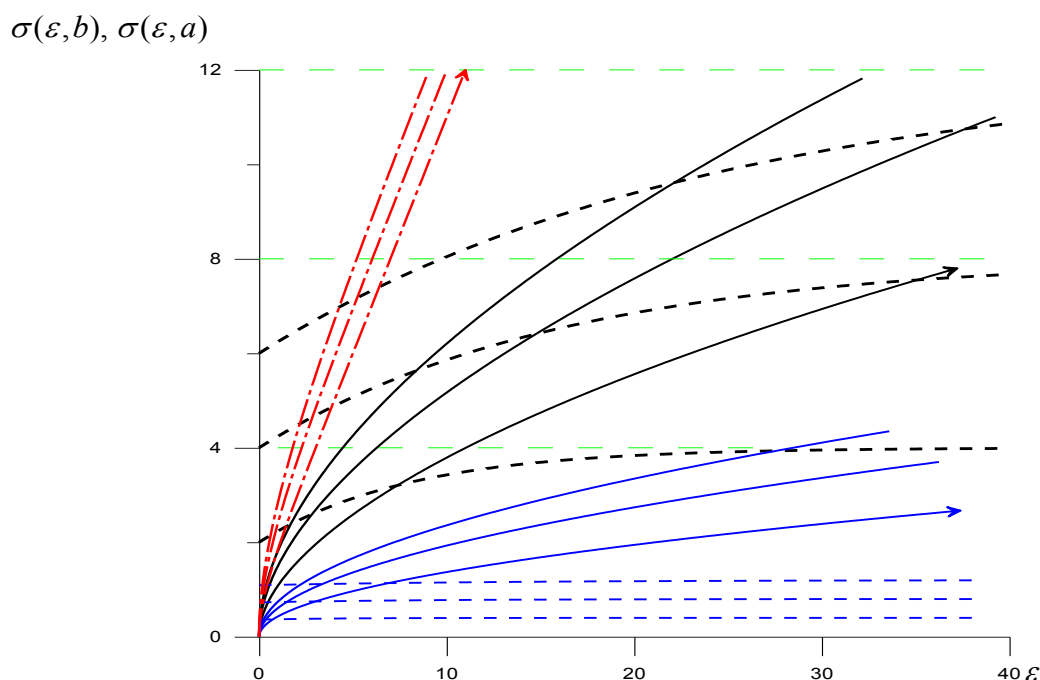


Рис. 10. Диаграммы деформирования СиМ-3 при постоянных СД и СН

10. Сравнение свойств семейств диаграмм деформирования при постоянных скоростях нагружения и деформирования

Выше были обнаружены многие качественные сходства между ДД при постоянных СД и СН (8.1) и (9.1). В частности, доказано, что: 1) каждая ДД $\sigma = y(\varepsilon, a)$ и $\sigma = z(\varepsilon, b)$ (для любых фиксированных СД a и СН b) возрастает и выпукла вверх при всех $\varepsilon \geq 0$, её кривизна $\kappa(\varepsilon)$ убывает и $\kappa(\infty) = 0$; 2) все они имеют одну и ту же касательную $\sigma = E\varepsilon$ в т. $\varepsilon = 0$; 3) при $a \rightarrow \infty$ или $b \rightarrow \infty$ оба семейства ТДД монотонно сходятся (снизу) к одной и той же прямой $\sigma = E\varepsilon$ (кривой мгновенного деформирования); 4) при $a, b \rightarrow 0$ се-

мейства ДД сходятся (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$, $r = R(\infty)$; 5) длительный модуль (предел $y'_\varepsilon(\varepsilon, a)$ или $z'_\varepsilon(\varepsilon, b)$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$) не зависит от СД и СН: $E_\infty = R_\infty = 1/\Pi_\infty$; 6) предельное значение секущего модуля $E_s := \sigma/\varepsilon$ для любой ТДД также равно E_∞ .

Были отмечены и несколько различий между ДД (8.1) и (9.1). В частности, ДД при постоянной СН $\sigma = z(\varepsilon, b)$ никогда не обладает горизонтальной асимптотой, а ДД (8.1) обладает, если $r = 0$. Модель Максвелла и РеМ-4 – примеры (регулярных) моделей, чьи ДД при постоянных СН не имеют асимптот (т.к. $\Pi(\infty) = \infty$), а ДД при постоянных СД имеют (горизонтальные). Аналогичным свойством обладает и СиМ-3 (но не СиМ-4).

Главное отличие состоит в том, что общее уравнение ДД при постоянной СД (8.1) выражается через функцию релаксации и в явном виде $\sigma = y(\varepsilon, a)$ даёт σ как функцию ε , а ДД при постоянной СН (9.1) выражается через функцию ползучести и явно представляется только в форме $\varepsilon = g(\sigma, b)$, а не $\sigma = z(\varepsilon, b)$.

Отсюда следует принцип суперпозиции ДД: при параллельном соединении моделей суммируются их ДД при постоянной СД (8.1) (ибо складываются ФР и их осреднения), а при последовательном соединении моделей суммируются их ДД при постоянной СН (9.1) (ибо складываются ФП и их осреднения). Этим способом можно быстро выписать уравнения ДД многих классических моделей, включая обобщённые модели Максвелла и Фойгта, минуя вычисление осреднений их ФР и ФП и даже не выписывая их ФР и ФП.

Другое следствие: ДД с постоянной СН (9.1) всегда выходит из нуля: $z(0+, b) = 0$, поскольку $\varepsilon = \Theta(\sigma/b)\sigma$ и всегда $\Theta(0+) = \Pi(0) < \infty$, а ДД с постоянной СД (8.1) – не всегда: возможен случай $y(0+, a) \neq 0$. Если $R(0+) < \infty$, то $P(0+) = R(0+)$ и $y(0+, a) = 0$. Но если модель сингулярна, т.е. $R(t) = R_r(t) + \eta\delta(t)$, где $R_r(0) < \infty$ (т.е. модель получена параллельным присоединением вязкого элемента к некоторой регулярной), то соответствующая ДД – сумма регулярной ДД (с $y_r(0, a) = 0$) и ДД вязкого элемента $\sigma = \eta a$, и поэтому $y(+0, a) = \eta a > 0$. Если же ФР не содержит дельта-функции, но неограничена и имеет при $t \rightarrow 0$ асимптотику

$$R(t) \sim At^{-\alpha} \text{ с } \alpha \in (0; 1), \text{ то } y'_\varepsilon(\varepsilon, a) \sim A(\varepsilon/a)^{-\alpha}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, интеграл для осреднения ФР сходится, $P(t) \sim Bt^{-\alpha}$, и ДД имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотику $y \sim Ba^\alpha \varepsilon^{1-\alpha}$; поэтому $y(0+, a) = 0$, а $E := y'_\varepsilon(0+, a) = +\infty$. При параллельном соединении моделей, чьи ДД обладают свойством $y(0, a) = 0$, оно, очевидно, сохраняется (как и свойство $E = \infty$).

Отсутствие общего явного представления $\sigma = z(\varepsilon, b)$ для ДД при постоянной СН (даже для модели Фойгта уравнение $\varepsilon = g(\sigma, b)$ не удаётся разрешить относительно σ) затрудняет сравнение количественных характеристик ДД.

Тем не менее, можно доказать [44], что у любой регулярной модели ДД при постоянной СД $\sigma = y(\varepsilon, a)$ целиком лежит ниже ДД при постоянной СН $\sigma = z(\varepsilon, b)$ для СН

$b = Ea$ (естественно сравнивать ДД для СД и СН, связанных линейно упругой зависимостью), причём разность $z(\varepsilon, Ea) - y(\varepsilon, a)$ возрастает по ε (рис.9). Точнее, для любой регулярной ФР (отличной от постоянной) и любой СД $a > 0$ справедливы неравенства

$$z(\varepsilon, Ea) > y(\varepsilon, a) \text{ и } z'_\varepsilon(\varepsilon, Ea) > y'_\varepsilon(\varepsilon, a) \text{ для всех } \varepsilon > 0$$

Доказательство опирается на следующую лемму [44].

Лемма. Для любых дифференцируемых монотонных (в частности – для допустимых) ФР и ФП линейных ОС вязкоупругости с $R(0+) < \infty$ выполняется неравенство $\Pi(t)R(t) < 1$ при $t > 0$.

Если ФР имеет особенность в $t = 0$, ДД могут вести себя иначе, и утверждения, доказанные для РеМ, могут не выполняться. Для ДД любой сингулярной модели при малых ε всегда выполняется обратное неравенство $z(\varepsilon, b) < y(\varepsilon, a)$ для любых СД и СН, ибо $y(0+, a) = \eta a > 0$, а $z(0, b) = 0$. На рис. 10 это можно наблюдать у ДД СиМ-3; однако, при больших ε любая ДД при постоянной СН лежит выше любой ДД при постоянной СД (т.к. последние имеют горизонтальные асимптоты, а первые растут неограниченно).

Для неограниченных ФР, не содержащих δ -сингулярности, тоже $z(\varepsilon, b) < y(\varepsilon, a)$ при малых ε (у таких моделей $y(0+, a) = 0$, но $y'_\varepsilon(0+, a) = \infty$ и $z'_\varepsilon(0+, a) = \infty$). Специфика семейств ДД моделей с неограниченной ФР рассмотрена в [44,63]. В [44,62,63] детально изучены свойства семейств теоретических диаграмм деформирования (и произведения ФР и ФП) для всех (регулярных и сингулярных) трёх- и четырёхзвенных структурных реологических моделей и моделей с неограниченными степенными ФР.

11. О невозможности моделирования в рамках линейной теории материалов с диаграммой, имеющей максимум или участки выпуклости вниз

Выше было доказано, что ТДД линейного ОС вязкоупругости (1.1) при постоянных СН и СД $\sigma(\varepsilon, b)$ и $\sigma(\varepsilon, a)$ всегда возрастают и выпуклы вверх при любых фиксированных СН и СД, поскольку ФР и ФП положительны и монотонны при $t \geq 0$. Нельзя ли ослабить ограничения на ФР и ФП с целью моделирования ЭДД других типов?

Нарушение выпуклости ТДД при постоянных СН (9.1) может быть вызвано (т.к. $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) = \Pi(\sigma/b)^{-1}$) лишь наличием участка убывания у ФП, т.е. наличием участка убывания деформации на кривой ползучести (4.1). Это никогда не наблюдается в экспериментах. Значит, линейное ОС (1.1) принципиально не может описывать материалы, у которых ТДД $\sigma(\varepsilon, b)$ имеет участки выпуклости вниз.

Нарушение монотонности ТДД (9.1) может быть вызвано лишь тем, что где-то нарушается условие $\Pi(t) > 0$ при $t > 0$, т.е. у всех ТКП с $\sigma > 0$ появляется участок, где деформация вдруг становится отрицательной. Наличие на какой-нибудь ТДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ всего одной точки с горизонтальной касательной (даже при сохранении возрастания) рав-

носительно тому, что существует точка $\hat{t}$, в которой $\Pi(\hat{t}) = +\infty$, т.е. ФП имеет вертикальную асимптоту $t = \hat{t}$. Тогда нарушается условие выпуклости вверх ФП, и на кривых обратной ползучести (при $\sigma(t) \equiv 0$) появляется участок неограниченного возрастания. Это, конечно, лежит за гранью допустимого.

Нарушение выпуклости ТДД при постоянных СД (8.1) (т.к. $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(\varepsilon / a)$) может быть вызвано только наличием участка возрастания у ФР $R(t)$, а значит, и у всех ТКР (4.1). Но возрастание ЭКР никогда не наблюдается в испытаниях химически стабильных материалов. Потому ОС линейной вязкоупругости принципиально не может описывать материалы, у которых ТДД $\sigma(\varepsilon, a)$ выпукла вниз (каучук, эластомеры и т.п.) или имеет точки перегиба (связки, сухожилия).

Нарушение монотонности ТДД (8.1), может быть вызвано лишь тем, что где-то нарушается условие $R(t) > 0$, т.е. у всех ТКР с постоянной деформацией $\varepsilon > 0$ появляется участок, где напряжение вдруг становится отрицательным. Но этого никогда не наблюдается в экспериментах. Потому *ОС линейной вязкоупругости не может описывать материалы с падающей диаграммой*.

Наличие на какой-нибудь ТДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ всего одной точки с горизонтальной касательной (при сохранении возрастания ТДД) равносильно тому, что существует точка t_0 , в которой $R(t_0) = 0$ (т.е. полная релаксация происходит за конечное время). Тогда должно быть $R(t) \equiv 0$ при $t > t_0$ и, в силу (8.1), любая ТДД $\sigma(\varepsilon, a)$ будет иметь горизонтальный участок (площадку текучести): $\sigma(\varepsilon, a) = \bar{\sigma}$ при $\varepsilon > \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 := at_0$, $\bar{\sigma} = P(\varepsilon_0 / a) \varepsilon_0 = at_0 P(t_0) = Ca$ - линейно зависит от СД, C - площадь под графиком ФР. На первый взгляд, такие финитные функции релаксации допустимы. Однако, можно доказать [44], что ФП, ассоциированная с такой ФР в силу условия взаимной обратности операторов (1.2), не удовлетворяет ограничению $\ddot{\Pi}(x) \leq 0$ (это влечёт наличие интервала возрастания на кривой обратной ползучести). Это означает, что модели с финитной ФР не допустимы.

12. Общие свойства семейства кривых ползучести при кусочно постоянном нагружении: асимптотика и критерий затухания памяти

Эксперименты на ползучесть при ступенчатом нагружении (с кусочно-постоянным напряжением) – важный вид квазистатических испытаний, позволяющий уловить и обследовать разные аспекты поведения материала, детали реализации многих эффектов, собрать более богатую информацию для идентификации и верификации моделей и выявления лучшей из них по сравнению с кривыми ползучести (КП) при постоянном напряжении (такие КП все модели описывают адекватно при правильной настройке). Цель данного параграфа – изучение общих свойств семейств теоретических КП при ступенчатом нагружении, порождаемых линейным ОС (1.1). Их детальное исследование в общем виде и даже

краткий перечень, к сожалению, отсутствуют в монографиях и обзорах по вязкоупругости, ползучести и механике полимеров, в частности, в [1-36,43,68-82].

В силу линейности и инвариантности относительно сдвигов оператора (1.1), он переводит кусочно постоянную программу нагружения с n ступеньками

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i [h(t-t_{i-1}) - h(t-t_i)] + \sigma_n h(t-t_{n-1}) \quad (12.1)$$

(полагаем, что $t_0 = 0$ и $t_i > t_{i-1}$) в сумму откликов на каждую ступеньку в отдельности:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i S(t-t_{i-1}; t_i-t_{i-1}) + \sigma_n \Pi(t-t_{n-1}) h(t-t_{n-1}), \quad t > 0, \quad (12.2)$$

где $S(t; T) := \Pi(t) h(t) - \Pi(t-T) h(t-T)$ – отклик на единичную ступеньку напряжения с носителем $[0, T]$. КП (12.2) можно представить в виде суммы влияний скачков напряжения $\hat{\sigma}_i := \sigma_{i+1} - \sigma_i$ (считаем, что $\sigma_0 := 0$) в точках t_i :

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\sigma}_i \Pi(t-t_i) h(t-t_i), \quad t > 0, \quad \text{или} \quad \varepsilon(t) = \sigma_1 \Pi(t) + \sum_{k=1}^i \hat{\sigma}_k \Pi(t-t_k), \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (12.3)$$

Скачки деформации (12.3) и её производной $\dot{\varepsilon}$ в т. t_i вычисляются по (1.3):

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{\sigma}_i \Pi(0), \quad \dot{\hat{\varepsilon}}_i = \Pi(0) \hat{\sigma}_i + \dot{\Pi}(0) \hat{\sigma}_i = \dot{\Pi}(0) \hat{\sigma}_i, \quad (12.4)$$

Так как для произвольной допустимой ФП (дифференцируемой, возрастающей, выпуклой вверх при $t > 0$) $S(t; T) \rightarrow \nu$ при $t \rightarrow \infty$, $\nu := \dot{\Pi}(\infty)$ (см. п.6), то из (12.2) следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\varepsilon(t) = \sigma_n \Pi(t-t_{n-1}) + s_+ + o(1), \quad (12.5)$$

$$s_+ := \nu \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i (t_i - t_{i-1}). \quad (12.6)$$

Если $\sigma_n = 0$ (полная разгрузка при $t > t_{n-1}$), то $\varepsilon(t) \rightarrow s_+$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. КП (12.2) имеет горизонтальную асимптоту, а s_+ приобретает смысл остаточной деформации (после снятия нагрузки и завершения восстановления при $t \rightarrow \infty$). Из (12.6) следует, что условие $\nu = 0$ обеспечивает полное восстановление при $t \rightarrow \infty$.

Если $\sigma_n \neq 0$, но $\nu = 0$, то $s_+ = 0$, и потому при $t \rightarrow \infty$ имеем: $\varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t-t_{n-1}) \rightarrow 0$, $\varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t) \rightarrow 0$, $\Pi(t) - \Pi(t-t_{n-1}) \rightarrow 0$. В частности, $\nu = 0$, если $\Pi(t)$ ограничена (как у всех моделей СиМ-2k и РеМ-(2k+1)); в этом случае $s_+ = 0$ и $\varepsilon(t) \rightarrow \sigma_n \Pi_\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Если $\Pi(t)$ не ограничена и $\sigma_n \neq 0$, то $\varepsilon(t) \sim \sigma_n \Pi(t-t_{n-1})$ и $|\varepsilon(t)|$ неограниченно возрастает.

Если $\nu \neq 0$ (как у РеМ-2k и СиМ-(2k+1), $k \in \mathbb{N}$) и $\sigma_n \neq 0$, то

$$\varepsilon(t) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad \sigma_n (\Pi(t) - \Pi(t-t_{n-1})) \rightarrow \sigma_n \nu t_{n-1} \neq 0, \quad \varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t-t_{n-1}) \rightarrow s_+$$

(значение s_+ может быть любым, но, если все $\sigma_i \geq 0$ и хотя бы одно $\sigma_k > 0$, то и $s_+ > 0$), а $\varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t)$, вообще говоря, не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если у ФП есть наклонная

асимптота, т.е. существует $\lim(\Pi(t) - vt) = b$ при $t \rightarrow \infty$), то КП (12.2) имеет асимптоту $\varepsilon = \sigma_n[v(t - t_{n-1}) + b] + s_+$ (например, РеМ-4 с ФП (2.1) и $v = \alpha$). Отметим, что, если все $\sigma_i \geq 0$ для $i < n$, то отклонение $\varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t - t_{n-1})$ убывает на луче $t > t_{n-1}$, т.к. все слагаемые в (12.2), кроме последнего, убывают по t при $t > t_i$.

Условие $v = 0$ на ФП необходимо и достаточно для затухания памяти при ступенчатом нагружении. Если $v > 0$ (как, например, у моделей Максвелла и стандартного тела), то память модели не затухает, ибо след (остаточная деформация (12.6)), оставленный одним или несколькими прямоугольными импульсами нагрузки (одного знака), не стирается никогда. Если $v > 0$, то при циклическом импульсном нагружении (с коэффициентом асимметрии цикла равным нулю и произвольным временем отдыха между импульсами нагружения) происходит неограниченное нарастание пластической деформации (ratcheting). Если же $v = 0$ – то деформация ограничена и стабилизируется (в этом случае ОС (1.1) моделирует «приспособляемость» материала, «shakedown»).

В работах [45,65] исследованы свойства кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения (НС) и условия независимости их асимптотики от НС (её длительности и программы нагружения); в частности, доказано, что условие $v = 0$ обеспечивает затухание влияния НС с течением времени (стремление к нулю отклонения от КП при мгновенном нагружении), т.е. является *критерием затухания памяти* при ползучести. Если $v = 0$, то для любой кусочно непрерывной функции $\bar{\sigma}(t)$ с финитным носителем образ $\bar{\varepsilon} = \Pi \bar{\sigma}$ будет обладать свойством $\bar{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, поскольку это верно для любой ступенчатой функции с финитным носителем, а такими функциями можно равномерно аппроксимировать любую кусочно непрерывную. Тогда $\Pi[\sigma + \bar{\sigma}] - \Pi\sigma = \Pi\bar{\sigma} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. возмущение с финитным носителем вызывает затухающее отклонение отклика (не меняет асимптотики отклика, если $\Pi\sigma \neq o(1)$).

Анализ свойств кривых релаксации с произвольной начальной стадией деформирования [65,46] показал, что затухание памяти *при релаксации* имеет место всегда, т.е. не требует дополнительных ограничений на функцию релаксации (см. п.7).

Из (12.2) и (12.5) следует ещё одно важное свойство КП (12.2) с произвольным количеством ступеней нагружения $n > 2$ для произвольной допустимой функции ползучести (возрастающей, выпуклой вверх) с любым $v \geq 0$:

Утверждение. Если у двух программ ступенчатого нагружения с $n > 2$ одинаковы конечные уровни напряжения σ_n и моменты их приложения t_{n-1} , то:

- 1) разность откликов (КП (12.2)) $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$ не зависит от σ_n ,
- 2) она стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда значения параметра (12.6) у двух программ нагружения одинаковы.

В частности, для программ, полученных любой перестановкой ступеней нагружения, кроме последней, параметр (12.6) (остаточная деформация) одинаков, и потому разность откликов (КП (12.2)) на эти программы всегда стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ (даже при $v \geq 0$). Это свойство обнаружено и детально исследовано в [57,64]; оно названо асимптотической коммутативностью ОС (1.1) при ступенчатом нагружении.

Для иллюстрации общих свойств КП (12.2) при ступенчатом нагружении (12.1) рассмотрим случай $n = 2$. Тогда при $t > t_1$ (когда $\sigma(t) = \sigma_2$) имеем:

$$\varepsilon(t) = \sigma_1 \Pi(t) + (\sigma_2 - \sigma_1) \Pi(t - t_1) = \sigma_1 S(t; t_1) + \sigma_2 \Pi(t - t_1) = \sigma_2 \Pi(t) + (\sigma_1 - \sigma_2) S(t; t_1), \quad (12.7)$$

$S(t; t_1) = \Pi(t) - \Pi(t - t_1)$. Для КП (12.7) с $\sigma_1 > 0$ всегда $\varepsilon(t) > \sigma_2 \Pi(t - t_1)$ и $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t - t_1)$ убывает; $\varepsilon(t) > \sigma_2 \Pi(t)$ при $\sigma_2 < \sigma_1$ и $\sigma_2 \Pi(t - t_1) < \varepsilon(t) < \sigma_2 \Pi(t)$ при $\sigma_2 > \sigma_1$ (см. рис. 11).

Т.к. $S(t; t_1) \rightarrow vt_1 \geq 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $s_+ := v\sigma_1 t_1$, то КП (12.7) имеет асимптотику

$$\varepsilon(t) = \sigma_2 \Pi(t - t_1) + \sigma_1 vt_1 + o(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{или} \quad \varepsilon(t) = \sigma_2 \Pi(t) + (\sigma_1 - \sigma_2) vt_1 + o(1) \quad (12.8)$$

Если $v = 0$, то при $t \rightarrow \infty$: $\Pi(t) - \Pi(t - t_1) \rightarrow 0$, $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t - t_1) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) \rightarrow 0$, т.е. (12.7) стремится к КП для уровня напряжения σ_2 (модель забывает про нагрузку при $t < t_1$). Если ФП ограничена, то $v = 0$ и $\varepsilon(\infty) = \sigma_2 \Pi(\infty)$, т.е. КП имеет горизонтальную асимптоту.

Если $v \neq 0$ (тогда $\Pi(\infty) = \infty$) и $\sigma_2 \neq 0$, то при $t \rightarrow \infty$: $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t - t_1) \rightarrow s_+$, где $s_+ = v\sigma_1 t_1$ ($s_+ > 0$ при $\sigma_1 > 0$) $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) \rightarrow v(\sigma_1 - \sigma_2)t_1 \neq 0$, т.е. оба отклонения не стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, и $\Pi(t) - \Pi(t - t_1) \rightarrow vt_1 \neq 0$.

Например, у модели Максвелла ($\Pi = \alpha t + \beta$) $v = \alpha \neq 0$, и КП (12.7):

$$\varepsilon(t) = \sigma_2 [\alpha(t - t_1) + \beta] + \alpha \sigma_1 t_1 = \sigma_2 [\alpha t + \beta] + (\sigma_1 - \sigma_2) \alpha t_1.$$

Эта КП линейна по t , возрастает при $\sigma_2 > 0$, отличается от $\sigma_2 \Pi(t - t_1)$ на постоянную $s_+ = \alpha \sigma_1 t_1$, а от $\sigma_2 \Pi(t)$ – на $(\sigma_1 - \sigma_2) \alpha t_1$. Модель Максвелла (как и все РеМ-2k и СиМ-(2k+1), $k \in \mathbb{N}$) бесконечно долго помнит о нагрузке σ_1 при $t < t_1$.

На рис.11,а приведены КП РеМ-4 ($\Pi = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}$) с $\alpha = 0.01$, $\beta = 2$, $\gamma = 1.5$, $\lambda = 0.1$ для $t_1 = 10$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1; 1.25; 1.5$ (чёрные КП для $\sigma_2 \geq \sigma_1$) и $\sigma_2 = 0.75; 0.5; 0.25; 0.0$ (синие КП для $\sigma_2 < \sigma_1$). Т.к. $\Pi(0) = \beta - \gamma \neq 0$, то в т. $t = t_1$ КП имеют разрыв первого рода. Для РеМ-4 $v = \alpha \neq 0$, $s_+ = \alpha \sigma_1 t_1$; при $t \rightarrow \infty$ КП имеют асимптоту $\varepsilon = \sigma_2 [\alpha(t - t_1) + \beta] + \alpha \sigma_1 t_1$, $\sigma_2 (\Pi(t) - \Pi(t - t_1)) \rightarrow \sigma_2 \alpha t_1 \neq 0$ и $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t - t_1) \rightarrow \sigma_1 \alpha t_1 \neq 0$. Красные штриховые линии – обычная КП $\varepsilon = \sigma_2 \Pi(t)$ и её сдвиг $\varepsilon = \sigma_2 \Pi(t - t_1)$ для $\sigma_2 = 1.5$, зелёные прямые – их асимптоты. Розовая штриховая КП – КП $\varepsilon = \sigma_2 \Pi(t)$ для $\sigma_2 = 0.5$.

На рис.11,б – КП модели Максвелла с $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$ для $t_1 = 10$, $\sigma_1 = 1$ и тех же σ_2 . Красные штриховые прямые – обычная КП $\varepsilon = \sigma_2 \Pi(t)$ и $\varepsilon = \sigma_2 \Pi(t - t_1)$ для $\sigma_2 = 1.5$.

На рис. 11,в – КП для РеМ-3 ($\Pi(t) = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$, $\gamma \in (0; \beta)$) с $\beta = 2$, $\gamma = 1.5$, $\lambda = 0.1$ для $t_1 = 10$, $\sigma_1 = 1$ и тех же $\sigma_2 = 1; 1.25; 1.5$ (чёрные КП для $\sigma_2 \geq \sigma_1$) и $\sigma_2 = 0.75; 0.5; 0.25; 0.0$ (синие КП для $\sigma_2 < \sigma_1$). Для РеМ-3 $v = 0$, и потому $\Pi(t) - \Pi(t - t_1) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и каждая КП имеет горизонтальную асимптоту $\varepsilon = \sigma_2 \beta$.

На рис. 11,г б – КП для модели Фойгта: $\Pi(t) = \beta - \beta e^{-\lambda t}$ с $\beta = 1.5$, $\lambda = 0.1$ для $t_1 = 10$, $\sigma_1 = 1$, и тех же значений σ_2 : $\sigma_2 = 1; 1.25; 1.5$ (чёрные КП) и $\sigma_2 = 0.75; 0.5; 0.25; 0.0$ (синие КП для $\sigma_2 < \sigma_1$). КП модели Фойгта отличаются от КП РеМ-3 лишь тем, что $\Pi(0) = 0$, и потому в т. $t = t_1$ все КП непрерывны (по (12.4)). Для СиМ-2 тоже $v = 0$, и, значит, $\sigma_2(\Pi(t) - \Pi(t - t_1)) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$; все КП имеют асимптоту $\varepsilon = \sigma_2 \beta$.

На рис. 11,д приведены КП для ФП $\Pi(t) = At^u$ с $A = 0.5$, $u = 0.5$ для $t_1 = 10$, $\sigma_1 = 1$ и тех же значений σ_2 . Т.к. $\Pi(0) = 0$, то в т. $t = t_1$ все КП не имеют разрыва. Т.к. $\dot{\Pi}(t) = uAt^{u-1}$, то (в силу (12.4)) у всех КП $\dot{\Pi}(t_1 + 0) = \pm\infty$ (знак совпадает с $\text{sgn}(\sigma_2 - \sigma_1)$). Для любого $u < 1$, очевидно, $v = 0$, и потому $\sigma_2(\Pi(t) - \Pi(t - t_1)) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (точнее, $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) = (\sigma_1 - \sigma_2)[uAt_1 t^{u-1} + O(t^{u-2})]$).

На рис. 11,е – КП для ФП $\Pi(t) = A \arctg \lambda t + c$ с $A = 1$, $c = 0.5$, $\lambda = 0.1$ для $t_1 = 5$, $\sigma_1 = 1$ и тех же значений σ_2 . Т.к. $\Pi(0) \neq 0$, то в т. $t = t_1$ все КП имеют разрывы. $v = 0$, $\sigma_2(\Pi(t) - \Pi(t - t_1)) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, все КП имеют асимптоту $\varepsilon = \sigma_2 A \pi / 2$.

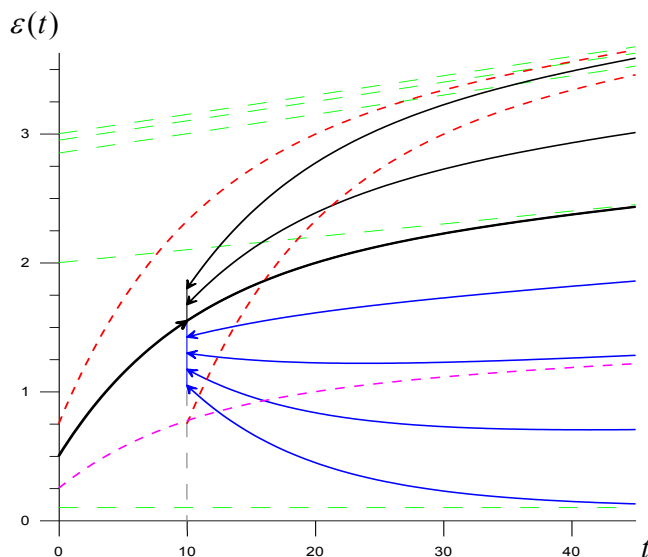


Рис. 11,а. КП модели стандартного тела, или РеМ-4.

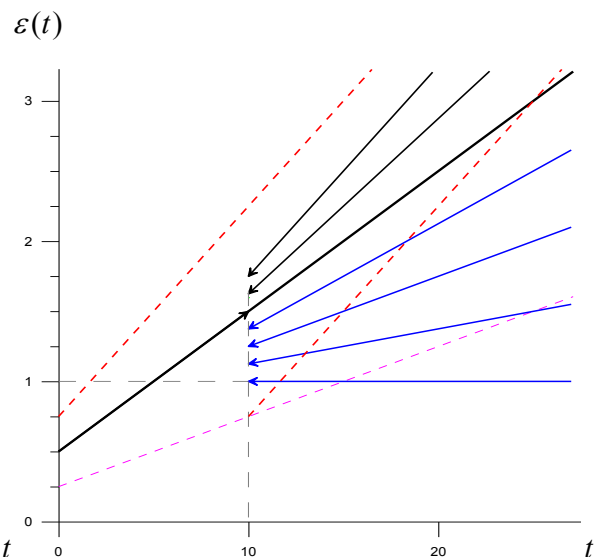


Рис. 11,б. КП модели Максвелла, или РеМ-2.

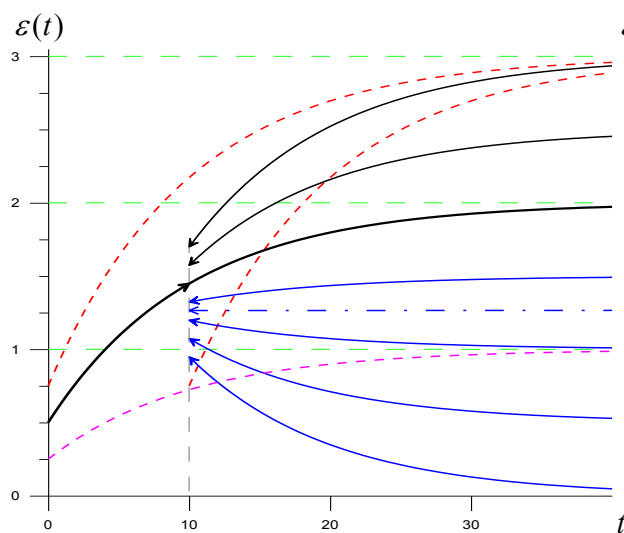


Рис. 11,в. КП модели Кельвина, или Рем-3.

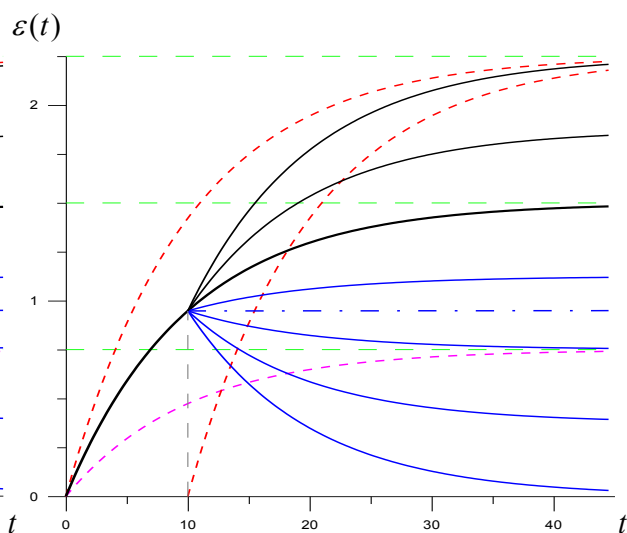


Рис. 11,г. КП модели Фойгта, или Сим-2.

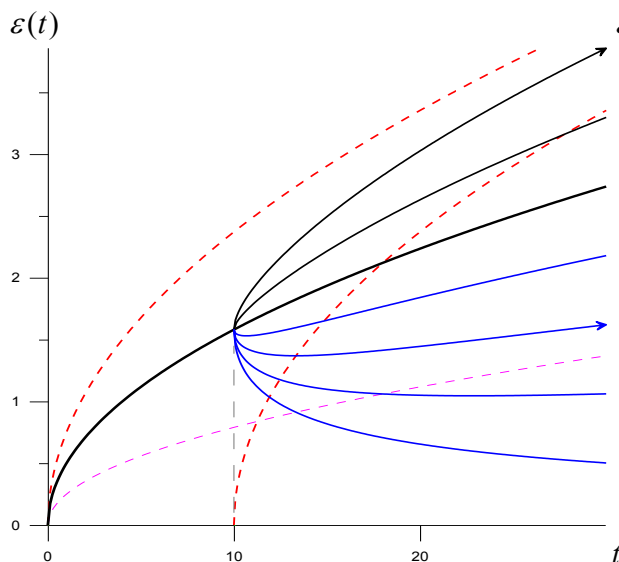


Рис. 11,д. КП для степенной ФП $\Pi(t) = At^u$

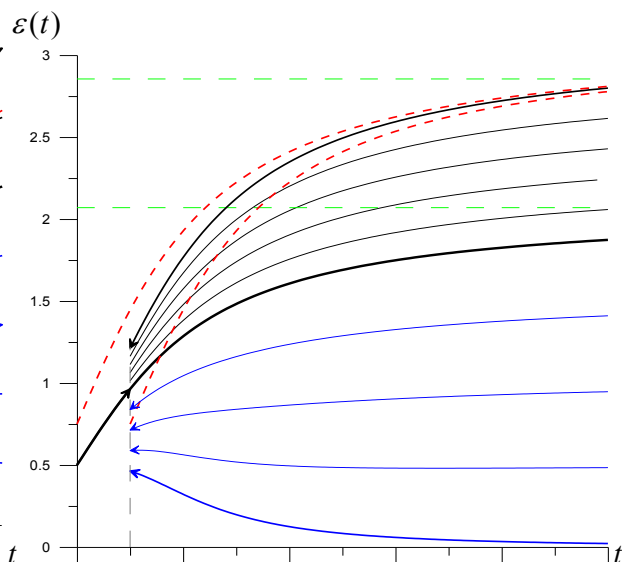


Рис. 11,е. КП модели с ФП $\Pi(t) = A \arctg \lambda t + c$

13. Об условиях существования у кривых ползучести с неполной мгновенной разгрузкой интервала убывания и точки минимума

При фиксированных σ_1 и t_1 семейство (12.7) – пучок кривых, непрерывно зависящий от параметра $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ (рис.11). При $\sigma_2 = \sigma_1$ получаем обычную (возрастающую) КП, а при $\sigma_2 = 0$ – убывающую кривую обратной ползучести. Возникает вопрос: как ведут себя КП (12.7) при $\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$, и при каком отношении $\sigma_2 / \sigma_1 > 0$ происходит смена возрастания КП на убывание? Точнее, когда у КП появляется интервал убывания (конечный или бесконечный) и точка минимума (см. рис.11д,е)? Этот эффект наблюдается в испытаниях разных материалов [6,10,48,49,60,74,84,85,88].

Если $\Pi(\infty) = \infty$ интервал убывания КП при $\sigma_2 > 0$ обязательно конечен, т.к. её главная часть в (12.8) возрастает. Если $\Pi(\infty) < \infty$, то $\varepsilon(t) = \sigma_2 \Pi(\infty) + o(1)$ и, в принципе, КП может убывать на всём луче $t \geq t_1$.

Продифференцируем КП (12.7):

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sigma_1 \dot{\Pi}(t) - (\sigma_1 - \sigma_2) \dot{\Pi}(t - t_1) = \sigma_1 \dot{\Pi}(t - t_1) [Q(t, t_1) - (\sigma_1 - \sigma_2) / \sigma_1], \quad (13.1)$$

$$Q(t, t_1) := \dot{\Pi}(t) / \dot{\Pi}(t - t_1), \quad t > t_1 > 0 \quad (13.2)$$

Из (13.1) следует условие экстремума КП $\varepsilon(t)$:

$$Q(t, t_1) = 1 - \sigma_2 / \sigma_1 \quad (13.3)$$

Таким образом, поведение КП (12.7), положение точек экстремума и их зависимость от параметров модели и программы нагружения определяются свойствами функции $Q(t, t_1)$ (её множеством значений и интервалами монотонности).

Т.к. $\dot{\Pi}(t) > 0$ и не возрастает, то $0 < Q(t, t_1) < 1$ ($\sup Q(t, t_1) < 1$ равносильно убыванию $\dot{\Pi}(t)$). При $t \rightarrow \infty$ из (13.1) $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow \sigma_2 v$, а $Q(t, t_1) \rightarrow 1$, если $v \neq 0$ (если $v = 0$, возможно $Q(\infty) < 1$). Предел в т. t_1

$$q(t_1) := Q(t_1 + 0, t_1) = \dot{\Pi}(t_1) / \dot{\Pi}(+0)$$

может принимать все значения из отрезка $[0; 1]$: если $\dot{\Pi}(0) = \infty$, то $q(t_1) \equiv 0$ (и $\dot{\varepsilon}(t_1 + 0) = -\infty$); если $\dot{\Pi}(t) \neq \text{const}$, то $q < 1$.

Для модели Максвелла $Q(t, t_1) \equiv 1$, $q(t_1) \equiv 1$, КП (12.7) возрастает при $\sigma_2 > 0$ (рис. 11,б)

Для РеМ-3 и СиМ-2 (с $\Pi(t) = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$, $\gamma \in (0; \beta]$) $Q(t) = \exp(-\lambda t_1) = \text{const} = q(t_1) \in (0; 1)$, уравнение (13.3) имеет решение лишь при одном значении $\sigma_2 = \sigma_*$, $\sigma_* := \sigma_1 (1 - q(t_1))$, и для него (13.1) даёт $\dot{\varepsilon}(t) \equiv 0$ для РеМ-3, или $\varepsilon(t) = \text{const}$. Из (13.1) следует, что при $\sigma_2 > \sigma_*$ будет $\dot{\varepsilon}(t) > 0$ при всех $t \geq t_1$, а при $\sigma_2 < \sigma_*$ — $\dot{\varepsilon}(t) < 0$. Для РеМ-3 смена возрастания КП на убывание (а также выпуклости) происходит *тотально* на всём луче $t \geq t_1$, *синфазно во всех точках*. Синяя штрих-пунктирная прямая на рис. 11,в,г — КП при $\sigma_2 = \sigma_*$ (для $\lambda = 0.1$ и $t_1 = 10$ имеем $q = e^{-\lambda t_1} = e^{-1} \approx 0.37$, $\sigma_* = \sigma_1 (1 - q) \approx 0.63 \sigma_1$, $\varepsilon(t, \sigma_*) \equiv \varepsilon(\infty) = \sigma_* \beta$).

Для ФП $\Pi(t) = c + At^u$, $u \in (0; 1)$, $A > 0$, имеем: $Q(t, t_1) = (1 - t_1 / t)^{1-u}$ (не зависит от A и c). $Q(t, t_1)$ возрастает по t , $q = 0$, $Q(\infty) = 1$ (две синие кривые на рис.12 — $Q(t)$ для $t_1 = 5$: верхняя — с $u = 0.5$, нижняя — $u = 0.001$). Поэтому уравнение (13.3) имеет ровно один корень $t_* = t_*(\sigma_2) > t_1$ при любом $\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$, из (13.1) следует, что t_* — точка минимума КП (12.7). По (13.3) $t_* = t_*(\sigma_2)$ убывает (т.к. $Q(t)$ возрастает), $t_*(0+) = \infty$, $t_*(\sigma_1 - 0) = t_1$ (точка минимума КП t_* двигается вправо от t_1 до ∞ с изменением σ_2 от σ_1 до нуля). Для этой

ФП $\nu=0$ при любом $u < 1$, и потому $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. На рис.11, д синим цветом показаны КП для ФП с $A=0.25$, $u=0.5$, $c=0$ (т.к. $\Pi(0)=0$, и КП непрерывны), $t_1=10$, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0.75; 0.5; 0.25; 0$ (нижняя кривая – при $\sigma_2=0$). Т.к. $\dot{\Pi}(0)=\infty$, то $\dot{\varepsilon}(t_1+0)=-\infty$ при любом $\sigma_2 < \sigma_1$. Розовая штриховая КП – обычная КП при $\sigma=0.5$.

Вернёмся к случаю произвольной ФП. В т. t_1 :

$$\dot{\varepsilon}(t_1+0) = \sigma_1 \dot{\Pi}(t_1) - (\sigma_1 - \sigma_2) \dot{\Pi}(+0), \text{ и } \dot{\varepsilon}(t_1+0) = 0$$

равносильно $\sigma_2 = \sigma_* := \sigma_1(1 - q(t_1))$. При $\sigma_2 > \sigma_*$ будет $\dot{\varepsilon}(t_1) > 0$, а при $\sigma_2 < \sigma_*$ – $\dot{\varepsilon}(t_1) < 0$, и, значит, $\varepsilon(t) < \varepsilon(t_1)$ в правой окрестности t_1 . При $\sigma_2 = \sigma_*$ (13.1) принимает вид:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sigma_1 \dot{\Pi}(t - t_1) [Q(t, t_1) - q(t_1)]$$

и потому знак $\dot{\varepsilon}(t)$ совпадает со знаком $Q(t, t_1) - q(t_1)$. Т.к. по (13.2)

$$\dot{Q} = [\ddot{\Pi}(t) \dot{\Pi}(t - t_1) - \dot{\Pi}(t) \ddot{\Pi}(t - t_1)] [\dot{\Pi}(t - t_1)]^{-2}, \text{ а } \dot{\Pi} > 0, \text{ то } \dot{Q}(t) \geq 0$$

при всех $t > t_1 > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\ddot{\Pi}(t) / \dot{\Pi}(t) \geq \ddot{\Pi}(t - t_1) / \dot{\Pi}(t - t_1), \quad t \geq t_1,$$

т.е. производная $(\ln \dot{\Pi}(t))$ не убывает при $t > 0$. С помощью этого критерия легко доказывается возрастание $Q(t)$ для ФП (2.1) с $\alpha > 0$ (РеМ-4 и СиМ-3) и ФП $\Pi(t) = A \ln(\lambda t + \tau) + c$, $\tau \geq 1$, $\lambda > 0$.

Однако возрастание $Q(t)$ не вытекает автоматически из наложенных на ФП ограничений: $Q(t)$ может иметь интервал убывания. Например, для ФП $\Pi(t) = A \arctg \lambda t + c$, $a, \lambda, c > 0$, имеем: $Q(t) = 1 - t_1(2t - t_1)(\lambda^{-2} + t^2)^{-1}$, или $Q(x) = 1 - (2x - 1)(x^2 + \mu)^{-1}$, где $x := \lambda t_1^{-1} > 1$, $\mu := (\lambda t_1)^{-2} > 0$; $Q'(x) = 0$ в точке $x = x_*$, $x_* := 0.5 + 0.5(1 + 4\mu)^{0.5} > 1$. Точка минимума x_* возрастает по μ и убывает с ростом λt_1 , при $\lambda t_1 \rightarrow \infty$ $x_* \rightarrow 1$, а при $\lambda t_1 \rightarrow 0$ $x_* \rightarrow \infty$. Итак, для любых $a, \lambda, c > 0$ и $t_1 > 0$ функция $Q(t)$ имеет одну точку минимума $t_m = x_* t_1$, убывает на (t_1, t_m) и возрастает на (t_m, ∞) . При этом $Q(\infty) = 1$, $q = (1 + (\lambda t_1)^2)^{-1}$, $t_m(\lambda)$ убывает, при $\lambda \rightarrow \infty$ $t_m \rightarrow t_1$, а при $\lambda \rightarrow 0$ $t_m \rightarrow \infty$. Три красные кривые на рис.12 – графики $Q(t)$ при $t_1 = 5$ для ФП $\Pi(t) = A \arctg \lambda t + c$ с $\lambda = 0.05; 0.1; 0.5$. Чёрные (возрастающие) – графики $Q(t)$ для ФП (2.1) (т.е. РеМ-4 и СиМ-3): $Q(t) = (\alpha + \gamma \lambda e^{-\lambda t}) / (\alpha + \gamma \lambda e^{\lambda t_1} e^{-\lambda t})$ с $\alpha = 0.001$, $\gamma = 1.5$, $\lambda = 0.1; 0.2; 0.3$, штриховая кривая – для $\alpha = 10^{-8}$ ($\alpha \approx 0$), $\lambda = 0.3$.

Итак, если $Q(t, t_1)$ возрастает по t на всём луче $t \geq t_1$, то уравнение (13.3) имеет ровно один корень $t_* = t_*(\sigma_2) > t_1$, когда (и только тогда) $1 - \sigma_2 / \sigma_1 \in (q(t_1), Q(\infty, t_1))$; при этом t_* – точка минимума КП (12.7) (из (13.1) следует, что $\dot{\varepsilon} < 0$ при $t \in (t_1, t_*)$). С уменьшени-

ем σ_2 правая часть уравнения (13.3) растёт, и потому $t_*(\sigma_2)$ монотонно сдвигается вправо ($t_* \rightarrow \infty$ при $\sigma_2 \rightarrow 0$). Поэтому корень t_* уравнения (13.3) появляется на луче $[t_1; \infty)$ именно в т. t_1 : $t_* = t_1$ при $\sigma_2 = \sigma_* = \sigma_1(1-q)$. Таким образом, КП (12.7) при $\sigma_2 \geq \sigma_*$ возрастает на всём луче $[t_1; \infty)$, а при $\sigma_2 < \sigma_*$ она сначала убывает на $[t_1; t_*]$, а затем возрастает при $t > t_*$ (см. рис.11,а,д). При $t \rightarrow \infty$ КП (12.7) всегда имеет асимптотику (12.8).

Если же $Q(t)$ убывает при $t \in [t_1, t_m]$, а затем возрастает (рис. 12), то уравнение (13.3) либо не имеет корней при $1 - \sigma_2 / \sigma_1 < \min Q(t) = Q(t_m)$ (при таких σ_2 КП (12.7) возрастает на всём луче $[t_1, +\infty)$), либо имеет два корня $\tilde{t}(\sigma_2) < t_*(\sigma_2)$ при $Q(t_m) < 1 - \sigma_2 / \sigma_1 < q$ (при таких σ_2 КП (12.7) возрастает на $(t_1, \tilde{t})$ и (t_*, ∞) и убывает на $[\tilde{t}, t_*]$), либо имеет один корень, когда $q < 1 - \sigma_2 / \sigma_1 < Q(\infty)$. С уменьшением σ_2 правая часть (13.3) растёт, при $\sigma_2 / \sigma_1 = 1 - Q(t_m)$ в точке t_m появляются корни $\tilde{t} = t_*$ и начинают расходиться в стороны, затем точка максимума КП $\tilde{t}(\sigma_2)$ достигает т. t_1 при $\sigma_2 = \sigma_* := \sigma_1(1-q)$ и исчезает интервал возрастания $[t_1, \tilde{t}]$, а точка минимума $t_*(\sigma_2)$ продолжает двигаться вправо (при $\sigma_2 \rightarrow 0$ $t_* \rightarrow \infty$).

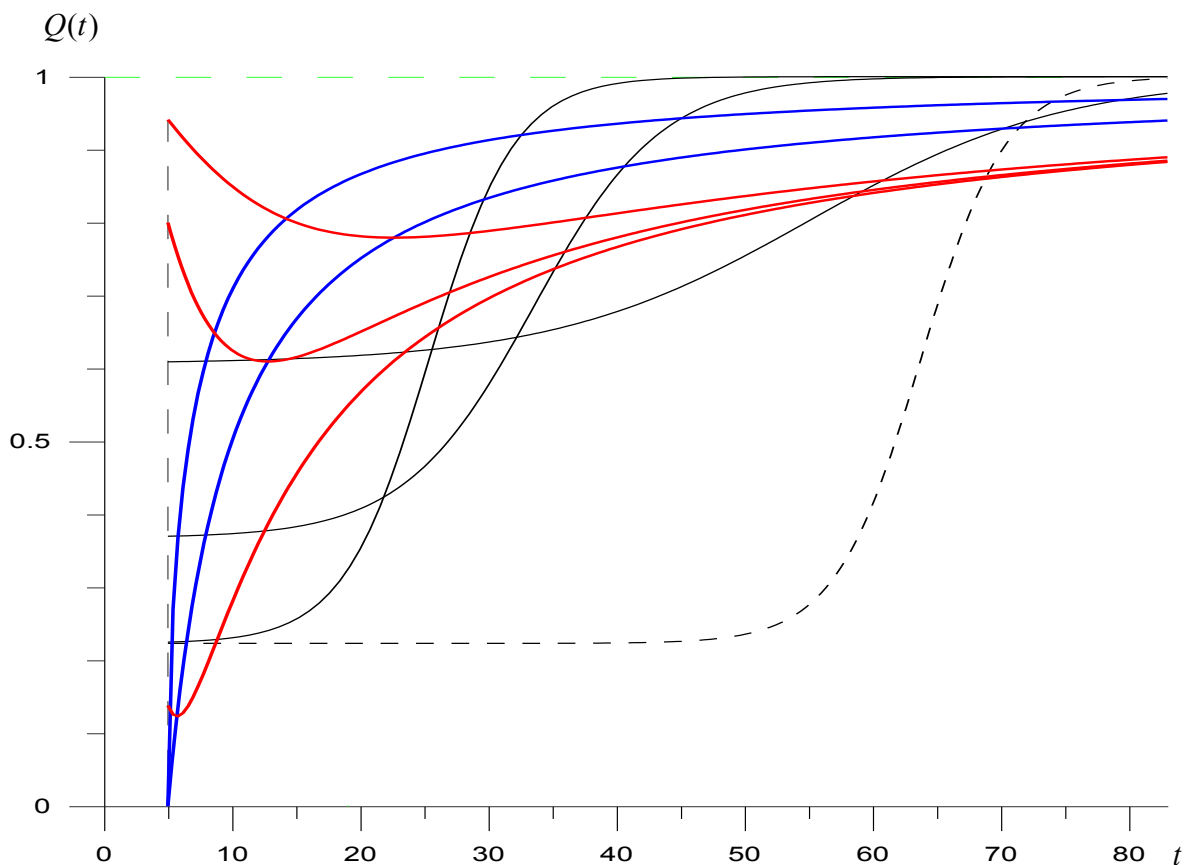


Рис.12. Типичные графики $Q(t)$

Эти общие свойства КП (12.7) иллюстрирует рис. 13: на нём приведены КП для ФП

$$\Pi = A \arctg \lambda t + c, \quad A=1, \quad c=0.5, \quad \lambda=0.1, \quad \text{при } t_1=5, \quad \sigma_1=1 \text{ и} \\ \sigma_2 = 0; 0.1; 0.2; 0.25; 0.3; 0.35; 0.4; 0.5.$$

Зелёные прямые – их горизонтальные асимптоты $\varepsilon = 0.5(\pi+1)\sigma_2$ (любая КП (12.7) при $\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$ стремится к своей асимптоте снизу). На КП с $\sigma_2 = 0.25; 0.3; 0.35$ (красные КП) хорошо заметны две точки экстремума, на КП с $\sigma_2 \in (0; 0.2]$ есть только точка минимума, КП с $\sigma_2 = 0$ (кривая обратной ползучести) монотонно убывает на луче $t \geq t_1$ и имеет асимптоту $\varepsilon = 0$; КП для $\sigma_2 \geq 0.4$ монотонно возрастают. Синие штриховые кривые – обычные КП $\varepsilon = \sigma_2 \Pi(t)$ для $\sigma_2 = 0.1; 0.3; 0.5$.

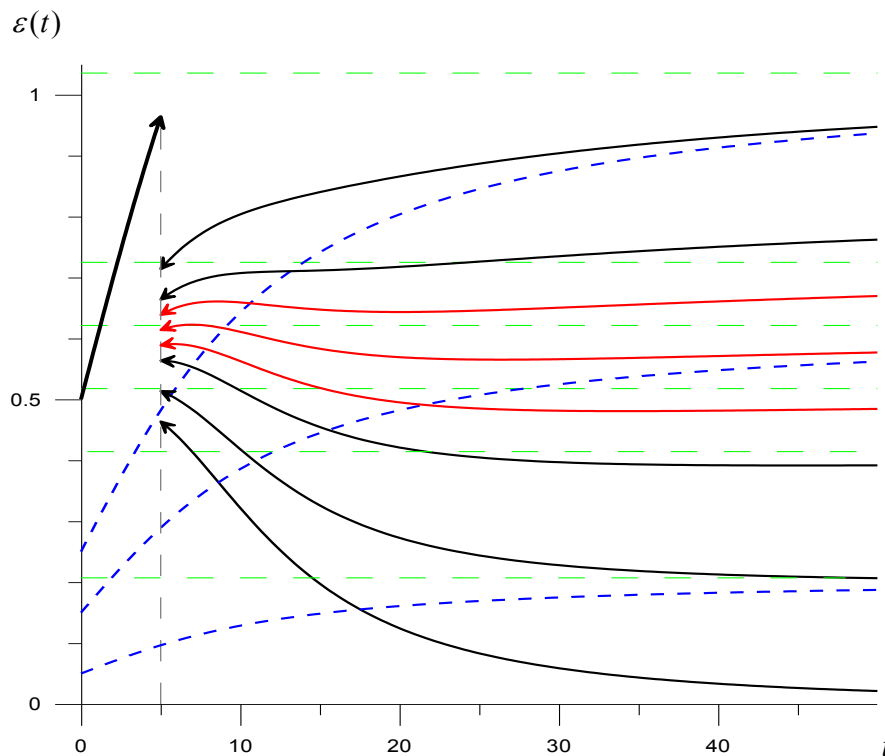


Рис.13. КП для ФП $\Pi = A \arctg \lambda t + c$ при разных отношениях σ_2 / σ_1

Таким образом, исследование общих свойств функции (13.2), соответствующей произвольной ФП, позволило классифицировать возможные типы поведения кривых ползучести при двухступенчатом нагружении с $\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$ (подробнее см. [45]), и указать, когда линейное ОС (1.1) способно описывать наличие точки минимума у КП. В частности, оказалось, что возможно наличие и двух точек экстремума (минимума после максимума) на интервале $t > t_*$.

В [45] также исследованы условия воспроизведения линейным ОС (1.1) эффекта Кольрауша (при знакопеременной программе нагружения (12.1) из трёх ступеней), а в [57, 64] обнаружено свойство асимптотической коммутативности КП ОС (1.1) при ступенчатом нагружении (при перестановке ступеней нагружения).

Аналогичные результаты получены в [57], для КР, порождённых ОС нелинейной теории наследственности Ю.Н. Работнова с двумя материальными функциями, обобщающего ОС (1.1) посредством введения второй материальной функции $\varphi(x)$ [5,13,72]:

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0.$$

В англоязычных работах ОС Работнова широко применяется для моделирования биологических тканей, но называется уравнением квазилинейной вязкоупругости – «QLV» – без упоминания имени Работнова.

14. Заключение

В статье аналитически исследованы общие уравнения и качественные свойства семейств базовых квазистатических кривых, порождаемых линейным интегральным ОС вязкоупругости (1.1) с произвольными (допустимыми) функциями ползучести и релаксации (ФП и ФР): кривых ползучести, обратной ползучести и ползучести при любом ступенчатом нагружении, кривых релаксации с произвольной начальной стадией деформирования, диаграмм деформирования (ТДД) с постоянными скоростями нагружения и деформации (СН и СД). Изучены их зависимости от характеристик ФП и ФР и параметров программ нагружения, выявлены необходимые ограничения на материальные функции ОС (1.1), обеспечивающие адекватное моделирование типичных свойств экспериментальных кривых широкого класса вязкоупругопластичных материалов и базовых реологических эффектов. Установлены характерные особенности теоретических кривых ОС (1.1), которые могут служить индикаторами применимости ОС (1.1), удобными для экспериментальной проверки, и позволяют точнее очертить область применимости линейной теории. Подобный качественный анализ ОС, выявление арсенала его возможностей, области адекватности и способов настройки, создание своеобразного технического руководства модели – важная стадия аттестации любого ОС [52-58].

В частности, выявлены качественные сходства и отличия ТДД при постоянных СН и СД, специфика ТДД моделей всех трёх основных классов моделей (с регулярной, неограниченной и сингулярной ФР); доказано, что все ТДД всегда монотонны и выпуклы вверх; что ТДД смещаются вверх с ростом СД и СН, но их мгновенный и длительный модули $E = R(0)$ и $r = R(\infty)$ не зависят от скоростей; что при стремлении скорости к нулю семейства ДД сходятся к прямой $\sigma = r\varepsilon$, а при стремлении СД и СН к бесконечности – к прямой $\sigma = E\varepsilon$, если модель регулярна, и к вертикальной прямой, если ФР не регулярна. Поэтому линейное ОС вязкоупругости не способно описывать поведение материалов, чьи ЭДД имеют максимум или участок убывания или выпуклости вниз (или хотя бы участок возрастания кривизны), и тех материалов, у которых по ЭДД достоверно установлена зависимость мгновенного или длительного модуля от СД или СН или отрицательная скоростная чувствительность.

Доказано, что адекватное описание обратной ползучести (восстановления) возможно лишь в случае выпуклости вверх ФП. Это ограничение означает, что ОС линейной вязкоупругости не способны моделировать материалы, экспериментальная кривая ползучести которых включает стадию ускоряющейся ползучести.

Изучены асимптотика кривых ползучести при произвольном ступенчатом нагружении, отклонения от обычной кривой ползучести при мгновенном нагружении (без предыстории), условия затухания памяти, влияние перестановки ступеней нагружения на асимптотику кривых ползучести и остаточную деформацию, связь скачков деформации и скорости деформации со скачками напряжения в точках разрыва программы нагружения, условия немонотонности гладких участков кривых ползучести (наличия точек экстремума деформации между точками разрыва программы нагружения). Выявлена ключевая роль величины предела производной функции ползучести на бесконечности в классификации поведения линейных моделей, порождаемых ОС (1.1), при больших временах: доказано, что отличие от нуля материального параметра $\nu := \dot{\Pi}(\infty)$ влечёт накопление остаточной деформации и отсутствие затухания памяти (в частности, $\nu > 0$ у каждой второй реологической модели из пружин и демпферов: у всех РеМ-2k, включая модели Максвелла и стандартного тела, и СиМ-(2k-1), $k \in \mathbb{N}$). Доказано наличие у ОС (1.1) с произвольной выпуклой вверх функцией ползучести (с любым значением $\nu \geq 0$) свойства асимптотической коммутативности при перестановке ступеней нагружения и независимость остаточной деформации от перестановок ступеней нагружения.

Аналитически изучены общие свойства семейства кривых релаксации ОС (1.1) с произвольной монотонной начальной стадией деформирования (НС) до заданного постоянного уровня $\bar{\varepsilon}$, их зависимость от длительности НС t_* , программы деформирования на НС и характеристик ФР, выявлены особенности КР в случае регулярных, неограниченных и сингулярных ФР. Выведены двусторонние оценки отклонений таких КР от идеальной кривой релаксации (при мгновенном деформировании до уровня $\bar{\varepsilon}$). Доказано, что влияние НС быстро затухает с течением времени, качественные свойства КР на основной стадии не зависят от НС и практически совпадают со свойствами идеальной КР, семейство КР с любым фиксированным законом НС при $t_* \rightarrow 0$ сходится (сверху) к идеальной КР $\sigma = \bar{\varepsilon} R(t)$ равномерно внутри интервала $(0; \infty)$. Тем самым доказано, что в линейной вязкоупругости всегда (для любой убывающей ФР) имеет место затухание памяти при релаксации (тогда как для затухания памяти при ползучести необходимо наложить на ФП дополнительное ограничение: $\dot{\Pi}(\infty) = 0$).

Во второй и третьей частях работы будут опубликованы результаты исследования скоростной чувствительности диаграмм деформирования линейного ОС (1.1) (общих свойств кривой скоростной чувствительности и условий наличия у неё экстремума, интегрального оператора, восстанавливающего по ней функцию релаксации, и т.д.), диаграмм деформирования с кусочно-постоянной скоростью деформации, кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения (не обязательно монотонной), условий моделирования «аномального поведения» при ползучести и релаксации («anomalous stress relaxa-

tion», «unusual mechanical response in creep», «rate-reversal behavior in creep and relaxation» [47-51]), эффекта Кольрауша, эволюции петель гистерезиса, эффекта Маллинза, рэтчетинга (ratcheting) и приспособляемости (shakedown) и других эффектов, наблюдаемых при ступенчатом и кусочно линейном (в частности, циклическом) нагружении вязкоупруго-пластичных материалов [5,10, 11, 14, 34- 36, 43, 47-51, 60, 70, 77, 82-85, 88-106].

В дальнейшем планируется обобщение (части) полученных результатов на случай линейного ОС вязкоупругости учитывающего эволюцию материала (старение и т.п.), в котором ФР и ФП имеют вид $F(t, \tau)$, а не $F(t - \tau)$, как в (1.1), а так же – на разные версии нелинейных ОС вязкоупругости, содержащие однократные интегралы (в частности, ОС Работнова [57], Ильюшина, Победри и ОС главной квазилинейной теории вязкоупругости).

Список литературы

1. Gross B. Mathematical theories of viscoelasticity. Paris: Hermann & Sie, 1953. 74 p.
2. Фрейденталь Л., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
3. Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.
4. Бленд Д.Р. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 200 с.
5. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 535 с.
6. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
7. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
8. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
9. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе). М.: Наука, 1972. 328 с.
10. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.
11. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 440 с.
12. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 277 с.
13. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
14. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 304 с.
15. Ferry J.D. Viscoelastic Properties of Polymers, 3rd. ed. New York: Wiley, 1980. – 672 p.
16. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 520 с.
17. Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. Физические уравнения термовязкопластичности. Киев: Наукова думка, 1982. 240 с.
18. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчёты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.

19. Бартенев Г.М., Зеленов Ю.В. Физика и механика полимеров. М.: Высшая школа, 1983. 392 с.
20. Гольдман А.Я. Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов. Л.: Химия, 1988. 272 с.
21. Tschoegl N.W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. Heidelberg: Springer, 1989. 769 p.
22. Fabrizio M., Morro A. Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity. Philadelphia: SIAM, 1992. 203 p.
23. Mead D.W. Numerical interconversion of linear viscoelastic material functions // Journal of Rheology. 1994. V. 38, №6. P. 1769–1795.
24. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V.20. P. 291–314.
25. Drozdov A.D. Mechanics of viscoelastic solids. N.-Y.: Wiley & Sons, 1998. 484 p.
26. Drozdov A.D. Viscoelastic Structures. San Diego: Acad. Press, 1998. 596 p.
27. McKenna G.B. Viscoelasticity // Encyclopedia of Polymer Science and Technology. Vol.4. P. 533-628. Wiley: 2002.
28. Победря Б.Е. Модели линейной теории вязкоупругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2003. №3. С.120-134.
29. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. N.Y: Dover Publications, 2003. 364 p.
30. Arzoumanidis G.A., Liechti K.M. Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models // Mech. Time-Depend. Mater. 2003. V.7. №3, P.209–250.
31. Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2003. 411 с.
32. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей // Известия РАН. Механика твердого тела. 2004. №1, С. 119-157.
33. Gerlach S., Matzenmiller A. Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data // Int. J. Numer. Meth. Eng. 2005. 63, С.428–454.
34. Knauss W.G., Emri I., Lu H. Mechanics of Polymers: Viscoelasticity // Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, ed. by W.N. Sharpe. N.Y.: Springer, 2008. P. 49-96.
35. Brinson H.F., Brinson L.C. Polymer Engineering Science and Viscoelasticity. – Springer Science & Business Media, 2008. – 446 p.
36. Lakes R.S. Viscoelastic Materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
37. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
38. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology // The European Physical Journal. Special Topics. 2011. V.193. №1. P.133–160.
39. Ильясов М.Х. Нестационарные вязкоупругие волны. Баку, 2011. 330 с.

40. Christensen R.M. *Mechanics of Composite Materials*. New York: Dover Publications, 2012. 384 p.
41. Luk-Cyr J., Crochon T., Li C., Lévesque M. Interconversion of linearly viscoelastic material functions expressed as Prony series: A closure // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2012. V.17. №1. P.53-82.
42. Saprunov I., Gergesova M., Emri I. Prediction of viscoelastic material functions from constant stress- or strain-rate experiments // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2014. V.18. №2. P. 349-372.
43. Bergstrom J.S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. Elsevier, William Andrew, 2015. 520 p.
44. Хохлов А.В. Качественный анализ линейных определяющих соотношений вязкоупругости. Свойства теоретических кривых деформирования, функций ползучести и релаксации и их произведения: Отчёт о НИР № 5218. М.: НИИ механики МГУ им. Ломоносова. 2013. 93 с.
45. Хохлов А.В. Общие свойства семейств кривых ползучести при ступенчатом нагружении линейного определяющего соотношения вязкоупругости, условия моделирования эффекта Кольрауша и затухания памяти: Отчёт о НИР № 5254. М.: НИИ механики МГУ. 2014. 83 с.
46. Хохлов А.В. Свойства кривых релаксации с начальной стадией деформирования с постоянной скоростью, порождаемых линейным интегральным соотношением вязкоупругости, и методики его идентификации: Отчёт о НИР № 5302. М.: НИИ механики МГУ им. Ломоносова, 2016. 62 с.
47. Krempl E, Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers // *Int. J. Plasticity*. 2003. V.19. P. 1069–1095.
48. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers // *Int. J. Plasticity*. 2011. V. 27. P. 512–521.
49. Drozdov A.D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal // *International Journal of Solids and Structures*. 2010. V. 47. P. 3221–3233
50. Fernandes V.A., De Focatiis D.S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber // *Polymer Testing*. 2014. V.40. P. 124-132.
51. Drozdov A.D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers // *Mechanics of Materials*. 2014. V.69. P.116–131.
52. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2007. № 2. С. 147-166.
53. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2008. № 2. С. 140-160.

54. Хохлов А.В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2009. № 4. С.121-135.
55. Хохлов А.В. Нелинейные модели вязкоупругости типа Максвелла. Особенности их поведения, скоростная чувствительность и возможность использования для описания ползучести и сверхпластичности материалов: Отчёт о НИР № 5193. М.: НИИ механики МГУ им. Ломоносова. 2013. 108 с.
56. Хохлов А.В. Качественный анализ определяющих соотношений как базовая стадия их аттестации // Современные проблемы математики, механики, информатики: международная научная конференция: материалы. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 435-438.
57. Хохлов А.В. Свойства кривых ползучести и длительной прочности, порожденных нелинейной теорией наследственности Ю.Н. Работнова: Отчёт о НИР № 5288. М.: НИИ механики МГУ. 2015. 74 с.
58. Хохлов А.В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями // Вестник МГУ. Сер.1. Математика, механика. 2016 (в печати).
59. Хохлов А.В. Свойства семейств кривых ползучести при ступенчатом нагружении линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Вып. 77. № 4. С.344-359
60. Dandrea J., Lakes R.S. Creep and creep recovery of cast aluminum alloys // Mechanics of Time-Dependent Materials, 2009. V.13. P. 303-315.
61. Хохлов А.В. Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Вып. 75. № 4. С. 257-267.
62. Хохлов А.В. Свойства произведения функции ползучести и функции релаксации в линейной вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Вып. 76, № 4. С. 343-356.
63. Хохлов А.В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Вып. 77. №1. С. 60-74.
64. Хохлов А.В. Асимптотическая коммутативность кривых ползучести при ступенчатом нагружении в линейной теории наследственности // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 1. С.70-82.
65. Хохлов А.В. Кривые релаксации и ползучести с произвольной монотонной начальной стадией нагружения и затухание памяти в линейной теории вязкоупругости // Упругость и неупругость: Международный симпозиум, посвященный 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина: труды. М.: МГУ, 2016. С. 420-424.

66. Хохлов А.В. Свойства семейств кривых ползучести для нагружения с постоянной скоростью на начальной стадии, порождаемых линейным соотношением вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Вып. 78. № 2. С.5-17.
67. Хохлов А.В. Общие свойства кривых релаксации с начальной стадией деформирования с постоянной скоростью в линейной теории наследственности // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика. 2016 (в печати).
68. Одквист Ф. Технические теории ползучести // Механика: сборник переводов. 1959. №2. С.101-111.
69. Наместников В.С., Работнов Ю.Н. О гипотезе уравнивания состояния при ползучести // Практическая механика и техническая физика. 1961. Т.2. № 2. С. 101-102.
70. Кеннеди А. Дж. Ползучесть и усталость в металлах. М.: Металлургия, 1965. 312 с.
71. Работнов Ю.Н., Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 222 с.
72. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степаныхев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. 1971. № 1. С.74-87.
73. Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials. Amsterdam: North Holland, 1976. 368 p.
74. Малинин Н.Н. Расчёты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 221 с.
75. Малинин Н.Н. Ползучесть в обработке металлов давлением. М.: Машиностроение, 1986. 225 с.
76. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. 96 с.
77. Altenbach H. Topical problems and applications of creep theory // Int. Appl. Mech. 2003. V.39. №6. P. 631–655.
78. Naumenko K., Altenbach H. Modeling of Creep for Structural Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. 220 p.
79. Betten J. Creep Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.- 367 p.
80. Радченко В.П., Кичаев П.Е. Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов. Самара: Самарский гос. тех. ун-т. 2011. 157 с.
81. Sakai T., Somiya S. Analysis of creep behavior in thermoplastics based on visco-elastic theory // Mech. Time-Depend. Mater. 2011. V.15. №3. P. 293-308.
82. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
83. Cho U.W., Findley W.N. Creep and creep recovery of 304 stainless steel under combined stress with a representation by a viscous-viscoelastic model // Journal of Applied Mechanics. 1980. V.47. №4. P. 755–761.

84. Cho U.W., Findley W.N. Creep and plastic strains of 304 stainless steel at 593°C under step stress changes, considering aging // *Journal of Applied Mechanics*. 1982. V.49. №2. P. 297–304.
85. Cho, U.W., Findley, W.N. Creep and creep recovery of 2618-T61 aluminum under variable.
86. Гермелис А.А., Латишенко В.А. Определение реологических характеристик полимерных материалов из статических кривых $\sigma - \varepsilon$, кривых ползучести и релаксации // *Механика полимеров*. 1967. № 6. С. 977-988.
87. Колтунов М.А. Определение характеристик упруго-вязких сред по данным квазистатических опытов // *Механика полимеров*. 1967. № 5. С. 803-811.
88. Hamouda B.H., Laiarinandrasana L., Piques R. Viscoplastic behavior of a medium density polyethylene (MDPE): constitutive equations based on double nonlinear deformation model // *Int. J. Plasticity*. 2007. V. 23. № 8. P.1307–1327.
89. Москвитин В.В. Циклическое нагружение элементов конструкций. М.: Наука. 1981. 344 с.
90. Kang G.Z., Kan Q., Zhang J., Sun Y.F. Time-dependent ratcheting experiments of SS304 stainless steel // *Int. J. Plasticity*. 2006. V. 22. P. 858–894.
91. Chen J.S, Kuo P.H, Lin P.S. et al. Experimental and theoretical characterization of the engineering behavior of bitumen mixed with mineral filler // *Mater. Struct.* 2008. V. 41, №6. P. 1015-1024.
92. Kang G. Ratchetting: recent progresses in phenomenon observation, constitutive modeling and application // *Int. J. Fatigue*. 2008. V.30. P.1448–1472.
93. McClung A., Ruggles-Wrenn M. Strain rate dependence and short-term relaxation behavior of a thermoset polymer at elevated temperature: experiment and modeling // *J. Press. Vessel Technol.* 2009. V.131. №3. P.31405–31413.
94. Zheng X.-T., Xuan F.-Z., Zhao P. Ratcheting–creep interaction of advanced 9–12% chromium ferrite steel with anelastic effect // *Int. J. Fatigue*. 2011. V.33. P. 1286-1291.
95. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep? // *International Journal of Plasticity*. 2011. V.27. №12. P.1936–1958.
96. Naumenko K., Altenbach H., Kutschke A.A Combined Model for Hardening, Softening, and Damage Processes in Advanced Heat Resistant Steels at Elevated Temperature // *International Journal of Damage Mechanics*. 2011. V.20. №4. P.578-597.
97. Kastner M. et al. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model // *Mechanics of Materials*. 2012. V.52. P. 40-57.
98. Вильдеман В.Э., Третьяков М.П. и др. Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях. М.: Физматлит, 2012. 209 с.
99. Drozdov A.D. Mechanical response of polypropylene under multiple-step loading // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. V.50. P. 815-823.

100. Kim J.W., Medvedev G.A., Caruthers J.M. The response of a glassy polymer in a loading-unloading deformation: the stress memory experiment // *Polymer*. 2013. V. 54. №21. P. 5993-6002.
101. Быков Д.Л., Казаков А.В. Коновалов Д.Н., Мельников В.П., Милёхин Ю.М., Пелешко В.А., Садовничий Д.Н. О законе накопления поврежденности и критерии разрушения в высоконаполненных полимерных материалах // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2014. № 5. С. 76-97.
102. Sweeney J., Bonnerb M, Ward I. Modelling of loading, stress relaxation and stress recovery in a shape memory polymer // *J. of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2014. V. 37. P. 12–23.
103. Mathiesen D., Vogtmann D., Dupaix R. Characterization and constitutive modeling of stress-relaxation behavior of polymethyl methacrylate (PMMA) across the glass transition temperature // *Mechanics of Materials*. 2014. V.71. P.74-84.
104. Локощенко А.М. Виброползучесть металлов при одноосном и сложном напряженных состояниях // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2014. № 4. С. 111-120.
105. Зезин Ю.П., Ломакин Е.В. Исследование вязкоупругих свойств усиленных наночастицами эластомеров // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2015. № 2. С. 6-19.
106. Mortazavian S., Fatemi A. Fatigue behavior and modeling of short fiber reinforced polymer composites: A literature review // *International Journal of Fatigue*. 2015. V. 70. P. 297-321.

The Qualitative Analysis of Theoretic Curves Generated by Linear Viscoelasticity Constitutive Equation

A.V. Khohlov^{1,*}

^{*}andrey-khokhlov@ya.ru

¹Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
Moscow, Russia

Keywords: linear viscoelasticity, integral constitutive equation, creep compliance, relaxation modulus, theoretic stress-strain curves, creep curves, creep recovery curves, relaxation curves, fading memory, adequacy indicators for linear viscoelasticity

The article analyses a one-dimensional linear integral constitutive equation of viscoelasticity with an arbitrary creep compliance function in order to reveal its abilities to describe the set of basic rheological phenomena pertaining to viscoelastoplastic materials at a constant temperature. General equations and basic properties of its quasi-static theoretic curves (i.e. stress-strain curves at constant strain or stress rates, creep, creep recovery, creep curves at piecewise-constant stress and ramp relaxation curves) generated by the linear constitutive equation are derived and studied analytically. Their dependences on a creep function and relaxation modulus and on the loading program parameters are examined.

The qualitative properties of the theoretic curves are compared to the typical properties of viscoelastoplastic materials test curves to reveal the mechanical effects, which the linear viscoelasticity theory cannot simulate and to find out convenient experimental indicators marking the field of its applicability or non-applicability. The minimal set of general restrictions that should be imposed on a creep and relaxation functions to provide an adequate description of typical test curves of viscoelastoplastic materials is formulated. It is proved, in particular, that an adequate simulation of typical experimental creep recovery curves requires that the derivative of a creep function should not increase at any point. This restriction implies that the linear viscoelasticity theory yields theoretical creep curves with non-increasing creep rate only and it cannot simulate materials demonstrating an accelerated creep stage. It is also proved that the linear viscoelasticity cannot simulate materials with experimental stress-strain curves possessing a maximum point or concave-up segment and materials exhibiting equilibrium modulus dependence on the strain rate or negative rate sensitivity.

Similar qualitative analysis seems to be an important stage of identification, validation, tuning and application of any constitutive equation for rheonomous materials. It is useful for rational fitting a model and development of its “manual”.

References

1. Gross B. *Mathematical theories of viscoelasticity*. Paris, Hermann & Sie, 1953. 74 p.
2. Freudental A.M., Geiringer H. *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Handbuch der Physik*. Bd.VI. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1958. P. 229-433. (Russ. ed.: Freidental' L., Geiringer X. *Matematicheskie teorii neuprugoi sploshnoi sredy*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 432 p.)
3. Reiner M. *Rheology. Encyclopedia of Physics*. V.6. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, Springer, 1958. P. 434-550. (Russ. ed.: Reiner M. *Reologiya*. Moscow, Nauka Publ., 1965. 224 p.)
4. Bland D.R. *Theory of Linear Viscoelasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1960. 125 p. (Russ. ed.: Blend D.R. *Teoriya lineinoi vyazkoupругosti*. Moscow, Mir Publ., 1965. 200 p.)
5. Ferry J.D. *Viscoelastic Properties of Polymers*. New York, Wiley, 1961. 482 p. (Russ. ed.: Ferri Dzh. *Vyazkoupругie svoistva polimerov*. Moscow, Izdatel'stvo inostranoi literatury, 1963. 535 p.)
6. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruktсий* [The creep of structural elements]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 752 p. (in Russian)
7. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkoupругosti* [Foundations of the mathematical theory of thermoviscoplastic]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 280 p. (in Russian)
8. Cristensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An introduction*. N.-Y., L., Acad. Press, 1971. 256 p. (Russ. ed.: Kristensen R. *Vvedenie v teoriyu vyazkoupругosti*. Moscow, Mir Publ., 1974. 338 p.)
9. Moskvitin V.V. *Soprotivlenie vyazkoupругikh materialov* [Resistance of viscoelastic materials]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 328 p. (in Russian)
10. Bugakov I.I. *Polzuchest' polymernikh materialov* [Creep of polymeric materials]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 287 p. (in Russian)
11. Vinogradov G.V., Malkin A.A. *Reologiya polimerov* [Rheology of polymers]. Moscow, Khimiya Publ., 1977. 440 p. (in Russian)
12. Koltunov M.A. *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow, Vyshaya shkola Publ., 1976. 277 s. (in Russian)
13. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solid bodies] M., Nauka, 1977. 384 s. (in Russian)
14. Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. *Mekhanika plasticheskikh sred* [Mechanics of plastic media]. M., Mir Publ., 1979. 304 p. (in Russian)
15. Ferry J.D. *Viscoelastic Properties of Polymers*, 3rd. ed. New York, Wiley, 1980. 672 p.
16. Malmeyster A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernykh i kompozitnykh materialov* [The resistance of polymer and composite material]. Riga, Zinatne, 1980. 520 p. (in Russian)
17. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G. *Fizicheskie uravneniya termovyazcoplastichnosti* [Physical equations of thermoviscoplasticity]. Kiev, Naukova dumka, 1982. 240 p. (in Russian)

18. Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G. *Prochnostnye raschety izdeliy iz polimernykh materialov* [Strength calculations of products from polymeric materials]. M., Mashinostroeniye Publ., 1983. 239 p. (in Russian)
19. Bartenev G.M., Zelenev Yu.V. *Fizika i mekhanika polimerov* [Physics and mechanics of polymers]. M., Vyshaya shkola Publ., 1983. 392 p. (in Russian)
20. Gol'dman A.Ya. *Prognozirovanie deformatsionno-prochnostnykh svoystv polimernykh i kompozitsionnykh materialov* [Prediction of deformation-strength properties of polymeric and composite materials]. L., Khimiya Publ., 1988. 272 p. (in Russian)
21. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Heidelberg, Springer, 1989. 769 p.
22. Fabrizio M., Morro A. *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*. Philadelphia, SIAM, 1992. 203 p.
23. Mead D.W. Numerical interconversion of linear viscoelastic material functions *Journal of Rheology*, 1994, V. 38, No.6, pp. 1769–1795.
24. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity. *Math. Methods Appl. Sci.* 1997. V.20. pp. 291–314.
25. Drozdov A.D. *Mechanics of viscoelastic solids*. N.-Y., Wiley & Sons, 1998. 484 p.
26. Drozdov A.D. *Viscoelastic Structures*. San Diego, Acad. Press, 1998. 596 p.
27. McKenna G.B. Viscoelasticity. *Encyclopedia of Polymer Science and Technology*, Vol.4, pp. 533–628. Wiley, 2002.
28. Pobedrya B.E. Models Of Linear Viscoelasticity. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*, 2003, Iss.3, pp.95–106. (in Russian)
29. Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity*. New York, Dover Publications, 2003. 364 p.
30. Arzoumanidis G.A., Liechti K.M. Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models. *Mech. Time-Depend. Mater*, 2003, V.7, No.3. pp.209–250.
31. Adamov A.A., et al. *Metody prikladnoy vyazkouprugosti* [Methods of applied viscoelasticity]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 2003. 411 s. (in Russian)
32. Georgievskiy D.V., Klimov D.M., Pobedrya B.E. Specific Features Of The Behavior Of Viscoelastic Models. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*, 2004, Iss.1, pp. 88–120.
33. Gerlach S., Matzenmiller A. Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2005, 63, pp.428–454.
34. Knauss W.G., Emri I., Lu H. Mechanics of Polymers, Viscoelasticity *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*, ed. by W.N. Sharpe. N.Y., Springer, 2008. pp. 49–96.
35. Brinson H.F., Brinson L.C. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity*. Springer Science & Business Media, 2008. 446 p.
36. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
37. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity, An Introduction to Mathematical Models*. London, Imperial College Press, 2010. 368 p.

38. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal. Special Topics*, 2011, V.193, No.1, pp.133–160.
39. Ilyasov M.Kh. *Nestatsionarnie vyazkouprugie volni* [Non-stationary viscoelastic waves]. Baku, 2011. 330 p. (in Russian)
40. Christensen R.M. *Mechanics of Composite Materials*. New York, Dover Publications, 2012. 384 p.
41. Luk-Cyr J., Crochon T., Li C., Lévesque M. Interconversion of linearly viscoelastic material functions expressed as Prony series. A closure. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2012, V.17, No.1. pp.53-82.
42. Saprunov I., Gergesova M., Emri I. Prediction of viscoelastic material functions from constant stress- or strain-rate experiments. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2014, V.18, No.2, pp. 349-372.
43. Bergstrom J.S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. Elsevier, William Andrew, 2015. 520 p.
44. Khokhlov A.V. *Kachestvennyy analiz lineynykh opredelyayushchikh sootnosheniy vyazkouprugosti. Svoystva teoreticheskikh krivyykh deformirovaniya, funktsiy polzuchesti i relaksatsii i ikh proizvedeniya: Otchet o NIR № 5218* [Qualitative analysis of constitutive equations for linear viscoelasticity. Properties of the theoretical curves of deformation, functions of creep and relaxation and their works: Research report № 5218]. Moscow, NII mekhaniki MGU imeni Lomonosova, 2013. 93 p. (in Russian).
45. Khokhlov A.V. *Obshchie svoystva semeystv krivyykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhении lineynogo opredelyayushchego sootnosheniya vyazkouprugosti, usloviya modelirovaniya effekta Kol'rausha i zatukhaniya pamyati: Otchet o NIR № 5254* [General properties of families of creep curves at the loading linear speed which determines the ratio of viscoelasticity, the conditions simulate the effect of Kohlraush and the fading of memory: Research report № 5254]. Moscow, NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova, 2014. 83 p. (in Russian)
46. Khokhlov A.V. *Svoystva krivyykh relaksatsii s nachal'noy stadiy deformirovaniya s postoyannoy skorost'yu, porozdaemikh lineynim integral'nim sootnosheniem vyazkouprugosti, i metodiki ego identifikatsii: Otchet o NIR №5302* [Properties of the relaxation curves c the initial stage of deformation with a constant velocity arising from linear integral ratio of viscoelasticity, and methods of its identification: Research report № 5302]. Moscow, NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova, 2016. 62 p. (in Russian)
47. Krempl E, Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior, an overview of some properties of metals and solid polymers. *Int. J. Plasticity*, 2003, V.19, pp. 1069–1095.
48. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers. *Int. J. Plasticity*, 2011, V. 27, pp. 512–521.
49. Drozdov A.D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, V. 47, pp. 3221–3233
50. Fernandes V.A., De Focatiis D.S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber. *Polymer Testing*, 2014, V.40, pp. 124-132.

51. Drozdov A.D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermo-plastic elastomers. *Mechanics of Materials*, 2014, V.69, pp.116–131.
52. Khokhlov A.V. Constitutive Relation For Rheological Processes: Properties Of Theoretic Creep Curves And Simulation Of Memory Decay. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*, 2007, Iss.2. pp. 291-306. (in Russian)
53. Khokhlov A.V. Constitutive Relation For Rheological Processes With Known Loading History. Creep And Long-Term Strength Curves. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*, 2008, Iss.2. pp. 283-299. (in Russian)
54. Khokhlov A.V. Fracture Criteria Under Creep With Strain History Taken Into Account, And Long-Term Strength Modelling. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*, 2009, Iss.4. pp. 596-607. (in Russian)
55. Khokhlov A.V. *Nelineynye modeli vyazkouprugosti tipa Maksvella. Osobennosti ikh povedeniya, skorostnaya chuvstvitel'nost' i vozmozhnost' ispol'zovaniya dlya opisaniya polzuchesti i sverkhplastichnosti materialov: Otchet o NIR № 5193* [The nonlinear model of viscoelasticity of Maxwell type. Features of their behavior, speed sensitivity and the possibility of using for the description of creep and superplasticity of materials: Research report № 5193]. Moscow, NII mekhaniki MGU im. Lomonosova, 2013, 108 p. (in Russian)
56. Khokhlov A.V. *Kachestvennyy analiz opredelyayushchikh sootnosheniy kak bazovaya stadiya ikh attestatsii* [Qualitative analysis of defining relations as the basic stage of their assessment]. *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya: materialy* [Modern problems of mathematics, mechanics, Informatics: international conference: proceedings]. Tula, TulGU Publ., 2014, pp. 435-438. (in Russian)
57. Khokhlov A.V. *Obshchie svoystva semeystv krivyykh polzuchesti i dlitel'noy prochnosti, porozdaemikh nelineynoy teoriey nasledstvennosti Yu.N. Rabotnova: Otchet o NIR №5288* [Properties of creep curves and long-term strength caused by the nonlinear theory of heredity Yu. N. Rabotnova: Research report № 5288]. Moscow, NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova, 2015, 74 p. (in Russian)
58. Khokhlov A.V. Properties of nonlinear model of viscoplasticity of Maxwell type with two material functions. *Vestnik MGU. Ser.1. Matematika. Mekhanika = Herald of the MGU. Series I. Mathematics. Mechanics*, 2016 (in print).
59. Khokhlov A.V. Properties Of Creep Curves At Piecewise-Constant Stress Generated By The Linear Viscoelasticity Theory. *Problemy prochnosti i plastichnosti= Problems of Strength and Plasticity*, 2015, V. 77, No.4, pp. 344-359. (in Russian)
60. Dandrea J., Lakes R.S. Creep and creep recovery of cast aluminum alloys. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2009, V.13, pp. 303-315.
61. Khokhlov A.V. Creep Recovery Curves Yielding From Linear Viscoelasticity Theory And The Necessary Restrictions On A Creep Function. *Problemy prochnosti i plastichnosti= Problems of Strength and Plasticity*, 2013, V. 75, No.4. pp. 257-267. (in Russian)
62. Khokhlov A.V. General Properties And Peculiarities Of Creep And Relaxation Functions Product In Linear Viscoelasticity. *Problemy prochnosti i plastichnosti= Problems of Strength and Plasticity*, 2014, V. 76, No.4. pp. 343-356. (in Russian)

63. Khokhlov A.V. General Properties Of Stress-Strain Curves At Constant Strain Rate Yielding From Linear Theory Of Viscoelasticity. *Problemy prochnosti i plastichnosti= Problems of Strength and Plasticity*, 2015, V. 77, No.1. pp. 60-74. (in Russian)
64. Khokhlov A.V. Asymptotic Commutativity Of Creep Curves At Piecewise-Constant Stress Produced By The Linear Viscoelasticity Theory. *Mashinostroenie i inzhenernoye obrazovanie = Mechanical Engineering and Engineering Education*, 2016, No.1. pp. 70-82. (in Russian)
65. Khokhlov A.V. *Krivyte relaksatsii i polzuchesti s proizvol'noy monotonnoy nachal'noy stadiy nagruzheniya i zatukhaniye pamyati v lineynoy teorii vyazkouprugosti* [Curves of creep and relaxation with arbitrary monotone initial stage of loading and the attenuation of memory in the linear theory of viscoelasticity]. *Uprugost i neiuprugost: Mezhdunarod. sympozium, posv. 105-letiyu so dnya rozhdeniya A.A. Il'yushina: Trudy* [Elasticity and inelasticity: International Symposium, dedicated to the 105th anniversary since the birth of A. A. Ilyushin: works]. Moscow, MGU publ., 2016. pp. 420-424. (in Russian)
66. Khokhlov A.V. Properties of families of creep curves for loading with constant speed at an initial stage caused by linear viscoelasticity ratio. *Problemy prochnosti i plastichnosti= Problems of Strength and Plasticity*, 2016, V. 78, No. 2. pp. 5-17. (in Russian)
67. Khokhlov A.V. General properties of curves of relaxation c the initial stage of deformation with a constant velocity in the linear theory of heredity. *Vestnik MGU. Ser. I. Matematika. Mekhanika = Herald of the MGU. Series I. Mathematics. Mechanics*, 2016 (in print).
68. Odkvist F. *Tekhnicheskie teorii polzuchesti* [Technical theories of creep]. *Mekhanika: Sbornik perevodov* [Mechanics: a collection of translations]. 1959, No.2. pp. 101-111.
69. Namestnikov V.S., Rabotnov Yu.N. Hypothesis about the equation of state for the creep. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Practical mechanics and technical physics*, 1961, V.2, No 2. pp. 101-102. (in Russian)
70. Kennedy A.J. *Processes of Creep and Fatigue in Metals*. Edinburgh, London, Olyver and Boyd, 1962. (Russ. ed.: Kennedi A.Dzh. *Polzuchest' i ustalost' v metallakh*. Moscow, Metallurgiya Publ., 1965. 312 p.
71. Rabotnov Yu.N., Mileiko S.T. *Kratkovremennay polzuchest'* [Short-term creep]. M., Nauka Publ., 1970. 222 p.. (in Russian)
72. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanycheva E.I. The application of the nonlinear theory of heredity to the description of temporal effects in polymeric materials. *Mekhanika polymerov = Mechanics of polymers*, 1971, No. 1, pp.74-87. (in Russian)
73. Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. Amsterdam, North Holland, 1976. 368 p.
74. Malinin N.N. *Raschety na polzuchest' elementov mashinostroitel'nykh konstruksiy* [The calculations for the creep of elements of mechanical engineering structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 221 p. (in Russian)
75. Malinin N.N. *Polzuchest' v obrabotke metallov davleniem* [Creep in the processing of metals by pressure]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 225 p. (in Russian)

76. Sosnin O.V., Gorev B.V., Nikitenko A.F. *Energeticheskiy variant teorii polzuchesty* [Energy variant of the creep theory]. Novosibirsk, Institut hydrodynamiky SO AN SSSR, 1986. 96 p. (in Russian)
77. Altenbach H. *Topical problems and applications of creep theory*. Int. Appl. Mech. 2003, V.39, No.6. P. 631–655.
78. Naumenko K., Altenbach H. *Modeling of Creep for Structural Analysis*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2007. 220 p.
79. Betten J. *Creep Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 367 p.
80. Radchenko V.P., Kichaev P.E. *Energeticheskaya kontseptsiya polzuchesty i vibropolzuchesty metallov* [Energy concept of creep and vibrocreep metals]. Samara, Samarskiy tekhn. univ. Publ., 2011. 157 p. (in Russian)
81. Sakai T., Somiya S. Analysis of creep behavior in thermoplastics based on visco-elastic theory. *Mech. Time-Depend. Mater*, 2011, V.15, No.3. P. 293-308.
82. Lokoschenko A.M. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov* [Creep and long-term strength of metals]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2016. 504 p. (in Russian)
83. Cho U.W., Findley W.N. Creep and creep recovery of 304 stainless steel under combined stress with a representation by a viscous-viscoelastic model. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, V.47, No.4. pp. 755–761.
84. Cho U.W., Findley W.N. Creep and plastic strains of 304 stainless steel at 593°C under step stress changes, considering aging. *Journal of Applied Mechanics*, 1982, V.49, No.2, pp. 297–304.
85. Cho U.W., Findley W.N. *Creep and creep recovery of 2618-T61 aluminum under variable*.
86. Germelis A.A., Latishenko V.A. Determination of rheological characteristics of polymer materials from the static curves, the curves of creep and relaxation. *Mekhanika polymerov = Mechanics of polymers*, 1967, No. 6, pp.977-988. (in Russian)
87. Koltunov M.A. Characterization of elastic-viscous fluids, according to the quasi-static experiments. *Mekhanika polymerov = Mechanics of polymers*, 1967, No. 5, pp. 803-811. (in Russian)
88. Hamouda B.H., Laiarinandrasana L., Piques R. Viscoplastic behavior of a medium density polyethylene (MDPE), constitutive equations based on double nonlinear deformation model. *Int. J. Plasticity*, 2007, V. 23, No.8. pp.1307–1327.
89. Moskvitin V.V. *Tsyklichesкое nagruzhenie elementov konstruktsiy* [Cyclic loading of structural elements]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 344 p. (in Russian)
90. Kang G.Z., Kan Q., Zhang J., Sun Y.F. Time-dependent ratcheting experiments of SS304 stainless steel. *Int. J. Plasticity*, 2006, V. 22. pp. 858–894.
91. Chen J.S, Kuo P.H, Lin P.S. et al. Experimental and theoretical characterization of the engineering behavior of bitumen mixed with mineral filler. *Mater. Struct.*, 2008, V. 41, No.6. pp. 1015-1024.
92. Kang G. Ratchetting, recent progresses in phenomenon observation, constitutive modeling and application. *Int. J. Fatigue*, 2008, V.30. pp.1448–1472.

93. McClung A., Ruggles-Wrenn M. Strain rate dependence and short-term relaxation behavior of a thermoset polymer at elevated temperature, experiment and modeling. *J. Press. Vessel Technol*, 2009, V.131, No.3. pp.31405–31413.
94. Zheng X.-T., Xuan F.-Z., Zhao P. Ratcheting–creep interaction of advanced 9–12% chromium ferrite steel with anelastic effect. *Int. J. Fatigue*, 2011, V.33. pp. 1286-1291.
95. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature, Ratcheting or creep? *International Journal of Plasticity*, 2011, V.27, No.12. pp.1936–1958.
96. Naumenko K., Altenbach H., Kutschke A. A Combined Model for Hardening, Softening, and Damage Processes in Advanced Heat Resistant Steels at Elevated Temperature. *International Journal of Damage Mechanics*, 2011, V.20, No.4. pp.578-597.
97. Kastner M. et al. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model. *Mechanics of Materials*, 2012, V.52. pp.40-57.
98. Vil'deman V.E., et al. *Ekspperimental'nye issledovaniya svoystv materialov pri slozhnykh termomekhanicheskikh vozdeystviyakh* [Experimental studies of material properties in complex thermo-mechanical effects]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 209 p. (in Russian)
99. Drozdov A.D. Mechanical response of polypropylene under multiple-step loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, V.50. pp. 815-823.
100. Kim J.W., Medvedev G.A., Caruthers J.M. The response of a glassy polymer in a loading-unloading deformation, the stress memory experiment. *Polymer*, 2013, V. 54, No.21. pp. 5993-6002.
101. Bykov D.L., et al. Law Of Damage Accumulation And Fracture Criteria In Highly Filled Polymer Materials. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*, 2014, Iss. 5. pp. 543-560. (in Russian)
102. Sweeneya J., Bonnerb M, Ward I. Modelling of loading, stress relaxation and stress recovery in a shape memory polymer. *J. of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2014, V. 37. pp. 12-23.
103. Mathiesen D., Vogtmann D., Dupaix R. Characterization and constitutive modeling of stress-relaxation behavior of polymethyl methacrylate (PMMA) across the glass transition temperature. *Mechanics of Materials*, 2014, V.71. pp.74-84.
104. Lokoschenko A.M. Vibrocreep Of Metals In Uniaxial And Complex Stress States. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*, 2014, Iss. 4. pp. 453-460. (in Russian)
105. Zezin Yu.P., Lomakin E.V. Study Of Viscoelastic Properties Of Elastomers Reinforced By Nanoparticles. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*,. 2015, Iss. 2. pp. 117-126. (in Russian)
106. Mortazavian S., Fatemi A. Fatigue behavior and modeling of short fiber reinforced polymer composites, A literature review. *International Journal of Fatigue*, 2015, V. 70. pp. 297-321.