

УДК 531.38

Расчет колебаний дискретно-стратифицированных жидкостей методом конечных элементов

Вин К. К.^{1,*}, Темнов А. Н.¹

^{*}win.c.latt@gmail.com

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В предлагаемой статье рассмотрены колебания трёх несжимаемых жидкостей с использованием метода конечных элементов, определены собственные частоты колебаний и построены формы колебаний поверхностей разделов жидкостей для двух тонов колебаний. Приведены зависимости частот колебаний от соотношений плотностей колеблющихся жидкостей и толщин слоев жидкостей и сравнение результатов численных расчетов с точными значениями, полученными аналитическими методами.

Ключевые слова: колебания жидкостей, частота и форма колебаний, функционал, обобщенные координаты, матрицы жесткости и масс, локальные и глобальные координаты

Введение

В связи с развитием ракетной космической техники и общего машиностроения в последнее время возрос интерес к исследованию динамики сложных жидкостей [1]. Одной из используемых моделей подобной жидкости может являться дискретно-стратифицированная жидкость, представляющая собой совокупность слоёв несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Колебаниям стратифицированных и несмешивающихся жидкостей посвящено достаточно большое количество работ см. например [2]-[17].

В предлагаемой статье приведена вариационная постановка задача о собственных колебаниях несмешивающихся жидкостей и численная реализация определения стационарных значений функционала, отвечающего вариационной задаче, методом конечных элементов.

1. Постановка задачи

Пусть замкнутый неподвижный сосуд полностью заполнен тремя идеальными несжимаемыми жидкостями, занимающимися в состоянии равновесия области Ω_1, Ω_2 и Ω_3 . Мы предположим, что эти области расположены наподобие слоеного пирога, так что Ω_1

контактирует (кроме стенки сосуда) только с Ω_2 по некоторой поверхности Γ_1 ; Ω_2 - с Ω_1 и с Ω_3 (по Γ_2); каждая Γ_1 и Γ_2 контактируют с поверхностью сосуда. Обозначим через ρ_i плотность жидкости в Ω_i , и допустим что на систему действует однородное гравитационное поле с массовой плотностью потенциала gz . Вектор нормали n на Γ_i направим из Ω_i в Ω_{i+1} .

Рассмотрим задачу о колебаниях несжимаемых жидкостей в занимаемых объемах, ограниченных поверхностями S_i . Будем считать движение каждой жидкости потенциальным с потенциалом скорости $\Phi_i(x, y, z) \cdot e^{i\omega t}$ ($i = 1, 2, 3$) (i - количество жидкостей), ω - искомая частота главных колебаний жидкостей. Потенциалы Φ_i могут быть определены из решений следующих задач.

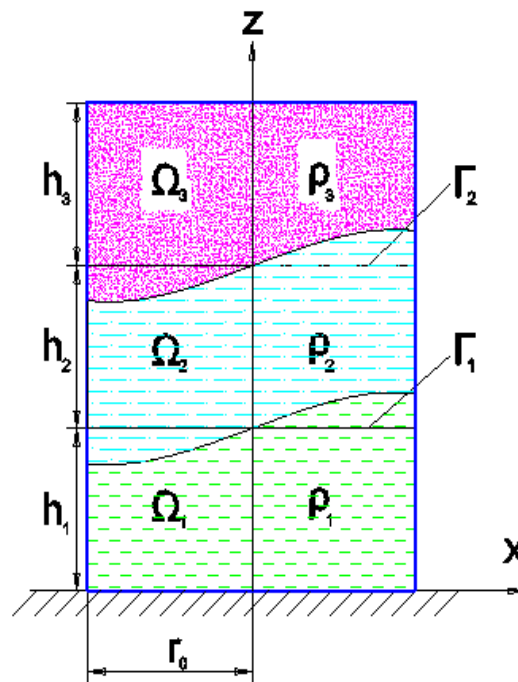


Рис.1. Общий вид цилиндрического сосуда с жидкостями.

$$\Delta \Phi_i = 0, (i = 1, 2, 3) \text{ в } \Omega_i, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = 0 \text{ на } S_i \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= \frac{\omega^2}{g} \frac{(\rho_1 \cdot \Phi_1 - \rho_2 \cdot \Phi_2)}{(\rho_1 - \rho_2)}, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} &= \frac{\omega^2}{g} \frac{(\rho_1 \cdot \Phi_1 - \rho_2 \cdot \Phi_2)}{(\rho_1 - \rho_2)}; \text{ на } \Gamma_1 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} &= \frac{\omega^2}{g} \frac{(\rho_2 \cdot \Phi_2 - \rho_3 \cdot \Phi_3)}{(\rho_2 - \rho_3)}, \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} &= \frac{\omega^2}{g} \frac{(\rho_2 \cdot \Phi_2 - \rho_3 \cdot \Phi_3)}{(\rho_2 - \rho_3)}; \text{ на } \Gamma_2 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial z};\end{aligned}\quad (3)$$

2. Вариационная постановка задача

Покажем, что исходная задача (1)-(3) на собственные значения равносильна задаче об отыскании стационарных значений функционала

$$F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \rho_i \int_{\Omega_i} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_i d\Omega_i}{\sum_{i=1}^k (\rho_i - \rho_{i+1})^{-1} \int_{\Gamma_i} (\rho_i \Phi_i - \rho_{i+1} \Phi_{i+1})^2 d\Gamma_i} \quad (4)$$

Где, $k = 2$ - число поверхностей разделов.

С этой целью помножим каждое уравнение (1) на ρ_i и Φ_i , проинтегрируем по объему Ω_i для каждой жидкости, и используя теоремы Гаусса-Остроградского, и граничные условия, получим

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} \Delta \Phi_1 \cdot \Phi_1 d\Omega_1 = -\rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_1 d\Omega_1 + \rho_1 \oint_{S_1} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} dS_1 + \rho_1 \oint_{\Gamma_1} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\Gamma_1 \quad (5)$$

$$\rho_2 \int_{\Omega_2} \Delta \Phi_2 \cdot \Phi_2 d\Omega_2 = -\rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla \Phi_2 \cdot \nabla \Phi_2 d\Omega_2 + \rho_2 \oint_{S_2} \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS_2 - \rho_2 \oint_{\Gamma_1} \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\Gamma_1 + \rho_2 \oint_{\Gamma_2} \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\Gamma_2 \quad (6)$$

$$\rho_3 \int_{\Omega_3} \Delta \Phi_3 \cdot \Phi_3 d\Omega_3 = -\rho_3 \int_{\Omega_3} \nabla \Phi_3 \cdot \nabla \Phi_3 d\Omega_3 + \rho_3 \oint_{S_3} \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS_3 - \rho_3 \oint_{\Gamma_2} \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} d\Gamma_2 \quad (7)$$

Приняв во внимание граничные условия (2) и (3), и сложив полученные результаты, приходим к выражению

$$\begin{aligned}& \rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_1 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla \Phi_2 \cdot \nabla \Phi_2 d\Omega_2 + \rho_3 \int_{\Omega_3} \nabla \Phi_3 \cdot \nabla \Phi_3 d\Omega_3 - \\ & - \lambda \left[\frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)} \int_{\Gamma_1} (\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2)^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{(\rho_2 - \rho_3)} \int_{\Gamma_2} (\rho_2 \Phi_2 - \rho_3 \Phi_3)^2 d\Gamma_2 \right] = 0;\end{aligned}\quad (8)$$

Откуда и следует выражение (4).

($\lambda = \frac{\omega^2 r_0}{g}$ - собственное число, ω -размерная частота колебаний.)

Как отмечено в книге [3], собственные значения и собственные функции задачи (1)-(3) могут быть получены, если искать стационарные значения функционала (4), на множестве всех функций, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} (\rho_i \Phi_i - \rho_{i+1} \Phi_{i+1}) d\Gamma_i = 0 \quad (9)$$

Для численной реализации полученного функционала воспользуемся методом конечных элементов.

3. Разбиение конечных элементов

Область решения Ω_i разобьем, как это показано на рис.5, на ряд треугольных областей – конечных элементов (КЭ). Разбив область решения на ряд областей, мы получаем возможность переписать интегралы в виде суммы интегралов по отдельным областям,

Треугольная форма КЭ не является, единственно возможной, но обладает по сравнению с остальными рядом преимуществ: она позволяет достаточно плотно покрыть всю площадь решения (в отличие от прямоугольной) и в тоже время такая форма обеспечивает относительную простоту получения основных соотношений конечно-элементного анализа.

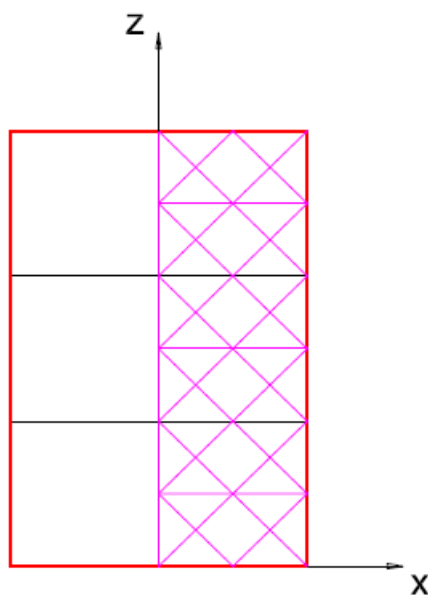


Рис.2. Схема разбиения области решения КЭ

Запишем выражения (8) в более компактном виде с использованием цилиндрической системы координат r, η, z .

$$\sum_{i=1}^{k+1} \rho_i \iiint_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right) r dr d\eta dz - \lambda \sum_{i=1}^k \frac{1}{(\rho_i - \rho_{i+1})} \int_{S_i} (\rho_i \Phi_i - \rho_{i+1} \Phi_{i+1})^2 r dr d\eta = 0 \quad (10)$$

Решение задачи (10) будем искать в виде,

$$\Phi_i(r, \eta, z) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{im}(r, z) \cdot N_{im}(\eta), \quad N_{im}(\eta) = \begin{cases} \cos(m\eta) \\ \sin(m\eta) \end{cases} \quad (11)$$

Используя формулы перехода от глобальных координат к локальным, значение потенциала скоростей в любой точке КЭ можно вычислить как

$$\psi_i(x, y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^9 u_j^i f_j^i(x_l, y_l) = \sum_{i=1}^k (U)_{(1 \times 9)}^i [C]_{(9 \times 9)}^i \{X(x, y)\}_{(9 \times 1)}^i \quad (12)$$

Здесь u_j^i - значения обобщенных координат КЭ, $f_j^i(x_l, y_l)$ - функции формы в точке с локальными координатами (x_l, y_l) .

а матрица $[X]_{(9 \times 9)}$ представлена форме

$$[X]_{(9 \times 9)}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & x_2 & 1 & 0 & x_3 & 1 & 0 \\ y_1 & 0 & 1 & y_2 & 0 & 1 & y_3 & 0 & 1 \\ x_1 y_1 & y_1 & x_1 & x_2 y_2 & y_2 & x_2 & x_3 y_3 & y_3 & x_3 \\ x_1^2 & 2x_1 & 0 & x_2^2 & 2x_2 & 0 & x_3^2 & 2x_3 & 0 \\ y_1^2 & 0 & 2y_1 & y_2^2 & 0 & 2y_2 & y_3^2 & 0 & 2y_3 \\ x_1 y_1^2 & y_1^2 & 2x_1 y_1 & x_2 y_2^2 & y_2^2 & 2x_2 y_2 & x_3 y_3^2 & y_3^2 & 2x_3 y_3 \\ x_1^2 y_1 & 2x_1 y_1 & x_1^2 & x_2^2 y_2 & 2x_2 y_2 & x_2^2 & x_3^2 y_3 & 2x_3 y_3 & x_3^2 \\ x_1^2 y_1^2 & 2x_1 y_1^2 & 2x_1^2 y_1 & x_2^2 y_2^2 & 2x_2 y_2^2 & 2x_2^2 y_2 & x_3^2 y_3^2 & 2x_3 y_3^2 & 2x_3^2 y_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

С учетом (13) можно определить значения C_{ij} для каждого конкретного КЭ

Отметим, что от координат точки зависит только столбец $\{X(x, y)\}_{(9 \times 1)}^i$, а от значений обобщенных координат только $(U)_{(1 \times 9)}^i$.

Теперь можно записать каждый из элементов сумм в уравнении (10) с учетом соотношений (12) и произвести некоторые операции над матрицами и интегрирование. Получаем выражения матриц жесткости и масс в виде

$$[K_{KЭ}] = [C]^i \left[\iint_{S_{KЭ}} \rho_i \left(\frac{\partial \{X\}^i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \{X\}^{Ti}}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} \{X\}^i \cdot \{X\}^{Ti} + \frac{\partial \{X\}^i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \{X\}^{Ti}}{\partial z} \right) r dr dz \right] [C]^{Ti} \quad (14)$$

- матрица «жесткости» КЭ, а

$$[M_{KЭ}^{(\Gamma)}] = [C]^i \int_{L_{KЭ}} \frac{1}{(\rho_i - \rho_{i+1})} (\rho_i \{X\}^i - \rho_{i+1} \{X\}^{i+1}) \cdot (\rho_i \{X\}^i - \rho_{i+1} \{X\}^{i+1})^T r dr [C]^{Ti} \quad (15)$$

- матрица «массы» КЭ.

Замечание: Вычисление матрицы $[M_{KЭ}^{(\Gamma)}]$ в формуле (15), очевидно, необходимо только для элементов, имеющих общую грань с поверхностями разделов Γ_1 и Γ_2 .

Поставим полученные выражения матриц жесткости и масс (14) и (15) в уравнение (10), получим характеристическое уравнение в виде

$$(V)_{(1 \times N_{op})} [K_{KЭ}]_{(N_{op} \times N_{op})} \{V\}_{(N_{op} \times 1)} - \lambda (V)_{(1 \times N_{op})} [M_{KЭ}^{(r)}]_{(N_{op} \times N_{op})} \{V\}_{(N_{op} \times 1)} = 0 \quad (16)$$

Необходимые условия стационарности функционала (16) приводят к системе линейных уравнений, относительно вектора (V)

$$\left([K_{KЭ}]_{(N_{op} \times N_{op})} - \lambda \cdot [M_{KЭ}^{(r)}]_{(N_{op} \times N_{op})} \right) \{V\}_{(N_{op} \times 1)} = 0 \quad (17)$$

Характеристическое уравнение системы (17) имеет вид

$$\left| [K_{KЭ}]_{(N_{op} \times N_{op})} - \lambda \cdot [M_{KЭ}^{(r)}]_{(N_{op} \times N_{op})} \right| = 0 \quad (18)$$

Решая уравнение (18) численным методом, получим спектр дискретных собственных значений λ_{mn} и соответственные им собственные векторы $\{V\}_{mn}$.

Результаты численных методов приведены на рисунках (3 и 4).

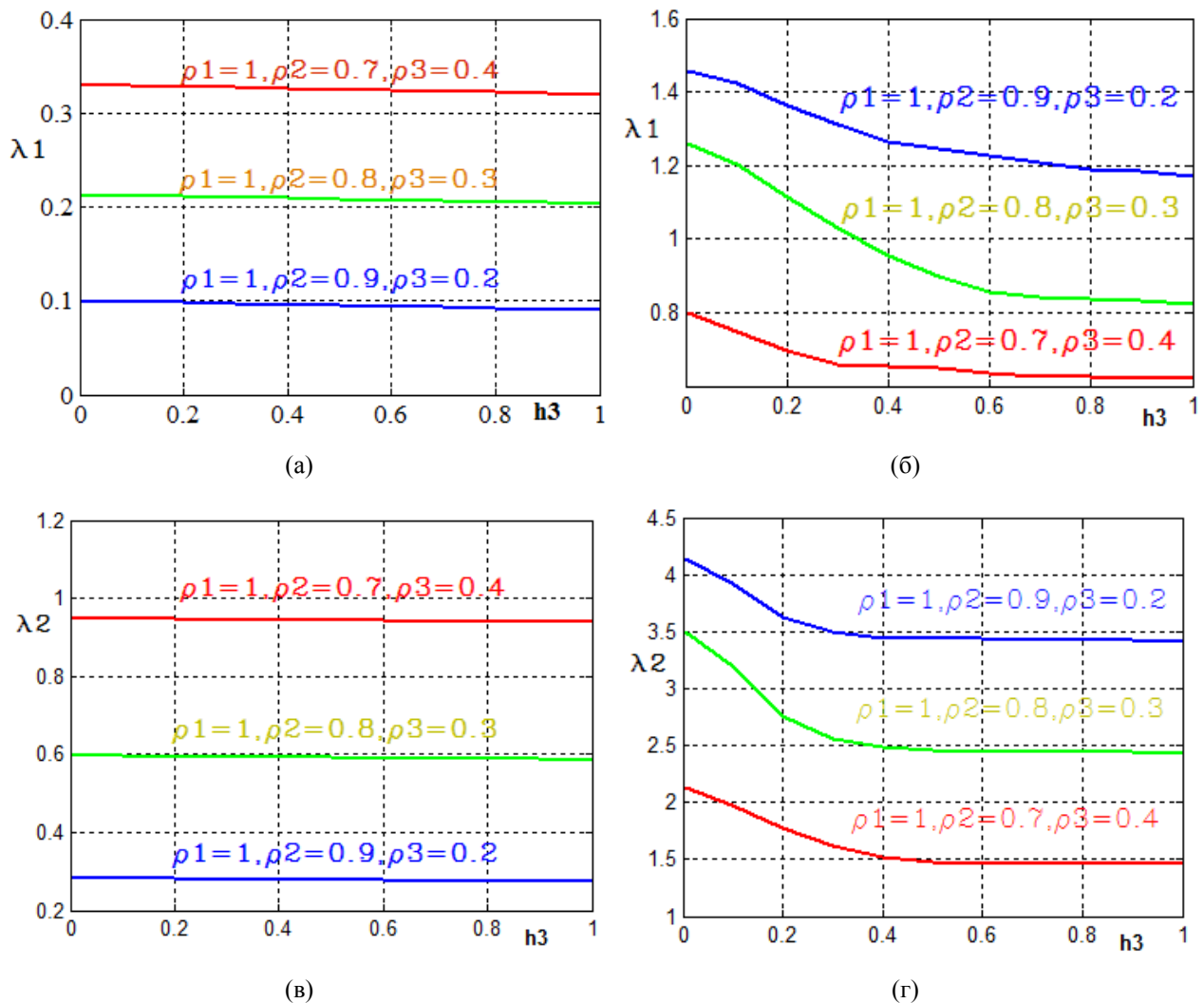


Рис.3. Зависимости собственных значений для λ_1 ($n=1$) (а,б) и для λ_2 ($n=2$) (в,г) от глубины

верхней жидкости h_3 по фазе и противофазе при разных плотностях и $h_1 = h_2 = 1$.

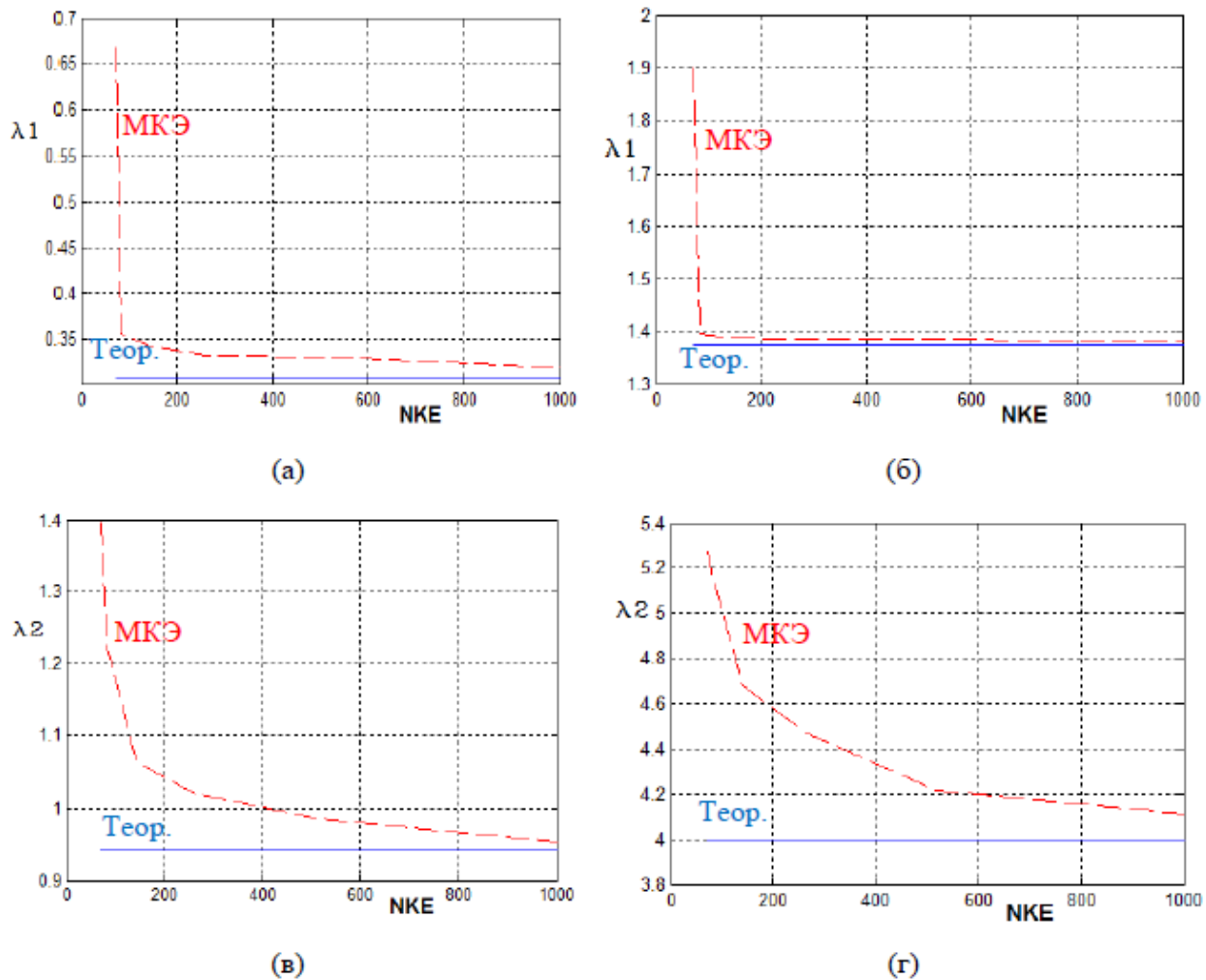


Рис.4. Зависимости собственных значений для λ_1 ($n=1$) (а,б) и для λ_2 ($n=2$) (в,г) от числа конечных элементов N_{KE} по фазе и противофазе при $\rho_1=1, \rho_2=0.7, \rho_3=0.1$ и $h_1=h_2=h_3=1$.

4. Определение формы колебаний

Из полученного вектора обобщенных координат $\{V\}_{mn}$, зная номера обобщенных переменных, отвечающих конкретному КЭ, можно воспользовавшись формулой (12) определить значение потенциала в любой точке КЭ, имея ранее вычисленную матрицу $[C]_{(9 \times 1)}$ этого КЭ и вычислить вектор $\{X(x, y)\}_{(9 \times 1)}$ для заданной точки. Кроме того, продифференцировав вектор $\{X(x, y)\}_{(9 \times 1)}$ получим значения производных потенциала в любой точке КЭ. Так как конечные элементы покрывают всю площадь задачи то и форма, таким образом, может быть определена в любой точке.

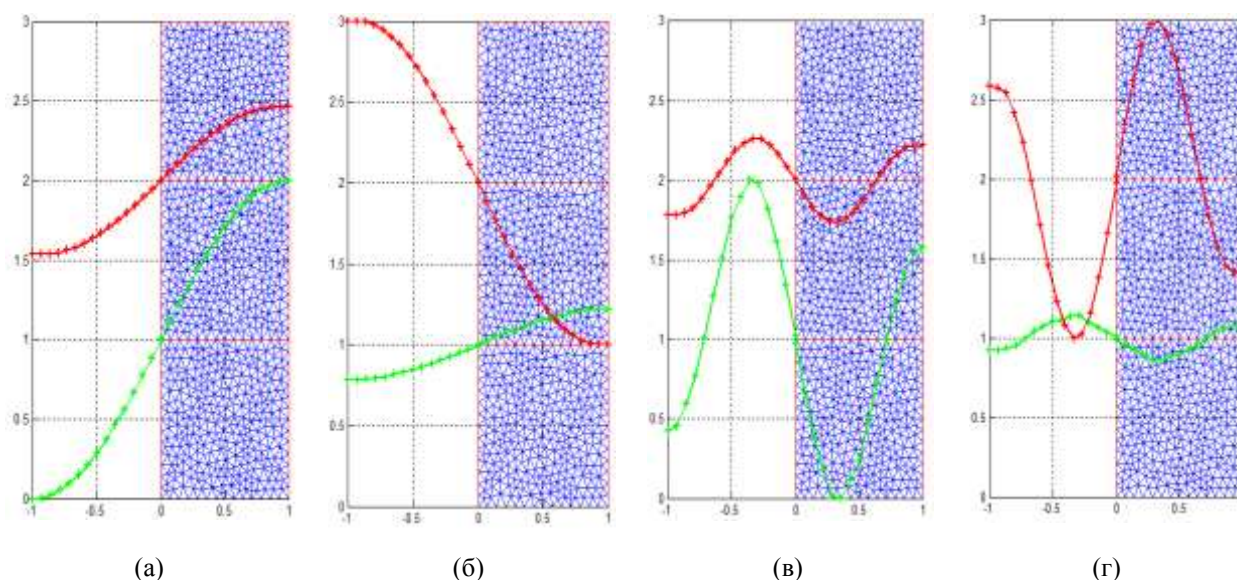


Рис.5. Формы колебаний для ($n = 1$) (а,б) и для ($n = 2$) (в,г) по фазе и противофазе.

Заключение

Полученные результаты показывают, что используемый метод конечных элементов позволяет достаточно точно определить собственные частоты и формы колебаний дискретно-стратифицированных жидкостей и следовательно можно воспользоваться этим методом для расчета колебаний жидкостей в баках другой формы.

Список литературы

1. Чашечкин Ю.Д. Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 6 (57). С. 67-95.
2. Ай Мин Вин. Колебания криогенной жидкости в неподвижном баке // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 9. С. 75-87. DOI: [10.7463/0914.0726215](https://doi.org/10.7463/0914.0726215)
3. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наукова думка, 1992. 592 с.
4. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Теоретическое и экспериментальное исследование параметрического возбуждения волн конечной амплитуды в двухслойной жидкости // Волны и дифракция. 9 Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Тбилиси: 1985, т. 2. С. 53-56.
5. Темнов А.Н., Ай Мин Вин. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. Спец. вып. С. 86-101.

6. Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., 2013. № 11. С 547-556. DOI: [10.7463/1113.0619258](https://doi.org/10.7463/1113.0619258)
7. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5(56). С. 109-116.
8. Газиев Э.Л. Моделирование собственных колебаний системы «идеальная капиллярная жидкость-баротропный газ» в цилиндрическом контейнере // Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC-2003). Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. Т. 3. С. 51-52.
9. Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 7(7) DOI: [10.18698/2308-6033-2012-7-285](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-7-285)
10. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном. Прикладная гидромеханика. 2008. №1. С.33-38.
11. Mikhayluk A.V., Timokha A.N. Variational formulations for a spectral problem with parameter on the interface of two mediums // Dopov. Nats. Akad. Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. 1995. Vol. 45, No. 10, Pp. 38-40.
12. Попов Д.Н., Панайотти С.С., Рябинин М.В. Гидромеханика. М.: Учебное пособие. 2014. 320 с.
13. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2002. 185 с.
14. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение. 2003. 520 с.
15. Калиниченко В.А., Со Аунг Наинг. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. №12(24). DOI: [10.18698/2308-6033-2013-12-1138](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1138)
16. Темнов А. Н., Вин Ко Ко. Механические аналоги колебаний дискретно-стратифицированной жидкости // Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения Феодосьева В.И. 17–19 мая 2016 г., Сборник тезисов. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. 364 с.
17. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Тимофеев А.С. Экспериментальное исследование поля скоростей параметрически возбуждаемых волн в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 161-166.

Finite Element Calculation of Discrete Stratified Fluid Vibrations

Ko Ko Win^{1,*}, A.N. Temnov¹

* win.c.latt@gmail.com

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: vibrations of liquids, vibration frequency and waveform, functional, generalized coordinates, matrix of stiffness and mass, local and global coordinates

Many publications, which consider a problem of small vibrations of an incompressible ideal fluid, completely filling the stationary cylindrical tank, have the long lists of references in the field concerned. This paper uses the finite element method to consider vibrations of three incompressible fluids, defines natural frequencies of vibrations, and builds the vibration forms of the interface surface of fluids for the double-tone vibrations. It shows how the vibration frequency depends on the ratios of vibrating fluid density and thicknesses of fluid layers and compares the numerical calculation results with the analytically obtained exact values.

The paper describes a variational formulation of the problem concerning the natural vibrations of immiscible fluids and using the finite element method provides a numerical implementation to define the fixed values of the functional that meets the variational problem. The reliability of the numerical results obtained is proved by their approximation to the result of calculating frequencies derived from the solutions of the problem of natural vibrations of fluid in a cylindrical vessel with a different fluid depth. To perform all numerical calculations was used the Matlab software.

References

1. Chashechkin Yu.D. Fluid mechanics: consistent analytical, numerical and laboratory models of stratified flows. *Vestnik MGTU im. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Ser. Natural Sciences*, 2014, no.6 (57), pp. 67-95. (In Russian).
2. Ay Min Vin. Cryogenic liquid fluctuations in a motionless tank. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N. E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 9, pp. 75-87. (In Russian). DOI: [10.7463/0914.0726215](https://doi.org/10.7463/0914.0726215)
3. Babskiy V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskiy N.D., Myshkis A.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Solution method for hydromechanics problems in zero-gravity state]. Kiev: Naukova dumka Publ., 1992. 592 p. (In Russian).
4. Kalinichenko V.A., Nesterov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. [Theoretical and experimental study of parametric excitation of finite amplitude waves in two-layer liquid]. *Volny i difraktsiya. 9 Vsesoyuznyy simpozium po difraktsii i rasprostraneniyu voln* [Waves and diffraction. 9 all-union workshop on waves diffraction and propagation]. Tbilisi, 1985, vol. 2, pp. 53-56. (In Russian).

5. Temnov A.N., Ay Min Vin. On stratified fluid movement in moving solid body cavity. *Vestnik MGTU im. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, spec. issue, pp. 86-101. (In Russian).
6. Goncharov D.A. Dynamics of two-layer liquid divided by an elastic dividing wall with an allowance for surface tension forces. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N. E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 11, pp. 547-556. (In Russian). DOI: [10.7463/1113.0619258](https://doi.org/10.7463/1113.0619258)
7. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A., Kokushkin V.V. Small oscillations of two-layer liquid in view permeability of separator. *Vestnik MGTU im. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 5(56), pp. 109-116. (In Russian).
8. Gaziev E.L. [Self-oscillation modelling for “ideal capillary fluid-barotropic gas” system in cylindrical package]. *Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC-2003)*. Simferopol': KNTs NANU, 2013. T. 3. C. 51-52. (In Russian).
9. Kolesnikov K.S., Pozhalostin A.A., Shkapov P.M. Problems of hydromechanical systems dynamics in proceedings of the Zhukovsky Theoretical Mechanics Department. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012. no. 7(7) (In Russian). DOI: [10.18698/2308-6033-2012-7-285](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-7-285)
10. Kononov Yu.N., Tatarenko E.A. Free oscillations of elastic membranes and two-layer liquid in rectangular channel with elastic bottom. *Prikladnaya gidromekhanika = Applied Hydromechanics*, 2008, no. 1, pp. 33-38. (In Russian).
11. Mikhayluk A.V., Timokha A.N. Variational formulations for a spectral problem with parameter on the interface of two mediums. *Dopov. Nats. Akad. Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 1995, vol. 45, no. 10, pp. 38-40.
12. Popov D.N., Panaiotti S.S., Ryabinin M.V. *Gidromekhanika [Hydromechanics]*. Moscow, Uchebnoe posobie Publ., 2014. 320 p. (In Russian).
13. Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki [Differential equations of mathematical physics]*. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2002. 185 p. (In Russian).
14. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket [Rocket dynamics]*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 520 p. (In Russian).
15. Kalinichenko V.A., So Aung Naing. Faraday waves in a movable tank and their mechanical analog. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 12(24). (In Russian). DOI: [10.18698/2308-6033-2013-12-1138](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1138)
16. Temnov A. N., Vin Ko Ko. [Mechanical analog for discrete-stratified fluid]. *Vserossiyskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Mekhanika i matematicheskoe modelirovanie v tekhnike», posvyashchennaya 100-letiyu so dnya rozhdeniya Feodos'yeva V.I. 17–19 maya 2016 g., Sbornik tezisov [Russian sci.-tech. conf. “Mechanics and mathematical modelling in technics” dedicated to 100-th V.I. Feodos'ev's anniversary. May 17-19, 2016. Abstracts]*. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2016. 364 p. (In Russian).
17. Kalinichenko V.A., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya., Timofeev A.S. Experimental study of the velocity field of parametrically excited waves in a two-layer liquid. *Izv. AN SSSR. MZhG*, 1991, no. 5, pp. 161-166. (In Russian). (English version of journal: *Fluid Dynamics*, 1991, vol. 26, no. 5, pp. 771-775. DOI: [10.1007/BF0105100](https://doi.org/10.1007/BF0105100)).