Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 05. С. 122–139.

DOI: **10.7463/0516.0840425**

Представлена в редакцию: 02.04.2016
Исправлена: 16.04.2016

© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 531.1, 531.8

Об основных уравнениях магнитостатики

Макаров А. М.[1,*], **Лунёва Л. А.**[1], **Макаров К. А.**[1]

*anmak2009@rambler.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Важнейшими физическими объектами магнитного поля в сплошной среде являются молекулярные токи Ампера, дипольные магнитные моменты элементов тока и намагничение среды. В работе проведено исследование физической взаимосвязи между этими объектами и уточнены соотношения между ними на двусторонней границе рассматриваемой ограниченной области пространства с использованием методологии математической физики, в которой краевые задачи рассматриваются как предельные. В результате проведённого анализа получено новое условие замкнутости токов намагничения и строго установлена соленоидальность векторного потенциала стационарного магнитного поля.

Ключевые слова: магнитостатика, токи намагничения, дипольный магнитный момент элемента тока, намагничение среды

Введение

Проблема построения теории электромагнитного поля, в частности, магнитостатики, имеет давнюю историю [1]. К настоящему времени основные понятия, определения и уравнения макроскопической магнитостатики можно считать установленными [2]-[5]. Целью настоящей работы является уточнение основных понятий классической магнитостатики и основных соотношений между физическими величинами, в частности, при формулировке условия замкнутости токов намагничения и свойства соленоидальности поля векторного потенциала.

В научной и учебной литературе [6-14] чаще всего изложение основных закономерностей магнитостатики начинается с утверждения справедливости закона Био-Савара-Лапласа как результата обобщения опытных фактов. Современное изложение теоретических основ электродинамики содержится, в частности, в работах [17-21]. Работы [22-25] посвящены исследованию общих проблем классической электродинамики специфическими (нестандартными) методами. Монография акад. Н.Е. Кочина [26] послужила математическим основанием настоящего исследования. Работы [27-32] содержат результаты исследований авторов по классической электродинамике, в частности, работа [32] по свойствам

электрического поля в диэлектрической среде в методическом плане является идейной предшественницей настоящего исследования.

Основные дифференциальные уравнения теории стационарного магнитного поля в изотропной среде с эффектами намагничения с равным успехом могут быть установлены либо в рамках исходной гипотезы о существовании векторного поля намагниченности среды, либо в рамках исходной гипотезы о существовании токов намагничения [7]. Существует метод вывода основных уравнений магнитостатики с использованием непосредственного определения магнитного дипольного момента единицы объёма среды как функции токов намагничения [4]. Известны примеры вывода закона Био-Савара-Лапласа из постулированных дифференциальных уравнений магнитостатики [12-14]. Ключевым моментом построения замкнутой теории стационарного магнитного поля в среде с эффектами намагниченности является выявление свойств векторного потенциала $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, в частности, его соленоидальности. Этот момент имеет место, как при индуктивном, так и при дедуктивном методе построения теории. Практически во всех перечисленных в списке литературы работах тем или иным способом возникающий в процессе рассуждений (интегральная форма теоремы Гаусса-Остроградского) некоторый интеграл по замкнутой поверхности принимается равным нулю. Заметим, что контрольная замкнутая поверхность проводится при этом *вне рассматриваемого тела* или в бесконечности (в последнем случае считается, что источники поля находятся в области конечных размеров). Остаётся открытым вопрос, что будет происходить с объёмом конечных размеров, который выделен замкнутой контрольной поверхностью из изотропной магнитной среды.

По-видимому, требует обсуждения понятие «условие замкнутости токов намагничения» $\int \vec{j}_m \cdot dV = 0$, где векторное поле $\vec{j}_m$ является объёмной плотностью токов намагничения, интеграл вычисляется по объёму тела (по объёму магнетика) [4]. Это условие, как принято считать, необходимо для обеспечения независимости магнитного дипольного момента системы токов намагничения от выбора начала координат.

Важным моментам, на наш взгляд, является обсуждение вопроса о физически более обоснованных зависимостях для векторных полей, описывающих физические явления в области конечных размеров, по сравнению с аналогичными зависимостями, справедливыми для бесконечного пространства.

Перейдём к рассмотрению существа дела. Проведённые ниже выкладки справедливы в условиях магнитостатики в отсутствие токов проводимости в рассматриваемой среде. Следуя в методическом плане известной работе Я.И. Френкеля [7], рассмотрим последовательно вариант построения теории, принимая «a priori» гипотезу о первичности понятия «намагниченность среды», и вариант построения теории с гипотезой о первичности «молекулярных токов» (токи Ампера, токи намагничения).

Гипотеза 1. Намагниченность

Пусть в изотропной, не обязательно однородной среде имеется векторное поле намагниченности $\vec{M} = \vec{M}(\vec{r})$, что позволяет определить магнитный дипольный момент элементарного объёма в окрестности точки наблюдения:

$$d\vec{P}_m = \vec{M} \cdot dV \,. \qquad (1)$$

Соотношение (1) фактически является определением понятия «намагниченность среды».

Если $\vec{r}'$ - радиус-вектор рассматриваемого элементарного объёма среды, а $\vec{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения, то вектор $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ является вектором с началом в точке расположения источника поля и с концом в точке наблюдения. В предположении $R >> r'$ справедливы известные выражения для элементарного векторного потенциала магнитного поля, образованного магнитным моментом элементарного объёма

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot d\vec{A} = \frac{d\vec{P}'_m \times \vec{R}}{R^3} = \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' \equiv \vec{M}(\vec{r}') \times grad'\left(\frac{1}{R}\right) \cdot dV' \,. \qquad (2)$$

Вектор $d\vec{A}$ соотношением (2) определён в точке наблюдения как часть векторного потенциала $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, образованная рассматриваемым дипольным магнитным моментом элементарного объёма среды в окрестности точки расположения элементарного источника поля. Ниже штрих у символа переменной векторной величины $\vec{M}' = \vec{M}(\vec{r}')$ в последовательности выражений (2) подчёркивает условие вычисления отмеченной величины в точке расположения источника поля. Штриховой верхний индекс у операции *grad* означает, что операция выполняется по координатам источника поля, это обозначение будет использовано и в последующих выкладках. Полная величина векторного потенциала магнитного поля определяется интегрированием зависимости (2) по произвольному объёму среды (интегрирование по координатам точек расположения источников поля):

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \vec{A} = \int_V \vec{M}' \times grad'\left(\frac{1}{R}\right) \cdot dV' \equiv \int_V \frac{rot'\vec{M}'}{R} \cdot dV' - \int_V rot'\left(\frac{\vec{M}'}{R}\right) \cdot dV' \,.$$

Второй из интегралов правой части полученного соотношения можно преобразовать с использованием известной теоремы Гаусса-Остроградского:

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \vec{A} = \int_V \frac{rot'\vec{M}'}{R} \cdot dV' - \oint_S \frac{\vec{n}' \times \vec{M}'}{R} \cdot dS' \,. \qquad (3)$$

Здесь S – замкнутая поверхность, ограничивающая рассматриваемый объём среды, $\vec{n}'$ - единичный вектор нормали к элементу поверхности dS', внешней по отношению к рассматриваемому объёму.

Соотношение (3) сравнивается с известным соотношением для векторного потенциала магнитного поля, обусловленного токами проводимости в среде без эффектов намагничения:

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\cdot\vec{A}=\int_V\frac{\vec{j}'}{R}\cdot dV'+\oint_S\frac{\vec{i}'}{R}\cdot dS',$$

где $\vec{j}'=\vec{j}(\vec{r}')$ - объёмная плотность токов проводимости, $\vec{i}'=\vec{i}(\vec{r}')$ - поверхностная плотность токов проводимости. В итоге приходят к зависимости

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\cdot\vec{A}=\int_V\frac{\vec{j}'_m}{R}\cdot dV'+\oint_S\frac{\vec{i}'_m}{R}\cdot dS'. \qquad (4)$$

Следующим шагом вводятся как постулат (в рамках рассматриваемой гипотезы) объёмная плотность

$$\vec{j}_m=rot\vec{M} \qquad (5)$$

и поверхностная плотность токов намагничения

$$\vec{i}_m=-\vec{n}\times\vec{M}. \qquad (6)$$

Соотношение (5) справедливо в произвольной точке рассматриваемого объёма среды, а соотношение (6) в строгой постановке должно рассматриваться как предельное соотношение, справедливое при стремлении точки рассматриваемого объёма к соответствующей точке поверхности, т.е. изнутри объёма. Можно говорить, что определённая соотношением (6) поверхностная плотность токов намагничения является «внутренней» поверхностной плотностью токов намагничения. Заметим, что в рамках рассматриваемой исходной гипотезы реальный физический смысл имеет понятие «намагниченность среды», токи намагничения являются результатом формальных определений. Обратим внимание читателя на глубокую связь векторного поля объёмной и поверхностной плотностей токов намагничения. В учебной литературе встречается соотношение (4), но при этом, как правило, поверхностная плотность токов намагничения $\vec{i}_m$ рассматривается как некоторая самостоятельная величина, которую можно рассматривать независимо от объёмной плотности токов намагничения, т.е. как стороннюю величину, определяемую внешними условиями.

В силу определения (5) имеет место условие:

$$div\vec{j}_m=0. \qquad (7)$$

Интегральный аналог условия (7) имеет вид:

$$\oint_S\vec{j}_m\cdot\vec{n}\cdot dS=0. \qquad (8)$$

Следует заметить, что для произвольной замкнутой поверхности, ограничивающей некоторый объём конечных размеров в рассматриваемой среде, справедливо интегральное условие (8), а локальное условие

$$\vec{j}_m\cdot\vec{n}=0 \qquad на \quad S$$

может не иметь места. Поверхностная дивергенция объёмной плотности токов намагничения имеет вид:

$$Div\vec{j}_m = \vec{n} \cdot (\vec{j}_{m2} - \vec{j}_{m1}) = 0,$$

которое следует рассматривать в качестве условия непрерывности нормальных компонент векторов объёмной плотности токов намагничения на поверхности раздела двух сред (нормаль $\vec{n}$ к поверхности раздела проводится из области 1 в область 2). Соотношение (7) и его интегральный аналог (8) составляют основные условия магнитостатики: электрические заряды не накапливаются в рассматриваемой физической системе с течением времени.

Векторное поле намагниченности среды в рассматриваемом объёме предполагается непрерывным вплоть до границы. Для произвольного векторного поля в условиях непрерывности справедлива теорема Гаусса-Остроградского. Из формального соотношения

$$\int_V rot\vec{M} \cdot dV \equiv \oint_S \vec{n} \times \vec{M} \cdot dS$$

с необходимостью следует физическое условие «замкнутости токов намагничения»:

$$\int_V \vec{j}_m \cdot dV + \oint_S \vec{i}_m \cdot dS = 0. \qquad (9)$$

Обратим внимание читателя на отличие условия (9) от обычно используемого условия замкнутости токов намагничения [4]:

$$\int_V \vec{j}_m \cdot dV = 0.$$

На произвольной поверхности раздела двух сред имеет место условие

$$Rot\vec{M} = \vec{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = \vec{i}_{m1} + \vec{i}_{m2} = \vec{i}_{ms}. \qquad (10)$$

В записанном условии нормаль $\vec{n}$ к поверхности раздела проводится из области 1 в область 2. Вектор $\vec{n}$ является «внешней» нормалью по отношению к области 1 и одновременно «внутренней» нормалью по отношению к области 2. Скачок вектора $\vec{M} \times \vec{n}$ на поверхности раздела двух сред определяется суммой поверхностных плотностей токов намагничения, текущих по одной и другой стороне поверхности раздела. Суммарная поверхностная плотность токов намагничения $\vec{i}_{ms}$ обычно воспринимается как поверхностная плотность токов намагничения, текущих по поверхности раздела двух сред. Заметим, что условие (10) чаще записывают в форме

$$M_{2t} - M_{1t} = i_{ms} \cdot \vec{\nu} \cdot \vec{t},$$

где $\vec{t}$ - произвольный единичный безразмерный вектор, лежащий на поверхности раздела, M_{2t} и M_{1t} - проекции соответствующих векторов намагниченности среды на направление $\vec{t}$, вспомогательный вектор $\vec{\nu}$ определён соотношением: $\vec{\nu} = \vec{s} \times \vec{n}$, где $\vec{s}$ - единичный безразмерный вектор, совпадающий по направлению с вектором поверхностной плотности токов намагничения $\vec{i}_{ms}$.

Если постулировать, что токи намагничения существуют наравне с токами проводимости, то известная зависимость для магнитной индукции, обусловленной токами проводимости в вакууме, преобразуется к виду:

$$rot\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0 \cdot (\vec{j} + rot\vec{M}) \ ,$$

что позволяет ввести вектор напряжённости магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \ . \qquad (11)$$

Для соотношения (11) справедливо одно из основных уравнений магнитостатики:

$$rot\vec{H} = \vec{j} \ . \qquad (12)$$

В силу уравнения (12) по аналогии с условием (10) имеет место соотношение между касательными компонентами напряжённости магнитного поля на границе раздела двух областей

$$Rot\vec{H} = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 = \vec{i} \ .$$

Эквивалентная форма записи рассматриваемого условия имеет вид:

$$H_{2t} - H_{1t} = i \cdot \vec{\nu} \cdot \vec{t} \ .$$

В этом соотношении величину поверхностной плотности токов проводимости $\vec{i}$ формально можно рассматривать как сумму поверхностных токов проводимости, текущих по одной и другой стороне поверхности раздела:

$$\int_V rot\vec{H} \cdot dV \equiv \oint_S \vec{n} \times \vec{H} \cdot dS \rightarrow \vec{i}_{in} = -\vec{n} \times \vec{H} \ \ на \ \ S \ .$$

Определение ортов $\vec{\nu}$ и $\vec{t}$ аналогично разобранному выше случаю.

Фактически введение величины $\vec{i}_{in}$ (или $\vec{i}_{out}$) является только удобным обозначением специфического касательного к рассматриваемой поверхности вектора $\vec{H} \times \vec{n}$, хотя величина $\vec{i}$ имеет вполне определённое физическое содержание.

Уравнение (12) можно рассматривать как следствие условия отсутствия накопления электрического заряда в произвольном элементарном объёме среды при наличии объёмной плотности токов проводимости

$$div\vec{j} = 0 \ .$$

Интегральный аналог приведённого уравнения

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$

и условие непрерывности нормальных компонент объёмной плотности токов проводимости на поверхности раздела двух областей

$$Div\vec{j} = \vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0$$

аналогичны полученным выше зависимостям для токов намагничения.

В простейшем случае линейной изотропной среды материальное уравнение среды записывается в форме локального линейного однородного соотношения между вектором намагниченности среды и вектором напряжённости магнитного поля:

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H} = (\mu - 1) \cdot \vec{H} \,. \tag{13}$$

Здесь μ - магнитная проницаемость, а χ - магнитная восприимчивость среды.

С помощью уравнения (13) определяется недостающий скалярный объёмный источник векторного поля намагничения среды:

$$div\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{grad\mu}{\mu^2} \,. \tag{14}$$

Итог: принимая гипотезу о существовании векторного поля намагниченности среды, с помощью которого однозначно определяется магнитный дипольный момент элементарного объёма среды, приходят к заключению о том, что источниками векторного поля намагниченности среды являются векторная объёмная ($rot\,\vec{M} = \vec{j}_m$) и векторная поверхностная плотность токов намагничения ($\vec{n} \times \vec{M} = -\vec{i}_m$), которые связаны между собой условием замкнутости токов намагничения (9) в произвольном объёме среды. Кроме того, в неоднородной изотропной среде при отличном от нуля скалярном произведении векторного поля магнитной индукции на векторное поле градиента магнитной проницаемости среды имеет место скалярная объёмная плотность источника поля намагниченности среды (14). Непрерывное векторное поле намагниченности среды обусловлено не только объёмными, но и поверхностными источниками векторного поля.

Вычислим величину индукции магнитного поля в рамках рассматриваемой исходной гипотезы

$$\begin{aligned}
&\vec{B} = rot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} rot \int_V \frac{\vec{j}_m}{R} \cdot dV + \frac{\mu_0}{4\pi} rot \oint_S \frac{\vec{i}_m}{R} \cdot dS = \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}_m \times grad\frac{1}{R} \cdot dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \vec{i}_m \times grad\frac{1}{R} \cdot dS = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_m \times \vec{R}}{R^3} \cdot dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{i}_m \times \vec{R}}{R^3} \cdot dS.
\end{aligned} \tag{15}$$

Легко видеть, что полученная зависимость (15) совпадает по форме с формулировкой закона Био-Савара-Лапласа для индукции магнитного поля, образованного стационарными объёмными и поверхностными токами проводимости.

В заключение раздела в рамках рассматриваемой исходной гипотезы вычислим ротор векторного поля магнитной индукции. Предварительно убедимся в том, что поле векторного потенциала является соленоидальным:

$$\frac{4\pi}{\mu_0} div\vec{A} = \int_V div\frac{\vec{M}'\times\vec{R}}{R^3}dV = \int_V\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\cdot rot\vec{M}' - \vec{M}'\cdot rot\frac{\vec{R}}{R^3}\right)dV \equiv 0.$$

Из полученного результата непосредственно следует

$$rot\vec{B} = rotrot\vec{A} = -\Delta\vec{A},$$

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\cdot\Delta\vec{A} = \int_V \Delta\frac{\vec{j}_m}{R}\cdot dV + \oint_S \Delta\frac{\vec{i}_m}{R}\cdot dS = \int_V \vec{j}_m\Delta\frac{1}{R}\cdot dV + \oint_S \vec{i}_m\Delta\frac{1}{R}\cdot dS,$$

$$-4\pi\int_V \vec{j}_m\delta(\vec{r}-\vec{r}')\cdot dV - 4\pi\oint_S \vec{i}_m\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}')dS = -4\pi\cdot\vec{j} - 4\pi\oint_S \vec{i}_m\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}')dS.$$

Поэтому для внутренних точек области $\vec{r}\neq\vec{r}$, имеет место уравнение

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}_m$$

- ожидаемый результат в отсутствие токов проводимости.

Гипотеза 2. Токи намагничения

Рассмотрим произвольный объём V изотропной среды. Пусть достаточно гладкая замкнутая поверхность S является поверхностью, ограничивающей рассматриваемый объём. Пусть в объёме V имеется объёмная плотность токов намагничения $\vec{j}_m$, а на внутренней боковой поверхности S – поверхностная плотность токов намагничения $\vec{i}_m$. Предположим в качестве основной гипотезы, что упомянутые физические величины связаны между собой условием «замкнутости»:

$$\int_V \vec{j}_m\cdot dV + \oint_S \vec{i}_m\cdot dS = 0. \qquad (16)$$

В условиях магнитостатики должно выполняться уравнение

$$div\vec{j}_m = 0 \qquad (17)$$

с известным физическим содержанием. Поскольку уравнение (17) имеет место, можно формально ввести (неявным образом) некоторое векторное поле $\vec{M}$, которое назовём векторным полем намагниченности среды:

$$\vec{j}_m = rot\vec{M}. \qquad (18)$$

Если токи намагничения связаны между собой условием замкнутости в форме (16), то с учётом постулата (18) имеем:

$$\int_V rot\vec{M}\cdot dV + \oint_S \vec{i}_m\cdot dS = \oint_S(\vec{n}\times\vec{M} + \vec{i}_m)\cdot dS = 0. \qquad (19)$$

Соотношение (19) справедливо для произвольной замкнутой поверхности, поэтому имеет место определение:

$$\vec{i}_m = -\vec{n} \times \vec{M} \quad \textit{на поверхности } S. \tag{20}$$

Выпишем зависимость элементарного векторного потенциала магнитного поля, образованного рассматриваемыми токами намагничения:

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot d\vec{A} = \frac{\vec{j}'_m}{R} \cdot dV' + \frac{\vec{i}'_m}{R} \cdot dS' = \frac{rot'\vec{M}'}{R} \cdot dV' - \frac{\vec{n}' \times \vec{M}'}{R} \cdot dS' . \tag{21}$$

Здесь, как и в первой части работы, вектор $d\vec{A}$ определён в точке наблюдения как часть векторного потенциала $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, образованная рассматриваемыми элементарными источниками поля – непосредственно током намагничения в элементе объёма dV' в окрестности точки расположения последнего и током намагничения в элементе поверхности dS' в точке расположения этого элемента поверхности. Полная величина векторного потенциала магнитного поля определяется интегрированием зависимости (21) по произвольному объёму среды V и по замкнутой поверхности S (интегрирование по координатам точек расположения источников поля):

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \vec{A} = \int_V \frac{rot'\vec{M}'}{R} \cdot dV' - \oint_S \frac{\vec{n}' \times \vec{M}'}{R} \cdot dS' \equiv$$

$$\equiv \oint_S \frac{\vec{n}' \times \vec{M}'}{R} \cdot dS' - \int_V grad'\left(\frac{1}{R}\right) \times \vec{M}' \cdot dV' - \oint_S \frac{\vec{n}' \times \vec{M}'}{R} \cdot dS' .$$

После очевидных преобразований (поверхностные интегралы сокращаются, штрихи у величин, связанных с положением источников поля опущены) получаем:

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \vec{A} = \int_V \frac{\vec{M} \times \vec{R}}{R^3} \cdot dV . \tag{22}$$

Сравнивая полученное выражение с известным выражением

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \vec{A} = \int \frac{d\vec{P}_m \times \vec{R}}{R^3} ,$$

убеждаемся в справедливости физического определения

$$d\vec{P}_m = \vec{M} \cdot dV . \tag{23}$$

Итог: принимая гипотезу о существовании токов намагничения (объёмная плотность токов намагничения и поверхностная плотность токов намагничения связаны между собой условием замкнутости (16)), приходим к заключению о том, что токи намагничения порождают векторное поле намагниченности среды, которое однозначно определяет величину магнитного дипольного момента элементарного объёма среды в пересчёте на единицу объёма в соответствии с локальной зависимостью (23).

Вычисление дивергенции поля векторного потенциала (22) проведено выше, результат этого вычисления: поле векторного потенциала $\vec{A}$ является соленоидальным $(div\vec{A} = 0)$. В рамках рассматриваемой гипотезы не представляет труда получить остальные основные соотношения магнитостатики.

Таким образом, гипотезы 1 и 2 являются эквивалентными в том смысле, что результаты одной из гипотез приводят к исходным положениям другой гипотезы.

Гипотеза 3. Магнитный дипольный момент произвольного объёма среды

Рассмотрим произвольный объём V конечных размеров в изотропной среде. Пусть S является боковой поверхностью рассматриваемого объёма. Если в объёме V существует объёмная плотность токов намагничения $\vec{j}_m$, а по боковой поверхности S течёт ток намагничения с поверхностной плотностью $\vec{i}_m$, то выражение для магнитного дипольного момента объёма в целом имеет вид:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2}\cdot\int_V \vec{r}\,'\times\vec{j}\,'_m\cdot dV' + \frac{1}{2}\cdot\oint_S \vec{r}\,'\times\vec{i}\,'_m\cdot dS' \,. \qquad (24)$$

Здесь $\vec{r}\,'$ - радиус-вектор соответствующего элемента объёма или элемента боковой поверхности. Выражение (24) как физическая величина, характеризующая определенную физическую систему, не должна зависеть от выбора начала координат. Легко проверить, что это требование выполняется, если выполнено условие «замкнутости токов намагничения» (16)

$$\int_V \vec{j}\,'_m\cdot dV' + \oint_S \vec{i}\,'_m\cdot dS' = 0 \,.$$

Вспомним, что в рассматриваемом объёме справедливо уравнение $\vec{j}_m = rot\vec{M}$, а на его боковой поверхности справедливо уравнение $\vec{i}_m = -\vec{n}\times\vec{M}$:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2}\cdot\int_V \vec{r}\,'\times rot'\vec{M}'\cdot dV' - \frac{1}{2}\cdot\oint_S \vec{r}\,'\times(\vec{n}'\times\vec{M}')\cdot dS' \,. \qquad (25)$$

Здесь $\vec{n}'$ - единичный вектор нормали к элементу поверхности dS', внешней относительно рассматриваемого объёма. Для непрерывного векторного поля $\vec{M}$ интеграл по объёму в выражении (25) можно преобразовать [4]:

$$\int_V \vec{r}\times(\nabla\times\vec{M})\cdot dV = \oint_S \vec{r}\times(\vec{n}\times\vec{M})\cdot dS - \int_V (\vec{M}\times\nabla)\times\vec{r}\cdot dV \,. \qquad (26)$$

Если заметить при этом [4], что

$$(\vec{M}\times\nabla)\times\vec{r} = -\vec{M}\cdot div\vec{r} + \vec{M} = -2\vec{M} \,, \qquad (27)$$

то, подставляя тождество (27) в тождество (26), а результат подстановки – в выражение (25), при этом поверхностные интегралы просто сокращаются, выражение (25) можно привести к виду:

$$\vec{P}_m = \int_V \vec{M}\cdot dV \,. \qquad (28)$$

Из соотношения (28), очевидно, следует локальная зависимость:

$$d\vec{P}_m = \vec{M}\cdot dV \,.$$

Таким образом, можно считать, что непосредственно установлено физическое содержание и взаимосвязь понятий намагниченность среды и токи намагничения.

В курсе «Теоретическая физика. Т.8. Электродинамика сплошных сред» Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица [4] магнитный момент произвольного объёма магнетика фактически введён следующим образом:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2}\cdot\int_V \vec{r}'\times\vec{j}'_m\cdot dV' = \frac{1}{2}\cdot\int_V \vec{r}'\times rot'\vec{M}'\cdot dV' .$$

Это определение неудовлетворительно, поскольку из него следует утверждение, что магнитный момент объёма магнетика с постоянной величиной вектора намагниченности (при этом токи намагничения в рассматриваемом объёме отсутствуют) должен равняться нулю. Результат [4]

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2}\cdot\int_V \vec{r}'\times\vec{j}'_m\cdot dV' = \int_V \vec{M}'\cdot dV' \qquad (29)$$

не следует из предыдущего определения, поскольку интеграл по замкнутой поверхности $\oint_S \vec{r}\times(\vec{n}\times\vec{M})dS$ остаётся в результирующем выражении. Авторы [4] фактически использовали методический приём классической монографии Абрагама-Беккера [6], предположив, что можно провести контрольную поверхность не внутри магнитной среды (как это следовало бы сделать), а вне магнетика, где по условию вектор намагниченности равен нулю. Этот же приём в том или ином варианте использован в ряде монографий и учебников по классической макроскопической электродинамике [8], [9]-[11].

Соотношение (29) может породить ошибочное заключение, что вектор намагниченности среды $\vec{M}$ в рассматриваемой точке пространства является следствием наличия объёмной плотности токов намагничения в той же самой точке пространства. Наиболее ярко эта возможность проявилась в учебнике «Классическая электродинамика» В.Пановского и М.Филипс [11]:

«Эти токи (*имеются в виду объёмная плотность токов намагничения,* курсив наш) выразим через магнитный момент единицы объёма, или намагниченность

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{\xi}\times\vec{j}_m\right),$$

где $\vec{\xi}$ - радиус-вектор точки с плотностью тока $\vec{j}_m$. Магнитный момент некоторого объёма в целом будет равен

$$\vec{m} = \int \vec{M}\cdot dV = \frac{1}{2}\cdot\int\left(\vec{\xi}\times\vec{j}_m\right)\cdot dV\,».$$

В результате довольно сложных вычислений авторы приходят к заключению:

«Если намагниченность равна $\vec{M}$, то векторный потенциал имеет вид

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\vec{A} = \int \vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{r}\right) dv = \int \frac{\nabla' \times \vec{M}}{r} dv - \int \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dv. \qquad (7.52)$$

Но так как

$$\int \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dv = -\int \frac{\vec{M} \times d\vec{S}}{r},$$

то второй член в соотношении (7.52) можно обратить в нуль, если поверхность интегрирования выбрать *вне области, где имеются токи*» (курсив наш). По этому поводу надо сказать следующее. Во-первых, не токи, а намагниченность, которая может иметь место и в отсутствие токов (в этом случае намагниченность удовлетворяет уравнению $rot\vec{M} = 0$ и совсем не обязательно выполняется соотношение $\vec{M} = 0$), хотя вне магнетика, очевидно, $\vec{M} = 0$ на любой поверхности. Во-вторых, остаётся вопрос, что произойдёт с результатом, если контрольную поверхность провести *внутри* рассматриваемого объёма?

4. Объём конечных размеров в среде с непрерывными физическими свойствами

Вывод дифференциальных уравнений магнитостатики в проводящей немагнитной среде из закона Био-Савара-Лапласа состоит из следующих последовательных операций: введение векторного потенциала магнитного поля, вычисление вихря векторного потенциала, доказательства соленоидальности векторного потенциала и, наконец, использование известных свойств математической теории потенциала. Выполнение обратной последовательности рассуждений с необходимостью включает в себя доказательство соленоидальности векторного потенциала магнитного поля. Аналогичное положение дел имеет место и в случае непроводящей магнитной среды.

В учебном пособии А.А.Власова [14] на основании принципа градиентной инвариантности векторного потенциала магнитного поля утверждается принципиальная возможность обеспечения условия соленоидальности векторного потенциала магнитного поля, постулируется выполнение этого условия, после чего из уравнения Пуассона $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ следует известное выражение для векторного потенциала магнитного поля $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}}{R} dV$. Обратим внимание читателя на два обстоятельства. Во-первых, в выкладках [14] использовано решение уравнения Пуассона для бесконечной области, оно не в полной мере описывает поле в области конечных размеров. Во-вторых, «исправленное» и «исходное» поля векторного потенциала эквивалентны только по отношению к вычислению вихря, эквивалентность относительно вычисления дивергенции требует проверки. В учебном пособии Ю.В.Новожилова и Ю.А.Яппе [12] условие соленоидальности векторного потенциала считается выполненным вследствие лоренцевой калибровки потенциалов электромагнитного поля в предельном случае стационарного состояния. Вопрос о том, удовлетворяет ли выражение (12.3) этому условию, авторы не рассматривают.

Заметим, что исходные дифференциальные уравнения магнитостатики представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Уравнение для векторного потенциала магнитного поля (уравнение в частных производных второго порядка) получается повторным дифференцированием одного из уравнений исходной системы. При этом расширяется «область решений» по сравнению с областью решений исходной системы уравнений первого порядка. Примером может служить получение внешне независимых друг от друга волновых уравнений для напряжённостей электрического и магнитного полей из системы уравнений Максвелла – системы уравнений первого порядка. И только использование дополнительного условия – условия калибровки Лоренца – позволяет в полной мере выявить основные физические соотношения в теории плоских гармонических электромагнитных волн. Отсюда следует, что проверка соленоидальности векторного потенциала является необходимым шагом методики построения теории стационарного магнитного поля.

У классиков электромагнетизма [1] имелись попытки рассматривать замкнутую контрольную поверхность, охватывающую объём конечных размеров, как двустороннюю поверхность. Эта идея, к сожалению, не в полном объёме использована в учебнике И.Н. Мешкова и Б.В.Чирикова [13]. Математическое обоснование подобных физических представлений можно найти в классической монографии акад. Н.Е.Кочина [26].

Выводы

- Уточнено доказательство отсутствия принципиального различия между гипотезой о первичности физического существования намагничения среды, или гипотезой о первичности физического существования токов намагничения среды (молекулярных токов Ампера) или гипотезой об определении магнитного момента элемента с током.

- Векторное поле намагничения среды в произвольной точке наблюдения внутри области конечных размеров определяется не только значением объёмной плотности токов намагничения в той же точке области, но и совокупностью поверхностной плотности токов намагничения среды, текущих по внутренней стороне поверхности, ограничивающей рассматриваемую конечную область пространства.

- Предложено новое условие замкнутости токов Ампера в произвольном объёме магнетика конечных размеров как части сплошной среды с эффектами намагничения. С математической точки зрения, условие замкнутости токов намагничения среды в пространственной области конечных размеров является следствием теоремы Остроградского-Гаусса, при этом не возникает необходимости рассматривать контрольную поверхность вне области с эффектами намагничения или поверхность, граничащую с немагнитным пространством.

- Соотношения на поверхности раздела сред в магнитостатике естественным образом учитывают двухстороннюю природу границы раздела, принятые в физике понятия «поверхностная плотность токов (проводимости или намагничения среды) » является алгеб-

раической суммой рассматриваемых предельных величин по разные стороны поверхности раздела.

- Уточнено доказательство свойства соленоидальности поля векторного потенциала в условиях магнитостатики.

Список литературы

1. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 512 с.
2. Пул Ч. Справочное руководство по физике. Фундаментальные концепции, основные уравнения и формулы. М.: Мир, 2001. 461 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т.2. Теория поля. М.: Физматлит, 2012. 536 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т.8. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005. 656с.
5. Угаров В.А. Специальная теория относительности. М.: Едиториал УРСС, 2005. 384с.
6. Абрагам М., Беккер Р. Теория электричества. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 281 с.
7. Френкель Я.И. Электродинамика. Т.1. Общая теория электричества. М.: Книга по требованию, 2012. 371 с.
8. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 2003. 504 с.
9. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. М.: Наука, 2003. 267 с.
10. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Часть 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 848 с.
11. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Физмаггиз, 1963. 432 с.
12. Новожилов Ю.В., Яппе Ю.А. Электродинамика. М.: Наука, 1978. 352 с.
13. Мешков И.Н., Чириков Б.В. Электромагнитное поле. Часть 1. Электричество и магнетизм. М.: Книга по требованию, 2013. 272 с.
14. Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. Москва-Ижевск.: РХД, 2010. 229 с.
15. Герасимов С.А. Намагниченное тело в воздухе: обратный парамагнитный эффект // Инженерная физика. 2011. № 9. С. 15-18.
16. Герасимов С.А. Неоднородное намагниченное тело в парамагнитной среде // Инженерная физика. 2012. № 8. С. 24-26.
17. Рухадзе А.А., Рухадзе К.З. Об условиях существования быстрой поверхностной волны Ценнека // Инженерная физика. 2011. № 4. С. 21-24.
18. Макаров В. П., Рухадзе А.А. Некоторые замечания к работе В. Г. Веселаго в УФН "Волны в метаматериалах: их роль в современной физике" // Инженерная физика. 2012. № 5. С. 11-12.

19. Макаров В. П., Рухадзе А.А. Тензор Минковского или тензор Абрагама? // Инженерная физика. 2012. № 8. С. 3-5.
20. Макаров В. П., Рухадзе А.А. Основы современной электродинамики материальных сред (Часть 1. От электромагнитостатики к уравнениям Максвелла) // Инженерная физика. 2012. № 10. С. 12-22.
21. Менде Ф.Ф. Новые подходы к современной классической электродинамике. Часть II // Инженерная физика. 2013. № 2. С. 03-17.
22. Mansuripur M. On the Foundational Equations of the Classical Electrodynamics // Resonance. 2013. No.2. P.130–150.
23. Планк М. Введение в теоретическую физику. Теория электричества и магнетизма. М.: УРСС, 2004. 184с.
24. Фушич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. Киев: Наукова Думка, 1983. 200 с.
25. Стражев В.И., Томильчик Л.М. Электродинамика с магнитным зарядом. Минск: Наука и техника, 1975. 336 с.
26. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 427 с.
27. Макаров А.М., Лунева Л.А., Макаров К.А. Теория и практика классической электродинамики. М.: Едиториал УРСС, 2014. 784 с.
28. Макаров А.М., Лунева Л.А., Макаров К.А. О структуре системы уравнений классической электродинамики // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3. С. 39–52.
29. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Система уравнений классической электродинамики в неподвижной изотропной среде // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 4. .С. 25 – 39.
30. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Аксиоматическое построение системы уравнений классической электродинамики. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. №1. С. 45-60. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1
31. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Уравнения классической электродинамики как следствие специальной теории относительности. // Радиооптика. МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2016. №2. С.26-47. DOI:10.7463/rdopt.0216.0837463
32. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А.. Об основных уравнениях электростатики изотропных диэлектриков. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. №2. С. 25-40.

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2016, no. 05, pp. 122–139.

DOI: **10.7463/0516.0840425**

Received: 02.04.2016
Revised: 16.04.2016

© Bauman Moscow State Technical Unversity

On the Basic Equations of the Magnetostatics

A.M. Makarov[1,*], L.A. Luneva[1], K.A. Makarov[1]

*anmak2009@rambler.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: magnetostatics, magnetization currents, magnetic dipole moment of the current element, magnetization of the medium

The paper studies the physical relationship between the main objects of the magnetic field in a continuous medium with magnetization effects. Consistently considers the following hypotheses: a hypothesis of the primacy and the physical reality of the magnetization vector field environment, a similar hypothesis about the real existence of Ampere currents (molecular currents, magnetization currents), a hypothesis of a magnetic dipole moment of the medium volume element in view of bulk density of electric currents in this volume. A more rigorous derivation of the basic differential equations of magnetostatics from the Biot-Savart-Laplace equation is proposed.

The well-known works justifying basic equations of magnetostatics use a procedure wherein when proving the local differential ratio is used a transformation of some volume integral to the surface integral bounding this volume. Thus, there is a specific way to select a closed surface that is either a surface in a vacuum (beyond the medium volume under consideration), or a surface of the conductor (a normal component of currents to the surface, here, becomes zero). In the paper the control surface is arbitrarily carried out within the volume of the medium under consideration, thereby leading to the mathematically sound result.

The paper analyzes the hypotheses listed above. The main feature of analysis is a succesively using concept of bilateralism surface bounding the medium volume of the arbitrary finite dimensions. The analysis allowed us to reveal the physical adequacy of the considered hypotheses, derive the appropriate differential equations for the basic vector fields of magnetostatics and obtain a new condition. The resulting condition for the closedness of magnetization currents is recorded in entire compliance with the well-known Gauss electrostatic law, which avoids the need for additional, but not always reasonable assumptions.

References

1. Uitteker E. *Istoriya teorii efira i elektrichestva* [A history of the theories of aether and electricity]. Izhevsk, NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2001. 512 p. (in Russian).

2. Pul Ch. *Spravochnoe rukovodstvo po fizike. Fundamental'nye kontseptsii, osnovnye uravneniya i formuly* [Reference guide to physics. The fundamental concepts, basic equations and formulas]. Moscow, Mir Publ, 2001, 461 p. (in Russian).
3. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika* [Theoretical physics]. V 10 t. T.2. *Teoriya polya* [Field theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 536 p. (in Russian).
4. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika* [Theoretical physics]. V 10 t. T.8. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 656 p. (in Russian).
5. Ugarov V.A. *Spetsial'naya teoriya otnositel'nosti* [The special theory of relativity]. Moscow, Editorial URSS, 2005, 384 p. (in Russian).
6. Abragam M., Bekker R. *Teoriya elektrichestva* [Theory of electricity]. Moscow, Leningrad, ONTI, 1936. 281 p. (in Russian).
7. Frenkel' Ya.I. Elektrodinamika. T.1. *Obshchaya teoriya elektrichestva* [Electrodynamics. V.1. The General theory of electricity]. M.: Kniga po trebovaniyu Publ., 2012. 371 p. (in Russian).
8. Tamm I.E. *Osnovy teorii elektrichestva* [Fundamentals of the theory of electricity]. Moscow, Nauka Publ., 2003. 504 p. (in Russian).
9. Bredov M.M., Rumyantsev V.V., Toptygin I.N. *Klassicheskaya elektrodinamika* [Classical electrodynamics]. M.: Nauka Publ., 2003. 267 p. (in Russian).
10. Toptygin I.N. *Sovremennaya elektrodinamika. Chast' 2. Teoriya elektromagnitnykh yavlenii v veshchestve*. [Modern electrodynamics. Part 2. The theory of electromagnetic phenomena in matter]. Moscow-Izhevsk, NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2005. 848 p. (in Russian).
11. Panovskii V., Filips M. *Klassicheskaya elektrodinamika* [Classical electrodynamics]. Moscow, Fizmaggiz Publ., 1963. 432 p. (in Russian).
12. Novozhilov Yu.V., Yappe Yu.A. *Elektrodinamika* [Electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p. (in Russian).
13. Meshkov I.N., Chirikov B.V. *Elektromagnitnoe pole. Chast' 1. Elektrichestvo i magnetizm*. [Electromagnetic field. Part 1. Electricity and magnetism]. Moscow, Kniga po trebovaniyu Publ., 2013. 272 p. (in Russian).
14. Vlasov A.A. *Makroskopicheskaya elektrodinamika* [Macroscopic electrodynamics]. Moscow-Izhevsk.: RKhD, 2010. 229 p. (in Russian).
15. Gerasimov S.A. A Magnetized body in air: the inverse paramagnetic effect. *Inzhenernaya fizika = Engineering Physics*, 2011, no.9, pp. 15-18. (in Russian).
16. Gerasimov S.A. Non-Uniformly Magnetized Body In Paramagnetic Medium. *Inzhenernaya fizika = Engineering Physics*, 2012, no.8, pp. 24-26. (in Russian).
17. Rukhadze A.A., Rukhadze K.Z. About the conditions of Zennekes surface wave existence *Inzhenernaya fizika = Engineering Physics*, 2011, no.4, pp. 21-24. (in Russian).
18. Makarov V.P., Rukhadze A.A. Some remarks to the V.G. Veselagos paper in UFN «Waves in metamaterials: their importance in modern physics» *Inzhenernaya fizika = Engineering Physics*, 2012, no.5, pp. 11-12. (in Russian).

19. Makarov V.P., Rukhadze A.A. Minkowski's Tensor Or Abraham's Tensor? *Inzhenernaya fizika = Engineering Physics*, 2012, no.8, pp. 3-5. (in Russian).
20. Makarov V.P., Rukhadze A.A. Principles of modern electrodynamics of material media (Part 1. From electromagnitostatics to the Maxwell equations) *Inzhenernaya fizika = Engineering Physics*, 2012, no.10, pp. 12-22. (in Russian).
21. Mende F.F. New approaches in modern classical electrodynamics. Part II. *Inzhenernaya fizika = Engineering Physics*, 2013, no.2, pp. 03-17. (in Russian).
22. Mansuripur M. On the Foundational Equations of the Classical Electrodynamics. *Resonance*. 2013. No.2. pp.130–150.
23. Plank M. *Vvedenie v teoreticheskuyu fiziku. Teoriya elektrichestva i magnetizma* [Introduction to theoretical physics. Theory of electricity and magnetism]. Moscow, URSS, 2004. 184 p. (in Russian).
24. Fushich V.I., Nikitin A.G. *Simmetriya uravnenii Maksvella* [The symmetry of Maxwell's equations]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1983. 200 p. (in Russian).
25. Strazhev V.I., Tomil'chik L.M. *Elektrodinamika s magnitnym zaryadom* [Electrodynamics with a magnetic charge]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1975. 336 p. (in Russian).
26. Kochin N.E. *Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya* [Vector calculus and the beginning of tensor calculus]. M.: Nauka Publ., 1965. 427 p. (in Russian).
27. Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A. *Teoriya i praktika klassicheskoi elektrodinamiki* [Theory and practice of classical electrodynamics]. Moscow, Editorial URSS, 2014. 784 p. (in Russian).
28. Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Concerning Structure of Simultaneous Equations of the Classical Electrodynamics. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science,* 2014, no.3, pp.39-52. (in Russian).
29. Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. The System of Equations of Classical Electrodynamics in a Fixed Isotropic Medium. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science,* 2014, no.4, pp.25-39. (in Russian).
30. Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Axiomatic construction of classical electrodynamics equations *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science,* 2016, no.1, pp.45-60. (in Russian). DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1
31. Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Classical Electrodynamics Equations as a Result of Special Relativity. Radiooptika. *MGTU im. N.E. Baumana = Radiooptics of the Bauman MSTU*, 2016, no. 02, pp. 26–47. (in Russian). DOI:10.7463/rdopt.0216.0837463
32. Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. On Basic Equations of Electrostatics of Isotropic Dielectrics. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science,* 2011, no.2, pp.25-40. (in Russian).