Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 04. С. 76–91.

DOI: **10.7463/0416.0837693**

Представлена в редакцию: 05.03.2016
Исправлена: 19.03.2016

УДК 681.322.01

Отказоустойчивые циклические сети с минимальной задержкой передачи информации

Можаров Г. П.[1,*]

[*]mojarov_g@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается модель отказоустойчивой быстродействующей вычислительной сети. Предполагается, что граф структуры вычислительной сети связен и нетривиален. Оптимизация таких топологий с помощью только эвристических методов может встретиться с непреодолимыми вычислительными трудностями. Поэтому представляют интерес регулярные методы разработки топологий вычислительных сетей.

Проанализированы некоторые методы определения отказоустойчивости циклической сети, структура которой определяется свойствами неориентированных симметричных графов специального вида − циркулянтов. С целью получения оценок отказоустойчивости вычислительной сети были проанализированы некоторые из основных неравенств и свойств циркулянтов. Исследовано влияние топологических характеристик вычислительных сетей (число вершин и ребер, вершинная и реберная связность и т.п.) на их отказоустойчивость, пропускную способность, стоимость.

Предложенная модель, позволяет эффективно решать оптимизационные задачи на графах и может быть полезна при разработке и создании структур отказоустойчивых циркулянтных графов, описывающих вычислительные сети процессоров.

Ключевые слова: вычислительная сеть, граф структуры сети, отказоустойчивость, вершинная и реберная связность, циркулянтный граф, многокритериальная задача

Введение

Использование вычислительных сетей (ВС) в сфере управления производством, в системах управления беспилотных летательных аппаратах и на других важных объектах (в том числе реального времени) обострило вопрос об отказоустойчивости функционирования этих ВС. Отказоустойчивость – это свойство ВС адаптироваться к новой ситуации и противостоять потоку отказов, выполняя при этом свою целевую функцию за счет соответствующего изменения структуры и поведения сети, даже при отказавших ее частях.

В последнее время интенсивно разрабатывались алгоритмы и модели отказоустойчивых ВС [1-5] (в том числе на основе методов марковских и полумарковских случайных процессов, включая и циклические системы [4-6]). Однако использование этих алгоритмв и моделей обычно приводит к «переупрочненным» и весьма дорогим вариантам [5-7] построения отказоустойчивых циклически ВС.

Важными практическими преимуществами циклических конфигураций ВС являются:

- простота организации и управления, поскольку сообщения между процессорами сети передаются по связям в одном направлении, при этом отпадает необходимость в принятии решения о направлении пересылки сообщения;
- относительная простота введения дополнительных связей между процессорами для повышения отказоустойчивости, причем эти связи уменьшают время передачи сообщений и разгружают каналы связи, повышая пропускную способность ВС.

В течение последнего десятилетия интенсивно разрабатывались более тонкие методы расчёта отказоустойчивости ВС сетей с произвольной структурой [8-10].

Большинство моделей [6, 10,11] неявно предполагали, что все компоненты ВС (в том числе циклических) – свободны от ошибок. Однако в реальной ситуации ошибки возникают и отказы (процессоров, модулей памяти и линий связи и т.д.) приводят к ухудшению рабочих характеристик ВС. Поэтому одновременное рассмотрение структуры ВС и проблем отказоустойчивости является важным фактором для оценки многопроцессорной ВС. Так, многопроцессорные ВС не должны отказывать из-за выхода из строя одного единственного компонента. ВС должна обнаружить любой дефектный модуль и быть способной реконфигурировать и продолжать работу в ухудшенном режиме с меньшим количеством доступных ресурсов. Способность к постепенной деградации подразумевает, что ВС остается работоспособной, пока минимальное количество ресурсов соответствует требованиям выполнения задачи. Чтобы получить допустимую конфигурацию многопроцессорная ВС должна иметь не менее двух процессоров, двух блоков памяти (эти минимальные требования могут возрасти в зависимости от специфики решаемой задачи).

Однако до настоящего времени не существует единой научной методологии по синтезу отказоустойчивых циклических ВС, структура которых может быть представлена циркулянтным графом [6-9].

Ниже будут предложены и исследованы аналитические методы решения сложной научно-технической оптимизационной задачи по определению минимального количества линий связи среди всех циклических ВС и приведены примеры синтеза отказоустойчивой циркулянтной сети.

Постановка задачи

Рассмотрим модель отказоустойчивой быстродействующей циклической вычислительной сети. Пусть имеется сеть, состоящая из узлов хранения и переработки информации. Некоторые пары узлов соединены каналами (шинами). Обмен информацией между любыми двумя узлами осуществляется либо непосредственно по соединяющему их каналу, если он есть, либо через другие каналы и узлы. ВС считается работоспособной, если каждая пара узлов в состоянии обмениваться информацией. Такой сети естественно сопоставить граф: вершины − узлы, ребра − каналы (связи) сети. Тогда работоспособной сети будет соответствовать связный граф. Важным понятием является отказоустойчивость ВС, под которой обычно подразумевают способность вычислительной сети процессоров функционировать при выходе из строя одного или нескольких вычислительных узлов и/или связей. Ясно, что менее отказоустойчивой следует считать ту ВС, исправность которой нарушается при повреждении меньшего количества узлов и связей. Отказоустойчивость сети ВС можно измерять на основе вводимых ниже определений [7-9].

Числом вершинной связности (или просто числом связности) $\kappa(G)$ графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу.

Так, например, если через K_n обозначить полный n-вершинный граф, а через C_n обозначить n-вершинный цикл, то $\kappa(K_1)=0$, $\kappa(K_n)=n-1$, $\kappa(C_n)=2$. Это вполне согласуется с интуитивным представлением о том, что при $n>3$ граф K_n сильнее связен, чем C_n.

Пусть G – граф порядка $n>1$. Числом реберной связности $\lambda(G)$ графа G назовем наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Определим некоторые элементы графа, играющие особую роль в дальнейших рассмотрениях.

Вершина v графа G называется точкой сочленения (или разделяющей вершиной), если граф $G-v$ имеет больше компонент, чем граф G. В частности, если граф G связен и v – точка сочленения, то $G-v$ не связен [7,8]. Аналогично ребро графа называется мостом, если его удаление увеличивает число компонент.

Число вершинной связности и число реберной связности ее графа отражают чувствительность сети к разрушению узлов и каналов связи соответственно, а мостам и точкам сочленения отвечают наиболее уязвимые места сети.

Если $\delta(G)$– минимальная степень вершин графа G, то очевидно, что $\lambda(G)\le\delta(G)$, поскольку удаление всех ребер, инцидентных данной вершине, приводит к увеличению числа компонент графа.

Выясним теперь соотношение между числами $\kappa(G)$ и $\lambda(G)$. Если граф G не связен или имеет мост, то очевидно, что $\kappa(G)=\lambda(G)$. Пусть G – связный граф без мостов. Выберем в этом графе множество E_1, состоящее из $\lambda=\lambda(G)$ ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Пусть $E_2\subset E_1$, мощность множества $|E_2|=\lambda-1$. Граф $G-E_2$ связен и имеет мост, который обозначим через uv. Для каждого ребра из множества E_2 выберем какую-либо инцидентную ему вершину, отличную от u и v. Удалим теперь выбранные вершины из графа. Этим самым будут удалены, в числе прочих, и все ребра, входящие в E_2. Если оставшийся граф не связен, то $\kappa=\kappa(G)<\lambda$. Если же он связен, то ребро uv является мостом. Поэтому удаление одной из вершин u или v приводит к несвязному или одновершинному графу, а это означает, что $\kappa \le \lambda$. Для любого графа G верны неравенства [7,10,11]

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G).$$

Для любых натуральных чисел p, q, r, таких, что $p \le q \le r$, существует граф G, у которого $\kappa(G) = p$, $\lambda(G) = q$, $\delta(G) = r$.

Для графа G верно равенство

$$\kappa(G) = \lambda(G).$$

Граф G называется k-связным, если $\kappa(G) \ge k$, и реберно-k-связным − если $\lambda(G) \ge k$. Таким образом, отличный от K_1 граф 1-связен (односвязен) тогда и только тогда, когда он связен, а 2-связные (двусвязные) графы – это связные графы без точек сочленения, не являющиеся одновершинными.

Максимальный k-связный подграф графа называется его k-связной компонентой, или просто k-компонентой. Две различные k-компоненты графа имеют не более чем $k-1$ общих вершин. Для исследования отказоустойчивости сетей связи предполагается, что граф сети с p вершинами и q ребрами (рис. 1) связен и нетривиален $(p > 1)$.

Вычислительная сеть называется неработоспособной, если неработоспособно множество вершин, удаление которых из графа сети делает его несвязным или тривиальным. Это множество вершин называется разделяющим.

Для исследования этих задач нам понадобится еще несколько определений; будем считать, что G – связный граф, а p_1 и p_{11} – две различные его вершины. Назовем p_1p_{11}-разделяющим множеством в G множество Q ребер графа G, обладающее тем свойством, что любая простая цепь из p_1 в p_{11} содержит ребро из Q. Заметим, что всякое p_1p_{11}- разделяющее множество является и разделяющим множеством в G. Аналогично, p_1p_{11}-отделяющим множеством в G назовем множество P его вершин (не содержащее p_1 и p_{11}), обладающее тем свойством, что любая простая цепь из p_1 в p_{11} проходит через вершину из P. Например, на рис. 1 множества

$$Q_1 = \{\{p_2,\ p_5\},\ \{p_3,\ p_5\},\ \{p_6,\ p_9\},\ \{p_6,\ p_{10}\}\}$$

и

$$Q_2 = \{\{p_7,\ v\},\ \{x,\ w\},\ \{y,\ w\},\ \{z,\ w\}\}$$

являются p_1p_{11}-разделяющими, а множества

$$P_1 = \{p_5,\ p_6\} \text{ и } P_2 = \{p_2,\ p_3,\ p_9,\ p_{10}\}$$

являются p_1p_{11}-отделяющими [10-12].

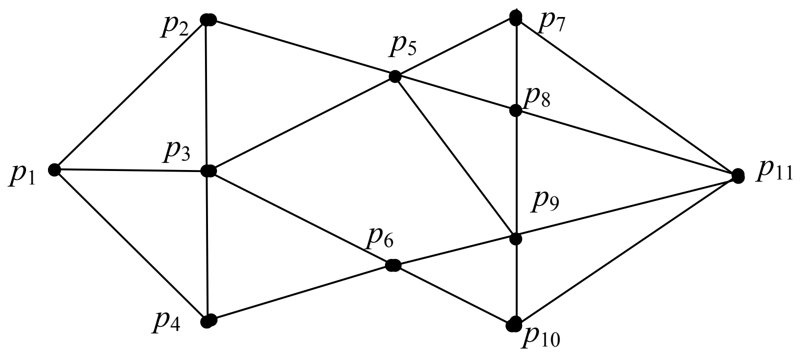

Рис. 1. Сеть с множествами Q_1, Q_2 $\left(p_1 p_{11}\right.$-разделяющим множеством) и P_1, P_2 $\left(p_1 p_{11}\right.$-отделяющим множеством)

Для того чтобы подсчитать число реберно непересекающихся простых цепей из v в w, заметим сначала, что если какое-нибудь $p_1 p_{11}$-разделяющее множество Q содержит k ребер, то число реберно непересекающихся простых цепей не превосходит k, поскольку в противном случае некоторое ребро из Q принадлежало бы более чем одной простой цепи. Если к тому же Q является $p_1 p_{11}$-разделяющим множеством наименьшей возможной мощности, то число реберно непересекающихся простых цепей оказывается в точности равным k и, следовательно, каждая такая цепь содержит ровно одно ребро из Q.

Максимальное число реберно непересекающихся простых цепей, соединяющих две различные вершины p_1 и p_{11} связного графа G, равно минимальному числу k ребер в $p_1 p_{11}$-разделяющем множестве.

Математическое описание отказоустойчивой циркулянтной сети ВС

Степень уязвимости ВС определяется соединимостью ее графа по вершинам κ – минимальным размером разделяющего множества вершин. Соединимость по ребрам λ определяется наименьшим количеством ребер, удаление которых ведет к утрате связности графа. Можно показать, что $2q/p \geq \delta \geq \lambda \geq \kappa$, где δ – минимальная степень вершины (число исходящих из нее ребер) [9-11]. Исследуются некоторые свойства неориентированных симметричных графов специального вида так называемых циркулянтов.

Пусть G – граф с матрицей смежности $\mathbf{A}$ и $P(x)$ – многочлен от x такой, что все элементы матрицы $P(\mathbf{A})$ – неотрицательные целые числа. Тогда многочлен $P(G)$ графа G определим как многочлен такого графа, матрица смежности которого равна $P(\mathbf{A})$. В частном случае, когда $P(x) = x + h$ $(h$ – положительное число), строить граф $P(G)$ можно, добавляя h однократно учитываемых петель к каждой вершине графа G. Собственные значения многочлена $P(G)$ больше на h соответствующих собственных значений графа G.

Многочлен контура $\overrightarrow{C}_n$ (рис. 2) также представляет интерес. Матрица смежности этого графа является следующей квадратной матрицей порядка n:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу же видно, что

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k} \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

для $k = 0,\ 1,\ ...,\ n-1$. Таким образом, матрица смежности графа $P\left(\overrightarrow{C}_n\right)$, где $P(x) = a_0 + a_1 x + \ ...\ + a_{n-1}x^{n-1}$, является циркулянтом (циркулянтом называется матрица, у которой каждая строка получается из строки, стоящей над ней, в результате циклического сдвига на одну позицию вправо) с первой строкой $\left(a_0,\ a_1,\ ...,\ a_{n-1}\right)$.

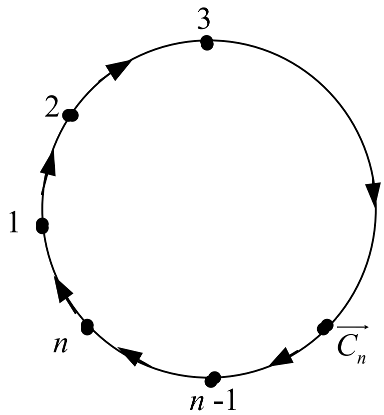

Рис. 2. Контур $\overrightarrow{C}_n$

В частности, $C_n = \overrightarrow{C}_n \bigcup \overrightarrow{}$ где C_n – простой цикл и $\overrightarrow{C}_n$ – контур на n вершинах.

Из теории матриц известно [12], что собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$ являются $\lambda_j = e^{\frac{2\pi j}{n} i} = \varepsilon_j$ $\left(j = 1,\ 2,\ ...,\ n;\ i = \sqrt{-1}\right)$. Используя теорему Захса [11], получаем $\left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\right| = \lambda^n - 1$. Следовательно, собственными значениями простого цикла C_n являются $\lambda_j = \varepsilon_j + \varepsilon_j^{n-1} = 2\cos\frac{2\pi}{n} j$ $\left(j = 1,\ 2,\ ...,\ n\right)$. У графа $P\left(\overrightarrow{C}_n\right)$ собственными значениями будут величины $\lambda_j = P\left(\varepsilon_j\right)$, $\left(j = 1,\ ...,\ n\right)$ (известный результат в теории циркулянтов).

Значения элементов a_j циркулянта $\mathbf{A}$ могут быть вычислены через собственные значения:

$$a_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \omega^{-kj}.$$

Полагая, $j = qi$ находим

$$a_{ki} = \frac{1}{n}\sum \alpha_k \omega^{-kqi} = \frac{1}{n}\sum \beta_{qk}\omega^{-kqi} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\beta_s \omega^{-si} = b_i .$$

Соотношение $b_i = a_{qi}$ эквивалентно матричному соотношению $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{\mathrm{T}} = \mathbf{PAP}^{-1}$, где $\mathbf{P}$ – матрица перестановки, $(i,\ j)$-элементом которой является $\delta_{qi,j}$. Это завершает доказательство.

Проведем полный анализ структуры характеристических чисел и собственных векторов любой матрицы вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \cdots & \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\mathbf{A} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P^i$. Тогда

$$\mathbf{A}v_k = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P^i v_k = \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i \varepsilon^M\right) v_k .$$

Итак, если $\psi(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ \ldots\ + c_{n-1}\lambda^{n-1}$, то $\mathbf{A}v_k = \psi(\varepsilon^k)v_k$, т.е. $\mathbf{A}$ имеет собственные векторы $v_1,\ \ldots,\ v_n$, которые принадлежат соответственно характеристическим числам $\psi(\varepsilon),\ \ldots,\ \psi(\varepsilon^n)$. Всякий полином от матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{A} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P^i$ называется циркулянтом [8,11].

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n$, имеющая вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & \cdots & \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & & a_1 \end{pmatrix},$$

называется циркулянтной матрицей или циркулянтом. Любая ее строка получается из предыдущей путем циклического сдвига на одну позицию вправо, так что элементы любой строки представляют циклическую перестановку элементов первой строки. Матрица перестановки

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \\ 1 & 0 & & \cdots & \end{pmatrix}$$

называется основной циркулянтной матрицей перестановки. Матрицу $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n$ можно записать в виде $\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \mathbf{C}^k$ в том и только в том случае, когда она является циркулянтной. Здесь $\mathbf{C}^0 \equiv \mathbf{I} \equiv \mathbf{C}^k$ и коэффициенты $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ – не что иное, как элементы первой строки матрицы $\mathbf{A}$. Вследствие этого представления произвольная циркулянтная матрица имеет хорошую структуру, которую можно связать со структурой матрицы $\mathbf{C}$. Поскольку $\mathbf{C}^n = \mathbf{I}$, произведение циркулянтов есть снова циркулянт. Кроме того, циркулянты коммутируют относительно умножения. Можно рассматривать также и обобщения циркулянтных матриц, например такие матрицы, где строки циклически сдвигаются не на одну, а на несколько позиций (влево или вправо) [11,13].

Некоторые основные неравенства циркулянтых графов

Исследуем некоторые неравенства циркулянтных графов. Пусть граф $C(n,\ r)$ на n вершинах $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, ребрами которого являются пары $(i,\ i+1)$, $(i,\ i+r)$ для $i = \overline{1,\ n}$, где индексы взяты по модулю n, является циркулянтом. На рис. 3 показан граф $C(8,\ 3)$.

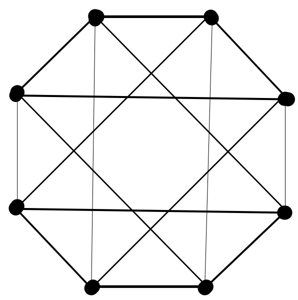

Рис. 3. Схема графа циркулянта $G = C(n,\ r)$ при $n = 8$ и $r = 3$

Вычислим максимальную величину разреза в любом циркулянте $C(n,\ r)$. Пусть n, r − целые числа с $n \geq 2r + 1 \geq 4$. Тогда максимум мощности множества ребер F двудольного подграфа в $C(n,\ r)$ равна $\max\left(2n - u_t - v_t \middle| t = \overline{0,\ r}\right)$, где $u_t := |nt - v_t r|$, и v_t есть единственное целое, имеющее ту же четность, что и n, и удовлетворяющее условию $nt - r \leq v_t r < nt + r$.

Пусть $n = kr + s$, где $0 < s < r < n/2$, r и k − четные числа, s нечетное число, и n и s взаимно просты. Обозначим через E_O (соответственно, через E_I) множество ребер $(i,\ i+1)$ (соответственно, $(i,\ i+r)$) для $i = \overline{1,\ n}$ из $C(n,\ r)$ (индексы взяты по модулю n). Тогда неравенство

$$\sum_{ij \in E_I} x_{ij} + s \sum_{ij \in E_O} x_{ij} \le (s+1)n - sk - r$$

определяет фасету многогранника двудольного подграфа.

Пусть $n = kr + 1$, где $k, r \ge 2$ − четные числа. Тогда $\sum_{ij \in C(n,r)} x_{ij} \le 2n - k - r$ [9,14,15].

Заметим, что в случае $r = 2$ циркулянт $C(n,\ 2)$ задача: «содержит ли граф G циркулянт $C(n,\ 2)$ для некоторого n?» является NP-полной. Следовательно, задача отделения для класса неравенств: $\sum_{ij \in C(n,2)} x_{ij} \le \frac{3}{2}(n-1)$, n нечетное является NP-трудной.

Математическая модель циркулянтного графа и ее применение для оценки отказоустойчивости циклической сети

Пусть стоимость сети пропорциональна количеству линий связи. Тогда рассмотрим следующую оптимизационную задачу: для данных p и n определить минимальное количество линий связи q среди всех графов, для которых $\kappa \ge n$.

Имеет место соотношение $q \ge [np/2]$. Если p либо n четное, то для того, чтобы граф был решением поставленной задачи, необходимо и достаточно, чтобы он был регулярным и имел степень $\delta = \kappa = n$. Вообще говоря, для любого регулярного графа G $\kappa \ge \delta$. Если выполняется равенство, то граф G называется κ-оптимальным. Пусть вершины графа занумерованы $0,\ 1,\ ...,\ p-1$ [9,11,15].

Структура циркулянтного графа, или циркулянта, $G = C_p(n_1,\ n_2,\ ...,\ n_k)$ или, короче, $C_p(n_i)$, такова, что при $0 < n_1 < \ ... \ < n_k < (p+1)/2$ каждая вершина i соединена с вершинами $i \pm n_1$, $i \pm n_2$, ..., $i \pm n_k \pmod p$.

На рис. 4 представлена схема соединения графа $G = C_p(n_1,\ n_2,\ n_3)$, где $k = 3$. Метка каждого ребра указывает направление перехода (в вершину, отличающуюся на n_i от исходной по $\mathrm{mod}\, p$ в ту или иную сторону, в зависимости от знака метки). Вершины помечены относительными номерами по отношению, к корневой вершине дерева. Из различных путей, ведущих в одну вершину, на рисунке изображен лишь один. Различные вершины на одном или разных уровнях могут совпадать (если, например, $n_1 + n_3 = 2n_2$ или $n_2 = 2n_1$). Здесь под j-м уровнем понимается множество вершин с расстоянием j до исходной вершины. Чтобы максимизировать число доступных вершин из вершины 0 на каждом уровне, следует подобрать такие значения $n_1,\ n_2,\ n_3$, чтобы на всех уровнях $1-m$ количество попарно различных вершин было наибольшим. Верхней границей X_m, которую можно достичь из исходной вершины 0, называется количество вершин, расстояние от которых до исходной не превосходит m. Если число вершин p в графе таково, что $X_m \geq p-1 \geq X_{m-1}$, то его диаметр больше или равен $m : \mathrm{diam}(G) \geq m$. Величину m можно рассматривать как нижнюю границу для диаметра циркулянтного графа.

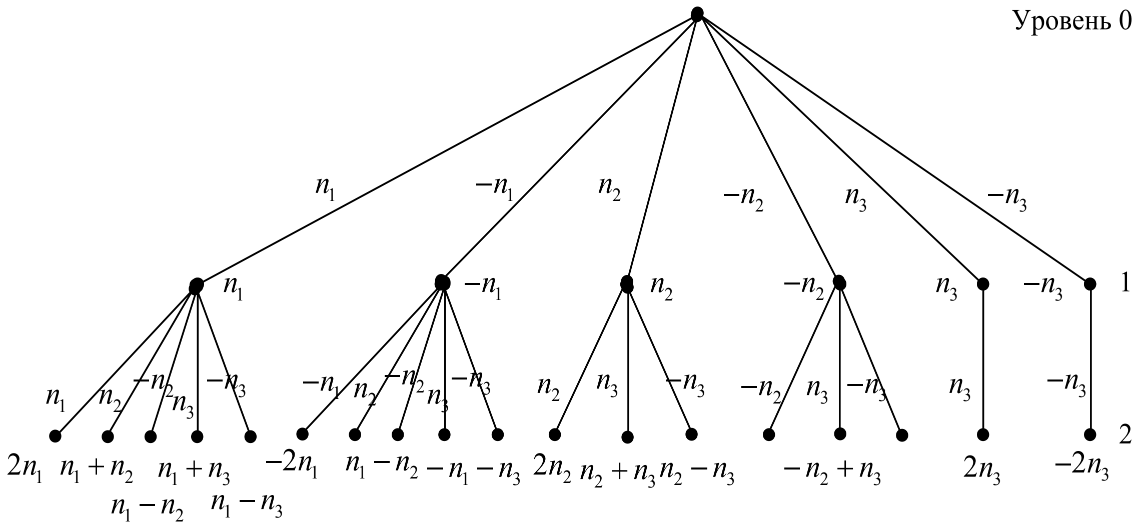

Рис. 4. Схема графа $G = C_p(n_1,\ n_2,\ n_3)$, при $k=3$

Найдем значения m и X_m. Пусть имеются сети n видов, из которых выбирается m сетей (некоторые из них могут быть одного вида). Эти выборки являются комбинациями с повторениями. Количество различных комбинаций с повторениями $S(n,\ m)$ составляет $C(n+m-1,\ m)$, где

$$C(x,\ y) = \binom{x}{y}.$$

Имеет место следующее утверждение. Пусть $A_i = \{a_i,\ \bar{a}_i\}$, $1 \leq i \leq 2$ для неотрицательных целых k определено

$$^kA_i = \{(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_k) | x_1 + x_2 + \ \dots\ + x_k \in A_i\};\ ^0A_i = \varnothing.$$

Пусть, далее, $\varnothing \times B = B \times \varnothing = B$ где $\times$ обозначает декартово произведение. Рассматриваются также множества $A = (k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n) = {}^{k_1}A_1 \times {}^{k_2}A_2 \times\ \dots\ \times {}^{k_n}A_n$.

Если $\sum_{i=1}^{n} k_i = m$, то $|A| = \sum_{j=1}^{\min(m,n)} C(n,\ j)C(m-1,\ j-1)2^j$, где $A = \bigcup_{k,i}$ $,\ k_n)$.

Применительно к циркулянтным графам множество A_i обозначает ребра, связывающие каждую вершину l с вершинами $l \pm a_i$; ${}^k A_i$ соответствует множеству путей, состоящих в k последовательных переходах по ребрам одного вида; $A(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ – множеству путей, каждый из которых представляет собой последовательность k_1 переходов по ребрам, определяемым A_1, затем k_2 переходов по ребрам, определяемым A_2 и т.д.

В циркулянтном графе для заданной исходной точки и любых путей, содержащих по одинаковому количеству ребер каждого вида (относительно вершины, из которой исходит данное ребро) конечная точка одна и та же и не зависит от последовательности ребер каждого вида, поэтому любой путь можно упорядочить в соответствии со структурой элемента $A(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$.

Пример отказоустойчивости циркулянтной сети

Из определения множества $A(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ следует, что его элемент не может содержать одновременно a_i и $\bar{a}_i$. Это свойство справедливо и для циркулянтных графов, если не рассматривать пути с возвратами.

Число вершин циркулянтного графа $G = C_p(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k)$, куда можно попасть из точки 0 и по пути длины m, не превосходит Y, где $Y = \sum_{j=1}^{t} C(k,\ j) C(m-1,\ j-1) 2^j$ и $t = \min(k,\ m)$.

1). Пусть $G = C_p(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k)$. Если $X_m \ge p \ge X_{m-1}(k)$, то $\operatorname{diam}(G) \ge m$, где

$$X_m(k) = 1 + \sum_{i=1}^{m} Y_i\,,\ Y_i = \sum_{j=1}^{\min(m,n)} C(k,\ j) C(i-1,\ j-1) 2^j\,.$$

Таблица содержит значения $X_m(k)$ для $1 \le m \le 7$, $1 \le k \le 6$. Для $k = 2$ и 3 $X_m(k)$ определяется формулами $X_m(2) = 2m(m+1)+1$, $X_m(3) = 1 + (8m^3 + 12m^2 + 16m)/6$.

Таблица. Значения $X_m(k)$ для $1 \le m \le 7$, $1 \le k \le 6$

k \ m	1	2	3	4	5	6	7
1	3	5	7	9	11	13	15
2	5	13	25	41	61	85	113
3	7	25	63	129	231	377	575
4	9	41	129	321	681	1289	2241
5	11	61	231	681	1683	3653	7183
6	13	85	377	1289	3653	8989	19825

2). Пусть $G = C_p(n_1,\ n_2,\ ...,\ n_k,\ p/2)$, где p – четное. Если $Z_m \ge p-1 > Z_{m-1}$, то $\mathrm{diam}(G) \ge m$, где $Z_m = \sum_{i=1}^{m}(Y_i + Y_{i-1})$ при $Y_0 = 1$ и остальных Y_i, $i \ge 1$, определенных в условиях п. 1.

В пп. 1) и 2) приведены оценки нижних границ для диаметров циркулянтных графов. Укажем способ построения циркулянтного графа $C_p(n_1,\ n_2)$, на котором эта нижняя граница достигается. Иными словами, при $k = 2$ и $n_2 \ne p/2$ определяются значения n_1 и n_2. Тогда пусть r, n – положительные целые и $1 \le r \le n(n+1)$. Тогда найдутся целые a и b (не обязательно положительные) такие, что $|a| + |b| \le n$ и $a(n+1) + bn = r$.

Регулярный граф назовем супер-λ, если $\lambda = \delta$ и любое разъединяющее множество ребер является инцидентным множеством вершины; а регулярный граф − супер-κ, если $\kappa = \delta$ и любое разъединяющее множество вершин является множеством соседей данной вершины.

3). Пусть $G = C_p(m,\ m+1)$, где $p > 6$ и $m = \left\lceil \left(-1 + \sqrt{2p-1}\right)/2 \right\rceil$. Тогда $\mathrm{diam}(G) = m$. Более того, m – минимальный диаметр для класса циркулянтных графов $C_p(n_1,\ n_2)$, где p фиксировано, а n_1 и n_2 произвольные такие, что $n_1 < n_2 < p/2$.

Возвращаясь к проблемам отказоустойчивости сетей, можно утверждать, что многие циркулянтные графы оптимальны, т.е. $\kappa = \lambda = \delta$. Графы, определенные в п. 3, являются κ -оптимальными при $\delta = 4$.

Заключение

Проанализированы некоторые методы оценки отказоустойчивой быстродействующей циклической сети, структура которой определяется свойствами неориентированных симметрич ных графов специального вида (циркулянтов). В произвольном регулярном графе, где $\lambda = \delta$, множество δ ребер, исходящих из любой вершины, является минимальным разъединяющим множеством ребер, а в регулярном графе, д ля которого $\kappa = \delta$, множество вершин, смежных с данной, является минимальным разъединяющим множеством вершин.

Поставлена и решена оптимизационная задача по определению минимального количества линий связи среди всех циркулянтных графов для которых $\kappa \ge n$.

На примерах циркулянтных графов $C_6(2,\ 3)$ и $C_8(1,\ 2)$ показано, что регулярные графы могут содержать более сложные минимальные разъединяющие множества ребер и вершин.

Циркулянтный граф $G = C_p(m,\ m+1)$, где $p > 6$ и $m = \left\lceil \left(-1 + \sqrt{2p-1}\right)/2 \right\rceil$ оптимален, т.е. $\kappa = \lambda = 4$, и является супер-λ, а при $p > 10$ и $p \ne 14$ является также супер-κ.

Предложенные алгоритм и модель могут быть полезны при разработке и реализации структур отказоустойчивых циркулянтных графов, описывающих вычислительные сети.

Список литературы

1. Wlodarczyk J. Decomposition of Birational Toric Maps in Blow-Ups and Blow-Downs // Transactions of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 349, no. 1. P. 373-411. Режим доступа: http://www.ams.org/journals/tran/1997-349-01/S0002-9947-97-01701-7/S0002-9947-97-01701-7.pdf (дата обращения 01.03.2016).
2. Welker V., Ziegler G.M., Zivaljevic R.T. Homotopy colimits – comparison lemmas for combinatorial applications // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1999. Vol. 1999, no. 509. P. 117-149. DOI: 10.1515/crll.1999.509.117
3. Филин Б.П. Методы анализа структурной надёжности сетей связи. М.: Радио и связь, 1988. 208 с.
4. Ziegler G.M. Projected products of polygons // Electronic research announcements of the american mathematical society. 2004. Vol. 10. P. 122-134. Режим доступа: http://www.ams.org/journals/era/2004-10-14/S1079-6762-04-00137-4/S1079-6762-04-00137-4.pdf (дата обращения 01.03.2016).
5. Бухштабер *В.М.* Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 2008. Т. 263. С. 18-43.
6. Toporkov V.V. Models of distributed computations. Moscow: Fizmatlit, 2011. 320 p.
7. Харари *Ф.* Теория графов: пер с англ. 3-е изд. М.: КомКнига, 2006. 296 с.
8. Деза М.М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик: пер. с англ. / под ред. В.П. Гришухина. М.: МЦНМО, 2001. 736 с.
9. Деза М., Гришухин В.П., Штогрин М.И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках: пер. с англ. М.: МЦНМО, 2008. 192 с.
10. Звонкин А.К., Ландо С.К. Графы на поверхностях и их приложения. М.: МЦНМО, 2010. 480 с.
11. Андреев А.М., Можаров Г.П., Сюзев В.В. Многопроцессорные вычислительные системы: теоретический анализ, математические модели и применение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 334 с.
12. Циглер Г.М. Теория многогранников: пер. с англ. / под ред. Н.П. Долбилина. М.: МЦНМО, 2014. 568 с.
13. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения: пер. с англ. М.: Мир, 2001. 430 с.
14. Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004. 272 с.
15. Тиморин В.А. О многогранниках, простых в ребрах // Функциональный анализ и его приложения. 2001. Т. 35, вып. 3. С. 36-47. DOI: 10.4213/faa257

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2016, no. 04, pp. 76–91.

DOI: **10.7463/0416.0837693**

Received: 05.03.2016
Revised: 19.03.2016

Fault Tolerant Cyclic Networks from the Minimum Information Transfer Delay

G.P. Mojarov[1,*]

[*]mojarov_g@mail.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: the computer network, the graph of structure of a network, fault tolerance, vertex and edge con-nected, circulant the graphs, a multicriteria problem

To have further development of computing facilities it is necessary to begin with solving a problem on reliability of their outcomes. Direct use of computer networks of processors in industrial management, on pilotless aircrafts, etc. has aggravated a fault tolerance problem of operation of these computer networks.

Fault tolerance is a capability of the computer network to adapt to a new situation and counter the failure flux, thus fulfilling its objective function through an appropriate alteration of the network structure and behavior even with failures of its parts.

The computer network fault tolerance estimate and design are based on the possible application of the computer network of processors and on the solution of the class of problems for which it is created. All design stages have to take into consideration both the ways for increasing network fault tolerance and the basic technical solutions desirable for running computer network of processors. Since designing the fault-tolerant networks, essentially, is a multi-objective optimisation problem, modeling is an effective remedy for its solution.

The paper considers a model of the fault-tolerant high-speed cyclic computer network. To analyse the network fault tolerance are studied some properties of non-directional symmetric graphs of a special kind (circulants). It is supposed that the graph of the computer network is coherent and nontrivial. In the arbitrary regular graph a set of the edges, exiting from any vertex, is the minimum separating set of edges. On the other hand, in the regular graph a set of vertices being adjacent to the given vertex is the minimum separating set of vertices. The paper gives the examples of the circulant graphs to show that the regular graphs can contain more complicated minimum separating sets of edges and vertices.

The paper studies the impact of topological characteristics of networks on their fault tolerances, throughput, and cost.

Solution of fault tolerance problems of computer networks of some classes (circulant graphs) enabled us to construct the graphs representing topologies of computer networks of processors, which possess maximum uniformity. The topology design of a network of processors with extreme properties, such as the maximum connectivity or the minimum diameter with the specified number of nodes (processors) and edges (communication lines) is carried out with their gradual increase in the initial graph.

Optimisation of such topologies using only heuristic methods can face the insuperable computing difficulties. The regular techniques to design a topology of the computer networks, therefore, are of interest. The offered model allows the effective solution of graph-based optimisation problems, can be useful in designing and creating the structures of fault-tolerant circulant graphs to describe computer networks of processors.

References

1. Wlodarczyk J. Decomposition of Birational Toric Maps in Blow-Ups and Blow-Downs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1997, vol. 349, no. 1, pp. 373-411. Available at: http://www.ams.org/journals/tran/1997-349-01/S0002-9947-97-01701-7/S0002-9947-97-01701-7.pdf , accessed 01.03.2016.
2. Welker V., Ziegler G.M., Zivaljevic R.T. Homotopy colimits – comparison lemmas for combinatorial applications. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1999, vol. 1999, no. 509, pp. 117-149. DOI: 10.1515/crll.1999.509.117
3. Filin B.P. *Metody analiza strukturnoi nadezhnosti setei svyazi* [Methods of analysis of structural reliability of communication networks]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1988. 208 p. (in Russian).
4. Ziegler G.M. Projected products of polygons. *Electronic research announcements of the american mathematical society*, 2004, vol. 10, pp. 122-134. Available at: http://www.ams.org/journals/era/2004-10-14/S1079-6762-04-00137-4/S1079-6762-04-00137-4.pdf , accessed 01.03.2016.
5. Buchstaber V.M. Ring of simple polytopes and differential equations. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, 2008, vol. 263, pp. 18-43. (English version of journal: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* 2008, vol. 263, no. 1, pp. 13-37. DOI: 10.1134/S0081543808040032).
6. Toporkov V.V. *Models of distributed computations*. Moscow, Fizmatlit, 2011. 320 p.
7. *Harary F. Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969. 274 p. (Russ. ed.: Harary F. *Teoriya grafov*. Moscow, KomKniga Publ., 2006. 296 p.).
8. Deza M.M., Laurent M. *Geometry of cuts and metrics. Vol. 15. Algorithms and Combinatorics.* Springer, 1997. (Russ. ed.: Deza M.M., Laurent M. *Geometriya razrezov i metrik.* Moscow, MTsNMO Publ., 2001. 736 p.).
9. Deza M., Grishukhin V.P., Shtogrin M.I. *Scale-Isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices : Polytopes in Hypercubes and* Z_n. London, Imperial College Press, 2004. 175 p. (Russ. ed.: Deza M., Grishukhin V.P., Shtogrin M.I. *Izometricheskie poliedral'nye podgrafy v giperkubakh i kubicheskikh reshetkakh*. Moscow, MTsNMO Publ., 2008. 192 p.).

10. Zvonkin A.K., Lando S.K. *Grafy na poverkhnostyakh i ikh prilozheniya* [Graphs on surfaces and their applications]. Moscow, MTsNMO Publ., 2010. 480 p. (in Russian).
11. Andreev A.M., Mozharov G.P., Syuzev V.V. *Mnogoprotsessornye vychislitel'nye sistemy: teoreticheskii analiz, matematicheskie modeli i primenenie* [Multiprocessor computer systems: theoretical analysis, mathematical models and application]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 334 p. (in Russian).
12. Ziegler G.M. *Lectures on Polytopes*. New York, Springer-Verlag, 1995. 382 p. (Russ. ed.: Ziegler G.M. *Teoriya mnogogrannikov*. Moscow, MTsNMO Publ., 2014. 568 p.).
13. Demmel J.W. *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997. 424 p. (Russ. ed.: Demmel J.W. *Vychislitel'naya lineinaya algebra. Teoriya i prilozheniya*. Moscow, Mir Publ., 2001. 430 p.).
14. Bukhshtaber V.M., Panov T.E. *Toricheskie deistviya v topologii i kombinatorike* [Toric actions in topology and combinatorics]. Moscow, MTsNMO Publ., 2004. 272 p. (in Russian).
15. Timorin V.A. On Polytopes that are Simple at the Edges. *Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya*, 2001, vol. 35, iss. 3, pp. 36-47. DOI: 10.4213/faa257 (English version of journal: *Functional Analysis and Its Applications*, 2001, vol. 35, iss. 3, pp. 189-198. DOI: 10.1023/A:1012374711617).