

Принципы проверки статистической корректности обработки результатов классического эксперимента Кавендиша

04, апрель 2016

DOI: 10.7463/0416.0837664

Тутубалин В. Н.¹, Барабашева Ю. М.^{1,*},

Девяткова Г. Н.¹, Угер Е. Г.¹

УДК 534.08, 519.25

¹МГУ им. М.Ю. Ломоносова, Москва, Россия

[*jbarabash@mail.ru](mailto:jbarabash@mail.ru)

Введение

Одним из наиболее часто применяемых приемов математической статистики является построение доверительных интервалов для истинного значения интересующей нас величины с помощью ряда ее измерений, каждое из которых содержит случайную ошибку. Правда, многие современные учебники теории вероятностей избегают приведения каких-либо реальных числовых данных, но в идеале так быть не должно. Следует приводить примеры – пусть немногочисленные, но реальные – таких случаев, когда построенные интервалы содержат или не содержат истинное значение измеряемой величины («истинное» - в смысле «достаточно уточненное в процессе дальнейшего развития науки»).

В качестве такого примера мы рассматриваем классический эксперимент Генри Кавендиша по определению средней плотности Земли (1797-1798 г.г.). Результаты этого эксперимента были опубликованы в работе [1]. К обработке этого материала можно подойти формально: вычислить среднее и построить доверительный интервал. Однако для целей образования подробный разбор данных Кавендиша делает ситуацию несравненно более интересной и полезной, чем простое применение теории ошибок, когда мы имеем дело только с окончательной таблицей результатов эксперимента и все сводится к тривиальной арифметике – вычислению среднего, стандартного отклонения и применению нормального закона. К счастью, работа Кавендиша уникальна в этом плане: в ней не только в полной мере проявилось его искусство экспериментатора, но и опубликованы подробные первичные протоколы всех экспериментов. Это дало нам возможность показать, насколько далеки реальные ошибки измерений от общепринятой вероятностно-статистической модели, и

на этой основе предложить способ частичного устранения систематических ошибок, несколько отличный от способа, использованного Кавендишем. В результате нам удалось улучшить согласие результатов Кавендиша с современными данными. В своей работе мы пользовались находящейся в открытом доступе книгой [2], содержащей помимо статьи Кавендиша полезные комментарии к ней.

В первом разделе предлагаемой статьи дается описание установки Кавендиша (крутильных весов) и его идей, лежащих в основе определения плотности Земли.

Во втором разделе описывается ход эксперимента, способ определения величин, необходимых для оценки плотности Земли D (а именно - величины перемещения коромысла крутильных весов B и полупериода его колебаний T), дается формула их связывающая. Для определения B и T по наблюдениям движения коромысла Кавендиш дает ряд правил, которые, как нам кажется, можно понять, лишь предположив, что движение коромысла достаточно точно описывается моделью математического маятника с трением. Мы в явном виде выписали уравнение колебаний маятника с трением и с его помощью провели анализ способов определения B и T , предложенных Кавендишем.

Третий раздел посвящен анализу влияния ошибок измерений B и T на величину D и обсуждению возможности их оценок (п.3.1). В пп. 3.2 и 3.3 рассматриваются две серии экспериментов, проведенных в отличающихся условиях (изменялась толщина проволоки подвеса крутильных весов). В п.3.4 описываются последние два эксперимента, проведенные помощником Кавендиша Джорджем Джилпином. Обсуждается и анализируется возможность и необходимость установления статистической однородности экспериментальных данных.

В четвертом разделе нами предложен иной способ обработки результатов экспериментов Кавендиша, использующий оценку величины трения. Этот способ позволил несколько улучшить окончательную оценку плотности Земли.

В пятом разделе мы наглядно сопоставляем модель маятника с трением с реальной динамикой движения коромысла крутильных весов, графически подтверждая не только правомерность применения этой модели, но и предположение, что ошибки самих наблюдений невелики в сравнении с систематическим воздействием внешних сил на крутильные весы Кавендиша.

1. Принцип измерений и инженерные детали

Измерительным прибором в опытах Кавендиша были крутильные весы. Это деревянное коромысло, на концах которого подвешены небольшие свинцовые шары, а само коромысло в горизонтальном положении подвешено за середину на проволоке. Сначала коромысло находится в покое, а затем к его концам симметрично приближаются на некоторое расстояние большие свинцовые шары, центры которых лежат в той же горизонтальной плоскости, что и центры малых шаров. Под влиянием сил тяготения и противодействующего момента скручивания проволоки подвеса возникает колебательное движение коромысла, постепенно затухающее из-за трения. Возникает вопрос, как перевести угол по-

ворота коромысла в величину сил тяготения, приложенных к малым шарам (следует также учесть момент сил тяготения, приложенных к самому коромыслу).

В XVIII веке несколько человек примерно одновременно нашли ответ на этот вопрос. Кавендиш упоминает Мичелла (от которого ему достались идея эксперимента и некоторые части крутильных весов) и Кулона с указанием на независимость их друг от друга. На современном языке ответ состоит в том, что момент силы закрутки подвеса можно определить по периоду свободных колебаний коромысла. Действительно, если предположить линейную зависимость этого момента от угла закрутки φ (и пренебречь затуханием), то уравнение крутильных колебаний будет $J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M\varphi = 0$, где $M\varphi$ – момент закрутки

подвеса и J – момент инерции коромысла с шарами (известная величина, поскольку экспериментатор сам заказывал коромысло и шары). Круговая частота колебаний $\nu = \sqrt{M/J}$, а период колебаний равен $2\pi/\nu$. Если надо учесть затухание, то его естественно предположить пропорциональным скорости $d\varphi/dt$. Тогда уравнением движения сделается уравнение маятника с трением, затухание выразится экспоненциальным множителем и его тоже можно будет определить по наблюдениям свободных колебаний. Влияние затухания на период колебаний может оказаться пренебрежимо малым, а если это не так, то затухание легко учесть.

Но эта теоретическая картина существенно нарушается для реального прибора Кавендиша, потому что параметры, о которых шла речь выше, возможно, не остаются постоянными, а также по ряду других причин, о которых речь ниже.

Что было сделано для стабилизации работы прибора? Как сами крутильные весы, так и подносимые к ним большие шары располагаются в отдельном здании, куда экспериментатор не может входить во время измерений, потому что его тело вызвало бы конвекцию воздуха, влияющую на движение коромысла. Сами весы заключены в ящик красного дерева, в верхней части которого устроен зажим для верхнего конца проволоки подвеса. Этот зажим можно поворачивать снаружи здания с помощью шестерни и «червяка», от которого наружу выведен деревянный стержень. Ящик имеет сложную форму, предназначенную для того, чтобы заключить в себе крутильные весы и позволить им немного колебаться, но при этом иметь по возможности минимальный объем (чтобы уменьшить возможность конвективных движений воздуха).

Наблюдение за положением концов коромысла ведется снаружи – с помощью небольших телескопов, проведенных через стены здания. В эти телескопы видны шкалы из слоновой кости с ценой деления 1/20 дюйма, закрепленные на ящике красного дерева, и нониусы, закрепленные на концах коромысла. Чтобы видеть нониусы, в ящике проделаны застекленные окошки. Свет направляется через оптическую систему от ламп, также расположенных снаружи. Окон в помещении не может быть во избежание той же конвекции.

2. Возможности наблюдений и принципы их обработки

Под *экспериментом* (опытом) Кавендиш понимает все то, что проделывается с прибором в течение одного календарного дня. Один эксперимент может иметь несколько *измерений*, т.е. определений искомой величины (средней плотности Земли): их столько, сколько раз менялось положение больших шаров. Большие шары во время опыта занимают одно из трех возможных положений: положительное, среднее или отрицательное. В позиции "положительно" шары максимально приближены к ящику крутильных весов таким образом, что силы тяготения между большими и малыми шарами стремятся развернуть коромысло в положительном направлении, т.е. по часовой стрелке, если смотреть на коромысло сверху. В позиции "отрицательно" большие шары располагаются с другой стороны ящика, и, следовательно, силы тяготения разворачивают коромысло в отрицательном направлении. Наконец, в среднем положении большие шары располагаются перпендикулярно плоскости симметрии ящика. В этом случае равнодействующая сил тяготения равна нулю.

Отдельное измерение происходит следующим образом. Сначала большие шары находятся в одном из трех положений, а коромысло крутильных весов неподвижно или совершает небольшие колебания. Затем положение больших шаров меняется на одно из двух оставшихся возможных. Теперь силы тяготения не уравниваются скручиванием проволоки, и коромысло начинает двигаться. Экспериментатор может видеть, как нониус ползет вдоль шкалы (которая имеет 40 делений, занумерованных числами от 1 до 40). Записываются экстремальные точки положения коромысла без указания времени их достижения, и две соседние целочисленные точки вблизи середины колебания с указанием времени их достижения. По этим данным определяется B - смещение точки покоя коромысла, вызванное изменением положения больших шаров, и жесткость подвеса, связанная с полупериодом колебаний коромысла T , т.е. величины, через которые в конечном счете выражается плотность Земли D .¹

Идеальная модель крутильных весов - это два груза, прицепленные к концам невесомого коромысла (подвешенного за середину) и максимально удаленные от любых масс, кроме больших шаров, которые могут к ним приближаться. Кавендиш вывел расчетную формулу для плотности Земли D сначала для идеальных весов. А после учета тяготения всего, что возможно учесть (тяготение между большими шарами и коромыслом, между малыми шарами и ящиком красного дерева, между малыми шарами и медными стержнями и т. д.) получилась окончательная формула

$$D = \frac{T^2}{10844B}. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь правила, предложенные Кавендишем для определения величин B и T . Фактически Кавендиш при этом опирается на модель математического маятника с трением, не используя ее в явном виде.

Пусть $x(t)$ - положение нуля нониуса на шкале из 40 делений. Зафиксируем одно из трех возможных положений больших шаров. Тогда у коромысла есть такое положение

$x(t) = r$, в котором равнодействующая всех сил, действующих на коромысло, равна нулю. Точка r называется *точкой покоя* (*point of rest*), а $x(t)$ может быть представлено в виде $x(t) = r + y(t)$, где $y(t)$ - колебания коромысла относительно точки покоя. Поскольку предполагается, что $y(t)$ описывается моделью колебаний математического маятника, то сила, возвращающая коромысло к точке покоя, пропорциональна величине отклонения $x(t)$ от r , т.е. $y(t)$, а сила трения пропорциональна скорости, т.е. dy/dt . Иными словами, в качестве модели движения коромысла мы используем уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0, \quad (2)$$

в котором k соответствует коэффициенту вязкого трения, а ω^2 - определяет возвращающую к точке покоя силу.

Конечно, такая модель может быть только приближенной. Для ее обоснования можно лишь заметить, что в малом всякая функция линейна и можно линеаризовать равнодействующую всех сил как функцию отклонения коромысла от r . Однако в этом случае коэффициенты уравнения (2) будут зависеть от выбранной точки линеаризации r . Поскольку точки покоя r в разных опытах с крутильными весами различны, при определении плотности Земли возникает необходимость введения различных поправок, о которых мы кратко скажем ниже.

С уравнением (2) связано немного математики, которая позволяет объяснить правила, использованные Кавендишем для нахождения точки покоя и частоты колебаний коромысла по экспериментальным данным.

Если начало отсчета времени t выбрано так, что при $t = 0$ наблюдается экстремальное значение колебания $y(0) = a$, т.е. $y'(0) = 0$, то решение (2) имеет вид

$$y(t) = a \exp\left(-\frac{k}{2}t\right) \left(\cos \tilde{\omega}t + \frac{k}{2\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t\right), \text{ где } \tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \frac{k^2}{4} \text{ и } \omega > \frac{k}{2}. \quad (3)$$

Отсюда

$$y'(t) = -a \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}} \exp\left(-\frac{k}{2}t\right) \sin \tilde{\omega}t.$$

Следовательно, экстремальные точки $y(t)$ совпадают с экстремальными точками функции $\cos \tilde{\omega}t$.

Рассмотрим оценку параметров уравнения (2). Экстремальные точки положения коромысла следуют одна за другой через интервал времени T (который Кавендиш оценивал в эксперименте). Назовем *размахом* колебания модуль разности значений $x(t)$ в двух соседних экстремальных точках. В силу (3), с учетом того, что в экстремальной точке

$$\sin \tilde{\omega} t = 0,$$

получаем, что последовательные размахи должны убывать с множителем $\exp(-\frac{k}{2}T)$.

Данные Кавендиша позволяют нам оценить скорость движения коромысла вблизи середины колебания. Эти скорости тоже убывают приблизительно с тем же множителем. Для первых трех экспериментов указано сравнительно немного размахов колебания. Поэтому для оценки этого множителя мы использовали отношения скоростей. По остальным экспериментам мы использовали только отношения размахов. Результаты получились следующие. Для первых трех экспериментов среднее значение указанного множителя равно 0.846; для остальных экспериментов оно равно 0.930. Однако для первых трех экспериментов среднее значение $T=885$ сек, а для остальных 425 сек, так что при одинаковых для обеих групп экспериментов значениях k мы бы ожидали получить (для первой группы) значение множителя равным $(0.930)^{885/425} = 0.860$, что дает достаточно хорошее согласие с оценкой 0.846. Можно предположить, что основная часть энергии коромысла крутильных весов диссипируется в результате трения в воздухе, а потери энергии при скручивании проволоки подвеса относительно малы.

Оценка величины $\frac{k}{2}T$ равна $-\ln 0.846 = 0.167$ для первых трех экспериментов и $-\ln 0.930 = 0.0723$ для остальных экспериментов. В обоих случаях отношение $\frac{k}{2} / \tilde{\omega}$ представляет собой достаточно малую величину (не более $0.167 / \pi = 0.0532$). Поэтому различие между ω^2 и $\tilde{\omega}^2$ в данном контексте несущественно (и выполняется условие $\omega > \frac{k}{2}$).

Для оценки точки покоя r Кавендиш предлагает следующее правило. Берутся три последовательные экстремальные точки $x(t_1)$, $x(t_2)$, $x(t_3)$, и в качестве оценки для r берется линейная комбинация $\hat{r} = \frac{1}{4}x(t_1) + \frac{1}{2}x(t_2) + \frac{1}{4}x(t_3)$. Действительно, если положить $b = a \exp(-\frac{k}{2}t_1)$, то точки $x(t_1)$, $x(t_2)$, $x(t_3)$ получают координаты:

$$x(t_1) = r + b, \quad x(t_2) = r - b \exp(-\frac{k}{2}T), \quad x(t_3) = r + b \exp(-kT)$$

Следовательно,

$$\hat{r} = r + \frac{1}{4}b(1 - 2\exp(-\frac{k}{2}T) + \exp(-kT)) = r + \frac{1}{4}b(1 - \exp(-\frac{k}{2}T))^2,$$

что почти совпадает с r при достаточно малом $\frac{k}{2}T$. Например, при $\exp(-\frac{k}{2}T) = 0.846$ разность $\hat{r} - r$ составляет лишь $0.0059b$.²

Наконец, об оценке параметра $\tilde{\omega}$, или (что эквивалентно) об оценке полупериода колебаний T , связанного с $\tilde{\omega}$ соотношением

$$\partial T = \pi.$$

Кавендиш утверждает, что моменты достижения середины колебания (т.е. полусуммы экстремальных значений) на соседних полуволнах отстоят на расстояние T . Как определялись в эксперименте моменты достижения середины колебания? Кавендиш указывает, что ему удавалось угадать, между какими двумя соседними целыми делениями шкалы окажется значение середины колебания. Определялись моменты достижения этих делений и затем линейной интерполяцией вычислялся момент достижения середины.

Несложно доказать³, что в той мере, в какой верна модель (2), это правило является точным. Правило же для вычисления точки покоя r дает небольшую систематическую ошибку, оцененную выше.

3. Описание эксперимента

3.1. Об ошибках эксперимента

В настоящее время известно, что ошибка определения средней плотности Земли в опытах Кавендиша составляет величину порядка одного процента. В данной работе мы исследуем ошибки отдельных измерений в опытах Кавендиша для выяснения возможности обработки результатов с помощью методов математической статистики, т.е. мы пытаемся ответить на вопрос - получилась ли такая высокая точность в результате некоторого чуда или порядок ошибки можно было бы предсказать на основании результатов отдельных измерений, как это принято в теории ошибок. Следует заметить, что сам Кавендиш на основании размаха полученных им значений плотности Земли претендовал лишь на точность в 1/14 измеряемой величины, т.е. 7%.

Оценку средней плотности Земли Кавендиш получал по формуле (1). Из (1) видно, что небольшая относительная ошибка в значении T даст примерно удвоенную относительную ошибку (того же знака) в значении D . А ошибка в значении B даст такую же ошибку по абсолютной величине в значении D , но противоположного знака. Следовательно, достаточно оценить возможные ошибки в значениях T и B . Кроме того, Кавендиш определил, что в значения величин T и B , полученные опытным путем, нужно вносить некоторые поправки.⁴ Внесение поправок производится путем умножения измеренной в опыте величины на некоторый довольно близкий к единице множитель, так что относительные ошибки поправленных величин несущественно отличаются от таковых для измеренных величин.

Обычный способ предварительной оценки ошибок измерения состоит в том, что изучается разброс нескольких наблюдений одной и той же величины. Чтобы понять, есть ли такая возможность для данных Кавендиша, рассмотрим подробнее ход его экспериментов.

Что было известно Кавендишу к началу эксперимента? Главное – установка работоспособна, потому что изменение положения больших шаров вызывает заметное изменение положения коромысла. Не совсем повезло с выбором проволоки для подвеса крутильных весов. Первоначально выбранная проволока оказалась слишком тонкой - настолько, что

при движении коромысла возникала опасность удара малых шаров о стенки ящика. Стало понятно, что проволоку подвеса крутильных весов следует заменить на более жесткую, но Кавендиш решил сначала сделать несколько экспериментов с тонкой проволокой. Таких экспериментов три.

3.2. Первая серия экспериментов

5 августа 1797 года в 9 часов 42 минуты утра Кавендиш начал свой первый опыт по определению плотности Земли.

В начале опыта положение коромысла было зафиксировано на отметке 11.4, через 13 минут коромысло сдвинулось на 11.5 и еще через 10 минут находилось там же. Вычисленная по трем наблюдениям точка покоя округленно равнялась 11.5.

Таблица 1. Протокол первого эксперимента (из работы [2]).

Экстремальные точки	Положение коромысла	Время (ч:мин:сек)	Точка покоя	Время середины колебания	Разность (сек)
9:42:00. Большие шары в среднем положении					
	11.4	9:42:00			
	11.5	9:55:00			
	11.5	10:05:00	11.5		
10:05:00. Большие шары сдвинуты в положительную позицию					
23.4					
27.6			25.82		
24.7			26.07		
27.3			26.1		
25.1					
11:06:00. Большие шары возвращены в среднее положение					
5					
	11	12:00:48			
	12	12:01:30		12:01:13	
18.2			12		896
	12	12:16:29			
	11	12:17:20		12:16:09	
6.6			11.92		876
	11	12:30:24			
	12	12:31:11		12:30:45	
16.3			11.72		913
	12	12:45:58			
	11	12:47:04		12:45:58	
7.7					
			Среднее:		895

В 10 часов 5 минут Кавендиш перевел шары в положительную позицию. По предварительным оценкам ожидалось смещение точки покоя примерно на 15 делений, при этом коромысло, набрав скорость, должно было сместиться дальше еще примерно на 15 деле-

ний (и тем самым оказаться около 40-го деления, т.е. у стенки ящика). Чтобы избежать удара малых шаров о стенки ящика, Кавендиш произвел некоторые действия с большими шарами, но размах наблюдавшихся после этого колебаний оказался маленьким: от 23.4 до 27.6 делений. Это сделало неудобным определение времени середины колебаний, а следовательно, и полупериода колебаний T . В результате, в этом измерении полупериод колебаний не определялся. Однако определились три положения точки покоя: 25.82, 26.07 и 26.1. Эти значения, на первый взгляд, неплохо согласуются между собой, но все-таки наблюдается тенденция к постепенному возрастанию.

Положение точки покоя Кавендиш оценивает по трем последовательным экстремальным положениям. Можно наблюдать больше экстремальных положений, получая тем самым несколько значений точек покоя и, казалось бы, по их разбросу можно судить о величине ошибки определения B (смещения точки покоя, вызванного сдвигом больших шаров). Но оказывается, что этот путь закрыт, так как последовательные определения точки покоя, как мы видим, имеют систематический сдвиг. В первом измерении первого эксперимента этот сдвиг между первой и третьей оценкой точки покоя составляет $26.1 - 25.82 = 0.28$ деления, т.е. всего лишь около 2% от значения $B \approx 14$. Но в других экспериментах этот систематический сдвиг доходит до 10%. Ниже мы скажем несколько слов о борьбе Кавендиша за понимание причин этого явления.

Впрочем, к количественному описанию таких сдвигов эта борьба все равно не привела, так что Кавендиш решил учитывать при оценке B лишь положение *последней* точки покоя до поворота больших шаров и положение *первой* точки покоя после поворота. Таким образом, при каждом измерении получается лишь одно значение B , что лишает нас возможности оценивать ошибку определения этой величины.

Полупериод T измеряется как промежуток времени между серединами соседних полувольт колебаний коромысла. В данном случае Кавендиш считает допустимым брать среднее из нескольких отдельных определений T (заметим, что он определяет T не во всех измерениях). Представление о точности определения T можно составить, например, по отдельным измерениям в первых трех экспериментах (таблица 2).

Таблица 2. Наблюдаемые значения полупериода колебаний коромысла.

	Эксперимент			
	I	II	III	III
	второе измерение	второе измерение	первое измерение	второе измерение
отдельные измерения T	896	892	884	894
	876	886	878	
	913	826	887	
		925	867	
среднее	895	882	879	

Так, в первом опыте размах определений около 4% от среднего. Однако во втором эксперименте - более 11%. В значении D это даст более 20%.

В первых трех опытах были получены следующие значения D : 5.50; 5.61; 4.88; 5.07; 5.26; 5.55 (среднее значение 5.31). Заметим, что в последнем измерении, формально следуя рекомендациям Кавендиша, следовало бы внести поправку в значение T . Однако сам Кавендиш этого не делает и получает вполне приличное значение $D = 5.55$. Введение поправки привело бы к слишком малому значению $D = 4.71$. Впрочем, результат все равно получился бы относительно благоприятным: среднее значение из 6 наблюдений было бы равным 5.17, что отклоняется от современного значения 5.52 лишь на (-6.3%).

3.3. Основные эксперименты Кавендиша

После первых трех экспериментов Кавендиш заменил проволоку подвеса на более жесткую. Смещение точки покоя B уменьшилось примерно вчетверо - до 3 делений, а полупериод колебаний коромысла уменьшился примерно вдвое - до 7 минут.

Четвертый эксперимент принес три оценки плотности Земли. Полнота протокола позволяет установить, что замечательно возросла стабильность определения полупериода T - до одного-двух процентов вместо десяти процентов с более тонкой проволокой. Но систематический тренд во времени точки покоя не изменил своей относительной величины: все те же 10% от перемещения точки покоя B .

Пятый эксперимент внес некоторое разнообразие: обычно точка покоя двигалась в том же направлении, в котором большие шары тянули коромысло, а тут наблюдалось движение в противоположном направлении. Поэтому Кавендиш перешел к экспериментированию для установления причины сдвига точки покоя. Сначала возникло подозрение, что немагнитные материалы, из которых изготовлен аппарат, не безупречно чисты (в смысле магнетизма). Но ряд остроумных опытов, на которых мы не останавливаемся, заставил отвергнуть эту мысль. Оказалось, что движение точки покоя следует приписать разности температур больших шаров и воздуха вблизи ящика, в котором помещались крутильные весы. Но количественного описания эффекта Кавендиш так и не получил.

После качественного объяснения систематического дрейфа точки покоя последовали три эксперимента (шестой, седьмой и восьмой). В этих опытах не измерялся полупериод колебаний T . Для расчета плотности Земли Кавендиш воспользовался средним значением полупериода по данным предыдущих (четвертого и пятого) экспериментов. Зато измерялась температура больших шаров и воздуха около ящика с крутильными весами. Кавендиш предположил, что если большие шары находятся рядом с ящиком в течение получаса или часа, то внутри ящика несколько повышается температура, и это должно привести к

движению воздуха, влияющему на поворот коромысла. В рамках таких представлений понятно, почему Кавендиш оценивал поворот коромысла как различие между *последней* точкой покоя, предшествующей очередному повороту больших шаров, и *первой* точкой покоя после их поворота.

Эти три опыта (с шестого по восьмой) имеют каждый по два измерения. В результате вычисляется 6 оценок плотности Земли. Интересно заметить, что среднее из этих 6 оценок равно 5.502, т.е. даже ближе к современному, чем сакраментальное 5.48.

Следующая серия экспериментов возобновилась 29 апреля 1798 г. (девятый эксперимент) и продолжилась 5-го и 6-го мая (десятый и одиннадцатый эксперименты). Коромысло было сдвинуто в крайнюю возможную положительную позицию, при которой малые шары еще не касались стенок ящика. Большие шары при этом находились в положительной позиции и были повернуты затем в отрицательную. Каждый опыт приносил одно значение оценки плотности Земли, а именно, следующие: 5.1; 5.27; 5.39. Пятнадцатый же эксперимент (27-го мая) исследует крайний отрицательный сдвиг начального положения коромысла (и для него $D=5.3$). На эти опыты можно смотреть как на экспериментальную проверку тех поправок, которые предложил Кавендиш для учета неидеальности крутильных весов. Возникает впечатление, что в такой ситуации происходит некоторое преуменьшение искомой величины, но из-за малого числа наблюдений трудно говорить о статистической значимости.

В опытах XII, XIII, XIV (9-го мая, 25-го мая и 26 мая) - коромысло крутильных весов колеблется около середины шкалы. Эти опыты можно назвать «экспериментами, проводимыми в одинаковых условиях», которые имеются в виду в теории ошибок. Кавендиш делает достаточно много записей времени середины колебания, чтобы можно было оценить воспроизводимость величины T . Эти эксперименты приносят пять значений плотности Земли со средним 5.464.

О последних двух экспериментах – шестнадцатом и семнадцатом – следует сказать особо. Их выполнил Дж.Джилпин.⁵

3.4. Эксперименты, проведенные Джилпином

Эти два последние эксперимента отличаются более частыми определениями времени средин колебаний, чем сам Кавендиш нередко пренебрегал. В XVI эксперименте было получено 6 значений полупериода T со средним 436 сек; отклонения от среднего колеблются не сильно (от (-1) до (+3) сек). Удивительным образом, это значение T оказывается больше, чем значения, наблюдавшиеся во всех остальных измерениях (включая два измерения того же Джилпина в семнадцатом эксперименте), максимальное из которых равно 427 сек. Разница в 9 сек составляет чуть больше 2% от T , что перейдет в 4% в значении

плотности Земли D . Действительно, данному эксперименту отвечает $D = 5.75$ (что отличается от современного 5.52 на 4%).

В XVII эксперименте посчитанные значения оценок плотности Земли тоже оказываются сравнительно большими: 5.68 и 5.85.

С точки зрения математической статистики, естественно поставить вопрос, образуют ли полученные по всем 17-ти экспериментам значения плотности Земли статистически однородную выборку. При этом ясно, что первые шесть измерений (с недостаточно жесткой проволокой подвеса) не следует соединять в одну выборку с остальными 23 измерениями. В вариационном ряду этих 23 измерений наблюдения Джилпина получают номера (ранги) 20, 21 и 23, т.е. сумма рангов равна 64. Применяя критерий Вилкоксона, получаем, что при $m = 3$ и $n = 20$ такая величина статистики значима на уровне 0.005 [3]. Другими словами, выборка неоднородна.

Ниже мы в деталях изложим процедуру и результаты сопоставления реального колебания коромысла с моделью маятника. Но сначала опишем альтернативный метод обработки данных Кавендиша, который мы используем далее для построения графиков колебания маятника с трением.

4. Альтернативная обработка данных

Кавендиш нигде не оценивает скорости затухания колебаний коромысла. Между тем, предполагая постоянным коэффициент экспоненциального затухания (т.е. постоянное значение k в формуле (2)), можно несколько упростить обработку наблюдений. Значение k мы оценили, усредняя по многим опытам отношение размахов двух соседних полувольт. А при известном k положение точки покоя можно оценивать по одной полувольте, т.е. по двум соседним экстремальным точкам, а не по трем, как это делает Кавендиш. Действительно, из формулы (3) следует, что первое экстремальное положение коромысла задается формулой: $x(0) = r + a$, а второе: $x(T) = r - Ka$, где $K = \exp(-\frac{k}{2}T)$. В случае более жест-

кого подвеса $K \approx 0.930$. Отсюда $a = \frac{x(0) - x(T)}{1 + K}$; $r = x(0) - a = \frac{Kx(0) + x(T)}{1 + K}$.

Сохраняя правило Кавендиша относительно использования только первой и последней точки покоя, мы пересчитали по указанному альтернативному методу смещения точек покоя B , а следовательно, и новые оценки плотности Земли. При этом были использованы только опыты с жесткой проволокой подвеса, т.е. опыты IV - XVII. Результаты представлены в таблице 3. В этой таблице m обозначает среднее положение больших шаров, «+» их положительную позицию, а «-» их отрицательную позицию. Стрелка обозначает перемену позиции больших шаров.

Таблица 3. Сравнение двух способов определения точки покоя

№ эксперимента	№ измерения	Движение внешних грузов	Смещение точки покоя <i>B</i>		Оценка плотности Земли <i>D</i>	
			Метод Кавендиша	Альтернативный метод	Метод Кавендиша	Альтернативный метод
IV	1	$m \rightarrow +$	3.100	3.058	5.36	5.434
IV	2	$+ \rightarrow -$	-6.180	-6.108	5.29	5.353
IV	3	$- \rightarrow +$	5.920	5.889	5.58	5.610
V	1	$+ \rightarrow -$	-5.900	-5.830	5.65	5.718
V	2	$- \rightarrow +$	5.980	6.016	5.57	5.537
VI	1	$m \rightarrow -$	-3.030	-3.004	5.53	5.578
VI	2	$- \rightarrow +$	5.900	5.839	5.62	5.678
VII	1	$m \rightarrow -$	-3.150	-3.106	5.29	5.365
VII	2	$- \rightarrow +$	5.900	5.839	5.44	5.496
VIII	1	$m \rightarrow -$	-3.130	-3.058	5.34	5.467
VIII	2	$- \rightarrow +$	5.720	5.691	5.79	5.819
IX	1	$+ \rightarrow -$	-6.320	-6.170	5.10	5.224
X	1	$+ \rightarrow -$	-6.150	-6.019	5.27	5.384
XI	1	$+ \rightarrow -$	-6.070	-6.054	5.39	5.405
XII	1	$- \rightarrow +$	6.090	6.035	5.42	5.469
XIII	1	$- \rightarrow +$	6.120	6.068	5.47	5.517
XIII	2	$+ \rightarrow -$	-5.970	-5.937	5.63	5.661
XIV	1	$- \rightarrow +$	6.270	6.211	5.34	5.390
XIV	2	$+ \rightarrow -$	-5.970	-5.938	5.46	5.490
XV	1	$- \rightarrow +$	6.340	6.291	5.30	5.341
XVI	1	$- \rightarrow +$	6.100	6.124	5.75	5.727
XVII	1	$- \rightarrow +$	5.780	5.876	5.68	5.587
XVII	2	$+ \rightarrow -$	-5.250	-5.235	5.85	5.867

Из таблицы видно, что альтернативный метод дает в подавляющем большинстве случаев несколько меньшее (по абсолютной величине) смещение точки покоя. Соответственно, несколько большее значение плотности Земли. В среднем по методу Кавендиша получается $D = 5.483$, а по альтернативному методу $D = 5.527$. Последнее заметно ближе к современному значению 5.52. Можно предположить, что при определении точки покоя по одной полуволне более полно снимается нежелательный эффект ее дрейфа во времени.

5. Сопоставление наблюдений с моделью маятника

Интересно рассмотреть, насколько адекватно модель математического маятника с трением описывает реальное движение коромысла в опытах Кавендиша. Для этого мы оценим параметры уравнения модели (затухающей синусоиды), используя метод, описанный в предыдущем параграфе, и сравним ряд точек на этой синусоиде с реальными положениями коромысла.

В рамках этой модели положение коромысла $x(t)$ следует записать в виде

$$x(t) = r + y(t), \quad (5)$$

где r - точка покоя и $y(t)$ - колебание относительно точки покоя. Если выбрать начало отсчета времени $t = 0$ так, чтобы в этот момент достигалась экстремальная точка колебания $y(0)=a$, то слагаемое $y(t)$ в формуле (5) можно будет заменить по формуле (3), содержащей три параметра a , k , $\tilde{\omega}$. Но при этом четвертым параметром будет сдвиг по времени между модельным временем и астрономическим, которое указывается у Кавендиша.

Мы приняли следующий порядок оценки параметров. Предполагается, что для всех опытов с жесткой проволокой подвеса (23 измерения) можно принять одно и то же «идеальное» значение величины $K = \exp(-\frac{k}{2}T) \approx 0.930$, откуда получаем оценку k . Вместо ве-

личины $\tilde{\omega}$ мы оцениваем полупериод колебаний T , учитывая связь $\tilde{\omega}T=\pi$. Оценки полупериода, приводимые в работе Кавендиша, для опытов с жестким подвесом меняются слабо. Но значение, полученное Джилпином в 16-ом эксперименте, $T = 436$ сек явно больше прочих значений T для того же подвеса. Поэтому для оценки параметра уравнения синусоиды мы брали значение T , указанное в первичных протоколах Кавендиша для каждого измерения. (Для графиков это означает, что автоматически совпадают моменты середин последней полуволны идеальной синусоиды и последнего реального колебания).

Наиболее вариабельными параметрами (потому что они зависят от начальных условий) являются точка покоя r и амплитуда колебаний a . Их оценка по двум первым экстремальным точкам описана в предыдущем параграфе.

Остается описать привязку модельного времени к астрономическому.

В работе Кавендиша имеются данные, позволяющие определить путем линейной интерполяции астрономические моменты достижения некоторых точек, в частности, точек покоя. А модельное время t_0 достижения точки покоя находится из уравнения $y(t_0) = 0$, или, более подробно,

$$y(t_0) = a \exp\left(-\frac{k}{2}t_0\right)\left(\cos \tilde{\omega}t_0 + \frac{k}{2\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t_0\right) = 0,$$

откуда, с учетом положительности t_0 , получаем

$$\tilde{\omega}t_0 = \pi - \arctg \frac{\tilde{\omega}}{k/2}.$$

После нахождения сдвига между астрономическим и модельным временем астрономическое время может быть пересчитано в модельное.

Сопоставление идеальной модели маятника и реального движения коромысла производится графически следующим образом. С помощью указанных выше оценок параметров строится экспоненциально убывающая синусоида. Эта синусоида продолжается как функция времени на все время данного измерения. На тот же график наносятся экспериментальные точки, для которых известно положение коромысла и время. Экстремальные точки не имеют указания времени их достижения. Мы формально считаем абсциссами таких точек моменты достижения экстремумов идеальной синусоидой. Примером подобного графика является рис. 1.

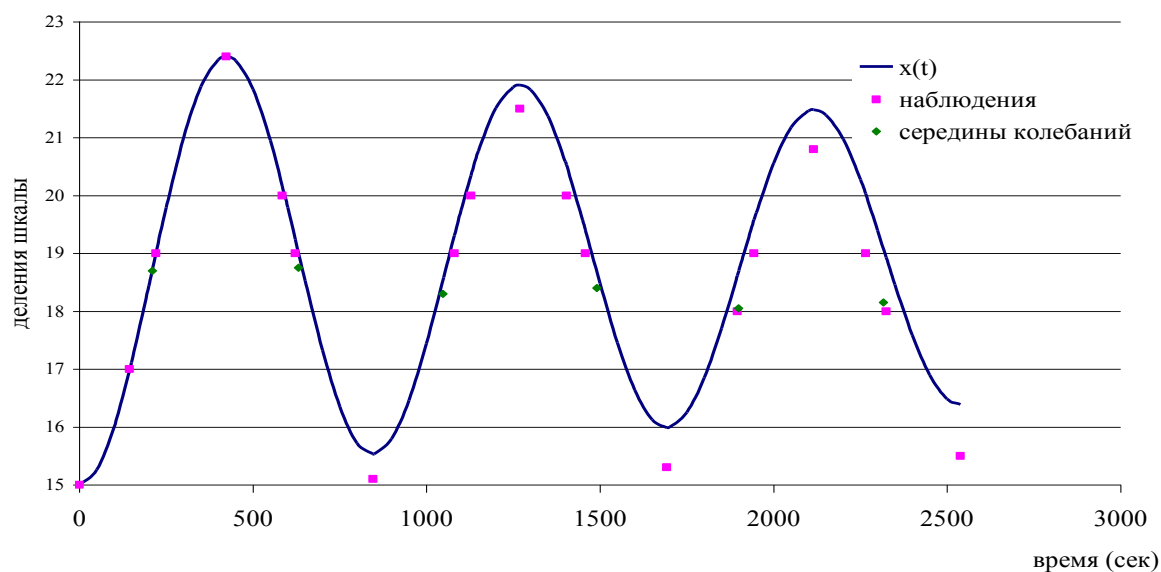


Рис. 1. Идеальная синусоида и реальные положения коромысла (опыт 4, измерение 2)

График на рис.1 привязан к данным второго измерения IV эксперимента (первое измерение полупериода колебаний коромысла после замены проволоки подвеса).

Реальные точки точно ложатся на первую полуволну, что следует приписать принятой процедуре оценки параметров синусоиды. Точки, лежащие поблизости от середины второй полуволны также близки к синусоиде: в этом смысле экстраполяция первой полуволны является успешной. Однако третья экстремальная точка лежит значительно ниже синусоиды. Для следующей экстремальной точки знак различия сохраняется, но его величина уменьшается. Затем различие постепенно увеличивается с сохранением знака. Мы наблюдаем эффект, отмеченный Кавендишем на основании изменения оцененных им то-

чек покоя. Постепенно происходит смещение колебаний в ту же сторону, в какую должна двигаться точка покоя при изменении положения больших шаров. В данном измерении большие шары переведены из положительной позиции в отрицательную, так что движение коромысла получило отрицательную тенденцию.

Оценкой полупериода колебаний T является разница между абсциссами соседних точек середин колебания. Из рис. 1 видно, что эти оценки колеблются. Действительно, наименьшая оценка 408 сек, а наибольшая 443 сек, т.е. разница 35 сек между ними составляет около 8% от среднего значения полупериода $T \approx 423$ сек. Во всех остальных опытах с более жестким подвесом такая разница в несколько раз меньше.

Следующий рис. 2 представляет более благополучную картину.

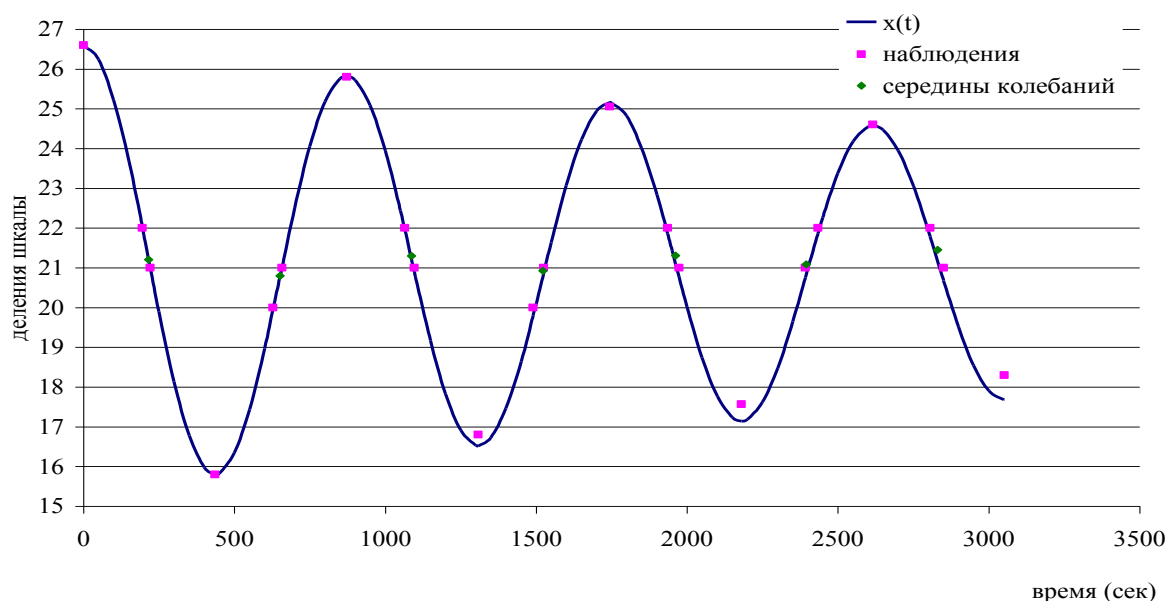


Рис. 2. Идеальная синусоида и реальные положения коромысла (опыт 16)

На этом рисунке график привязан к наблюдениям Джилпина (опыт XVI). Создается впечатление, что у аккуратнейшего мистера Джилпина получилось так, что первая полуволна успешно экстраполируется на все остальные наблюдения — за исключением лишь точек локального минимума, которые демонстрируют сдвиг реальных положений коромысла (на этот раз, в отличие от предыдущего рисунка, положительный) и обнаруживают явную тенденцию к возрастанию.

Относительная успешность экстраполяции первой полуволны синусоиды для описания последующих наблюдений заставляет предположить, что ошибки самих наблюдений невелики в сравнении с систематическим эффектом, вызываемым не до конца понятными силами (скорее всего, конвективными течениями воздуха внутри ящика, закрывающего крутильные весы).

6. Обсуждение

Когда говорят о теории ошибок, в частности, о доверительных интервалах, возникает образ ряда измерений, выполненных «в одинаковых условиях». Эти «одинаковые условия» невозможны чисто логически, так как если в реальности мы все условия эксперимента контролируем и поддерживаем одинаковыми, то и результат должен быть одинаковым во всех экспериментах. Если же мы не все условия контролируем, то откуда мы можем знать, что они остаются одинаковыми (с точностью до случайных, т.е. статистически устойчивых колебаний). И только когда мы имеем дело с подробным описанием процесса получения данных, можно понять, выполнены или нет требования «одинаковых условий».

Насколько нам известно, впервые в России вычислил доверительный интервал П.Л.Чебышев в своей магистерской диссертации [4]. В качестве исходных данных он использовал 29 значений средней плотности Земли, определенных Кавендишем и опубликованных в работе [1].

Внимательное прочтение тех или иных публикаций нередко приносит неожиданные результаты. В частности, П.Л. Чебышев в истории науки известен и как хороший вычислитель. Поэтому крайне удивительна арифметическая небрежность, которую он проявляет при обработке данных Кавендиша. Во-первых, все исходные числа лежат между 5 и 6, так что 5 следовало бы отбросить и иметь дело только с дробными долями. Но Чебышев этого

не делает. Эмпирическую дисперсию он вычисляет по формуле $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2$, подставляя $\bar{x} = 5.48$ (более точное значение 5.482). Для наблюдений Кавендиша $S \approx 0.20$, следовательно, $S^2 \approx 0.04$, так что отбрасывание 0.002 в значении $\bar{x}$ существенно влияет на знак сотых в S^2 . К счастью, в сумме квадратов наблюдений Чебышев тоже ошибся – настолько удачно, что это компенсировало ошибочное округление. В результате получился примерно правильный ответ: стандартная ошибка среднего значения около 0.04, а доверительный интервал (5.48 ± 0.1) имеет надежность примерно 0.99. Современное значение плотности Земли равно 5.52, т.е. отличается от найденного по данным Кавендиша на одну стандартную ошибку среднего. Казалось бы вероятностно-статистическая наука торжествует, и такой пример вполне возможно предъявлять в учебнике.

Так и сделал один из авторов данной статьи в учебном пособии [5]. Там же предъявлялась эмпирическая функция распределения в нормальном масштабе, достаточно похожая на прямую линию. Оценки среднего и стандартного отклонения наблюдений, считанные с графика эмпирической функции, вполне согласовывались с оценками по формулам. Таким образом, создавалось впечатление бесспорно удачного применения понятия доверительного интервала.

Но наступила эпоха интернета. Стало возможным без больших затрат времени получить ту или иную статью, хотя бы и XVIII века. При знакомстве с оригинальной публикацией Кавендиша обнаруживается, что в сводной таблице на месте третьего (в порядке получения в опытах) измерения стоит значение плотности 4.88, а у Чебышева 5.88 (остальные значения совпадают). Это не ошибка, и Чебышев не сам придумал это исправление. Дело в том, что Кавендиш сообщает, что среднее для первых 6 измерений равно 5.48. Это

важно, потому что остальные 23 измерения также дают в среднем 5.48. Но так будет, если на место третьего измерения поставить именно значение 5.88. Однако по данным первичных протоколов, опубликованных Кавендишем, для третьего измерения получается значение 4.88. Если принять его верным, то среднее из шести первых измерений будет 5.31, а для всех 29 измерений плотности Земли = 5.448. Оно отстоит от современного значения почти на две стандартных ошибки среднего, что маловероятно с точки зрения математической статистики. Ощущение блестящей победы статистического подхода пропадает.

Вообще, при статистической обработке эксперимента, когда мы имеем дело не только с окончательными результатами, но и с первичными протоколами, как в данном случае, предоставляется уникальная возможность установить (или отвергнуть) статистическую однородность результатов. К сожалению, даже когда есть возможность воспользоваться первичными протоколами, исследователи пренебрегают этим. Например, в работе [6] проверяется нормальность данных Кавендиша, а в [7] кроме этой проверки, аналогичное тестирование проводится с данными Милликаена [8]. Хотя и в том и в другом экспериментах (как было показано здесь и в работе [9]) данные не являются статистически однородными. А это лишает теоретической основы применение методов математической статистики.

Первые шесть экспериментов Кавендиша (с менее жестким подвесом) явно менее точны, чем последующие: оценки полупериода колебаний T при жестком подвесе на порядок более устойчивы (в смысле относительных колебаний). И при оценке точности полученного результата Кавендиш ориентируется на последние 23 наблюдения. Для них среднее значение есть именно 5.48, а минимальное и максимальное значения отличаются от среднего не более, чем на 0.39, т.е. примерно на 7%. Эта оценка Кавендиша вполне выдержала испытание временем. Но на самом деле точность оказалась гораздо выше: порядка 1%, и нас крайне интересует вопрос, можно ли было предвидеть по данным Кавендиша столь высокую точность с помощью теории ошибок.

Рассмотрим следующую таблицу статистических характеристик результатов Кавендиша, выведенных по разным подсовокупностям его опытов.

Таблица 4. Средние значения и стандартные отклонения различных оценок плотности Земли по данным Кавендиша

Номера включенных экспериментов	Число наблюдений	Метод Кавендиша		Альтернативный метод	
		Среднее значение	Стандартная ошибка среднего	Среднее значение	Стандартная ошибка среднего
I-XVII (все наблюдения)	29	5.448	0.04103	-	-
IV-XV (жесткий подвес, без наблюдений Джилпина)	20	5.442	0.03828	5.497	0.03334
IV-XVII (жесткий подвес, все наблюдения)	23	5.483	0.04429	5.527	0.03709

Чтобы наблюдения Кавендиша можно было приводить в качестве классического примера, когда хорошо действует теория ошибок, нужно, чтобы современное значение плотности Земли 5.52 не просто укладывалось в достаточно широкий доверительный интервал. Объявить о хорошем согласии с теорией ошибок уместно в случае, если отличие от современного значения не превосходит, скажем, одной стандартной ошибки среднего. В случае всех экспериментов (I – XVII) отличие чуть меньше двух стандартных ошибок, а это уже не годится. Если взять опыты Кавендиша с IV по XV, различие еще несколько больше. И только два эксперимента Джилпина, явно нарушающие статистическую однородность, согласно критерию Вилкоксона, спасают дело, доводя различие до одной стандартной ошибки среднего. Впрочем, при альтернативном методе обработки данных хороший результат получается как без опытов Джилпина, так и с ними.

Измерения Кавендиша статистически неоднородны. Но если иметь в виду не только арифметику, а учитывать и другую информацию, содержащуюся в работе [2], то можно понять, где Кавендиш ищет источники неоднородности результатов. Один из таких источников – постепенный дрейф точки покоя, притом с разной скоростью в различных опытах. Кавендиш занимается исследованием причины этого дрейфа и приходит к выводу, что большие шары, хотя и находятся все время вне ящика с крутильными весами, все же за счет разности температур могут возбуждать потоки воздуха внутри ящика. Однако количественного описания этого эффекта он не получил, а ограничился рекомендацией учитывать смещение точки покоя B , вызванное движением больших шаров, от ее последнего положения перед сдвигом больших шаров до первого положения после их сдвига.

Согласно Кавендишу положение точки покоя вычисляется по трем соседним экстремальным положениям коромысла. Привлекая уравнение модели маятника с трением для описания движения коромысла, мы определили точку покоя по двум положениям коромысла. Оказалось, что при таком пересчете среднее значение плотности Земли заметно приближается к современному.

Какое же значение плотности Земли нашел Кавендиш? Записал он значение 5.48, но последующие поколения ученых не могли не исправить арифметической ошибки в вычислении среднего из первых шести наблюдений (восстанавливая, конечно, значение 4.88). Тогда получается 5.45. Если учесть поправку для T в шестом измерении, то получится еще меньше. Сам он ориентировался на наблюдения с более жестким подвесом: среднее из 20 последующих наблюдений, полученных лично Кавендишем, равно 5.44. Но если добавить еще три наблюдения Джилпина, то в среднем будет 5.48. Если же использовать альтернативный метод оценки, то вместо 5.44 будет 5.50; вместо же 5.48 будет 5.53. Ввиду такого расхождения, мы полагаем, что нужно волевым образом постановить, что Кавендиш нашел в качестве плотности Земли то, что он записал, т.е. 5.48 с относительной точностью 0.7%.

Выводы

При преподавании математической статистики желательно приводить примеры обработки реальных данных. Хорошо бы при этом знать и условия проведения экспериментов для обоснования применимости или неприменимости статистических методов. Эксперимент Кавендиша и его описание предоставляет нам такую возможность.

В данной статье рассмотрены и изучены (там, где позволяют сделанные измерения) ошибки воспроизводимости определяемых величин и сделаны выводы о статистической неоднородности всей совокупности результатов, что не позволяет строить доверительный интервал и на его основании судить о точности определения средней плотности Земли.

В статье конкретизирована модель маятника с трением в применении к этому эксперименту. Кавендиш подразумевал такую модель в неявном виде, но при этом считал, что можно пренебречь трением. На основании этой модели и пользуясь некоторыми рекомендациями Кавендиша мы предложили альтернативный метод определения плотности Земли, дающий значение, более близкое к современному чем у Кавендиша.

В нашей работе проведено сопоставление реальных колебаний коромысла в экспериментах Кавендиша с соответствующим графиком предложенной модели маятника с трением, визуализирующее отклонения результатов экспериментов от модели.

Заключая описание экспериментов Кавендиша с ориентацией на вероятностные представления, можно сказать, что его замечательный прибор исследован совершенно недостаточно. Мы сталкиваемся с тем, что в конце XVIII века наука еще была делом любителей-одиночек, которые не могли выполнить большой объем экспериментальной работы. Например, положения коромысла крутильных весов фиксировались недостаточно часто (только при прохождении вблизи середины колебания). Поэтому нельзя составить хорошего представления о том, насколько реальное движение коромысла отличалось от экспоненциально затухающей синусоиды. В общем-то, очень не хватало лаборатории из нескольких оплачиваемых сотрудников, которые могли бы сделать несколько сотен наблюдений для выяснения реальных свойств прибора.

Сам Кавендиш планировал изменения в конструкции прибора, которые позволили бы избавиться от необъяснимых помех, но этим планам не суждено было сбыться.

Список литературы

1. Cavendish H. Experiments to determine the density of the earth // Phil. Trans. of Royal Soc. of London. 1798. Vol. 88. P. 469-526.
2. Newton S.I., Bouguer M.P., Cavendish H. Experiments to determine the density of the earth // In book: The Laws of Gravitation: Memoirs by Newton, Bouguer and Cavendish, Together with Abstracts of Other Important Memoirs. Scientific memoirs. Vol. 9. American book Company, 1900. P. 57-107.
3. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 416 с.

4. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева. В 5 т. Т. 5. Прочие сочинения. Биографические материалы. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1951. С. 26-87.
5. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. М.: Издательский центр «Академия», 2008. 360 с.
6. Рогожников А.П., Лемешко Б.Ю. Исследование критериев отклонения эмпирического распределения вероятностей от нормального закона методами статистического моделирования // Материалы Российской научно-технической конференции «Обработка информационных сигналов и математическое моделирование». Новосибирск, 2012. С. 66-69.
7. Лемешко Б.Ю., Рогожников А.П. О нормальности погрешностей измерений в классических экспериментах и мощности критериев, применяемых для проверки отклонения от нормального закона // Метрология (Приложение к журналу «Измерительная техника»). 2012. № 5. С. 3-26.
8. Millikan R.A. On the elementary electrical charge and the avogadro constant // Phys. Rev. 1913. Vol. 2. P. 109-143. DOI: [10.1103/PhysRev.2.109](https://doi.org/10.1103/PhysRev.2.109)
9. Тутубалин В.Н., Барабашева Ю.М., Девяткова Г.Н., Угер Е.Г. Опыт Милликаена с точки зрения математической статистики // Вопросы истории естествознания и техники. 2016. Т. 37, № 2.

Примечания

¹Не мешает уточнить, какую именно величину измерял Кэвендиш. Ее определение следующее. Заменим Землю шаром, радиус которого равен среднему радиусу Земли, мысленно заполнив этот шар однородным материалом. Спрашивается, чему должно быть равно *отношение* плотности этого материала к плотности воды, чтобы такой шар притягивал предметы на его поверхности с той же силой, с какой их притягивает Земля? Таким образом, Кэвендиш получает 29 значений *безразмерной* величины. Но поскольку плотность воды равна (с достаточной точностью) 1 г/см^3 , можно считать, что это значения плотности указанного материала в единицах г/см^3 .

²Кавендиш, однако, не делает попыток оценить затухание k и убрать получающуюся систематическую ошибку. Это можно попытаться объяснить следующим обстоятельством. Согласно примечаниям комментатора ([2], стр.66) Кавендиш склонялся к тому, что сила трения в вязкой среде пропорциональна квадрату скорости, и лишь значительно позже выяснилось, что нужно брать первую степень скорости (как это и сделано выше).

³Рассмотрим две соседние полуволны колебаний $y_1(t)$ и $y_2(t)$: пусть для определенности первая полуволна идет от локального минимума к локальному максимуму, а вторая от этого максимума к следующему локальному минимуму. Согласно соотношению (3), выполняется равенство

$$y_2(t) = -\exp\left(-\frac{k}{2}T\right)y_1(t-T). \quad (4)$$

Во время движения коромысла по первой полуволне значение $y_1(t)$ пробегает слева направо некий отрезок. Пусть момент t_α , где $0 \leq \alpha \leq 1$, выбран так, что за время от достижения первого локального минимума до момента t_α проходится доля α этого отрезка. В силу соотношения (4), за такой же отрезок времени от момента достижения локального максимума вторая полуволна $y_2(t)$ пройдет справа налево расстояние, которое меньше в $\exp(-\frac{k}{2}T)$ раз, чем предыдущее. Но полное расстояние, проходимое $y_2(t)$, во столько же раз меньше, чем расстояние, проходимое $y_1(t)$. Таким образом, мы получаем, что промежутки времени, за которые соседние полуволны проходят одну и ту же долю α их полного размаха, сдвинуты на расстояние T . На практике удобно взять $\alpha = 1/2$. Тогда получается, что моменты достижения середины колебания (т.е. полусуммы экстремальных значений) на соседних полуволнах отстоят на расстояние T .

⁴Если T определено по колебаниям коромысла, в то время как большие шары были сдвинуты в близкую позицию, следует вместо величины T взять величину $T(1 - \frac{B}{185})$. Если же T определялось, когда большие шары были сдвинуты в среднюю позицию, то поправка в значение T не нужна.

Если движение коромысла B измерено при перемещении больших шаров из близкой позиции в среднюю (или наоборот), то следует измерить, на какое число делений n положение коромысла отличалось от 20-го деления, когда большие шары находились в близкой позиции. Если при этом коромысло и большие шары находятся по одну и ту же сторону от 20-го деления, то вместо B нужно взять $B(1 - \frac{2n}{185})$. (Если же коромысло и большие шары находятся по разные стороны от 20-го деления, то надо взять $B(1 + \frac{2n}{185})$, но таких случаев в экспериментах Кавендиша нет.)

Если большие шары передвинуты из одной близкой позиции в другую и при этом коромысло сдвинулось на $2B$, то вместо $2B$ следует взять $2B(1 - \frac{2B}{185})$. И если при этом T определялось в одной из этих позиций, то значения T и B можно не поправлять (так как их поправки компенсируют друг друга в формуле (1)).

⁵Джордж Джилпин числился клерком Королевского общества (он не был его членом, т.е. *fellow*), но фактически работал как ученый. В частности, он многие годы сотрудничал с Кавендишем в разных областях науки. Одно то, что Кавендиш допустил его к своим крутильным весам, свидетельствует о его высокой оценке Джилпина как ученого.

Principles for Checking the Statistical Results Processing Correctness of the Cavendish Classic Experiment

04, April 2016

DOI: 10.7463/0416.0837664

V.N. Tutubalin¹, Yu.M. Barabasheva^{1,*},

G.N. Devyatkova¹, E.G. Uger¹

¹Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia

[*ibarabash@mail.ru](mailto:ibarabash@mail.ru)

In teaching mathematical statistics it is desirable that students of engineering and natural sciences could study the methods of statistical processing based on data of real experiments. Conditions for these experiments are of critical importance to justify the application of statistical methods. The article considers a classic Henry Cavendish's experiment to determine a mean density of the Earth from this point of view.

The article gives a detailed description of the experimental Cavendish's setup, ideas, his experiments are based on, and a method to determine the values used for assessment of the mean density of the Earth. It also concretizes the equation of a pendulum model with friction on which Cavendish implicitly (and neglecting a friction) relied.

It is shown that the formal use of methods of mathematical statistics is not always justified. Detailed records of all experiments, published by Cavendish, enable us to study these data in terms of mathematical statistics, convince us of their statistical inhomogeneity and impossibility to construct a confidence interval to estimate accuracy.

The article proposes an alternative way for processing Cavendish's data implicitly using the pendulum model equation with friction to reduce an effect of systematic errors and improve matching the Cavendish results with modern data.

References

1. Cavendish H. Experiments to determine the density of the earth. *Phil. Trans. of Royal Soc. of London*, 1798, vol. 88, pp. 469-526.
2. Newton S.I., Bouguer M.P., Cavendish H. Experiments to determine the density of the earth. In book: *The Laws of Gravitation: Memoirs by Newton, Bouguer and Cavendish, Together*

- with Abstracts of Other Important Memoirs. Scientific memoirs. Vol. 9.* American book Company, 1900, pp. 57-107.
3. Bol'shev L.N., Smirnov N.V. *Tablitsy matematicheskoi statistiki* [Tables of mathematical statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 416 p. (in Russian).
 4. Chebyshev P.L. *Polnoe sobranie sochinenii P.L. Chebysheva. V 5 t. T. 5. Prochie sochineniya. Biograficheskie materialy* [Complete works of P.L. Chebyshev. In 5 vols. Vol. 5. Other works. Biographical materials]. Moscow-Leningrad, AN SSSR Publ., 1951, pp. 26-87. (in Russian).
 5. Tutubalin V.N. *Teoriya veroyatnostei* [Theory of probabilities]. Moscow, Publishing Center Academia, 2008. 360 p. (in Russian).
 6. Rogozhnikov A.P., Lemeshko B.Yu. Research criteria of deviation of empirical probability distribution from normal law methods of statistical modeling. *Materialy Rossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii "Obrabotka informacionnyh signalov i matematicheskoe modelirovanie"* [Proceedings of the Russian scientific and technical conference "Processing of information signals and mathematical modeling"]. Novosibirsk, 2012, pp. 66-69. (in Russian).
 7. Lemeshko B.Ju., Rogozhnikov A.P. About normality of measurement errors in classical experiments and power of criteria used to check deviations from normal law. *Metrologija (Prilozhenie k zhurnalu "Izmeritel'naja tehnika") = Metrology (app. to the mag. "Measurement Techniques")*, 2012, no. 5, pp. 3-26. (in Russian).
 8. Millikan R.A. On the elementary electrical charge and the avogadro constant. *Phys. Rev.*, 1913, vol. 2, pp. 109-143. DOI: [10.1103/PhysRev.2.109](https://doi.org/10.1103/PhysRev.2.109)
 9. Tutubalin V.N., Barabasheva Ju.M., Devjatкова G.N., Uger E.G. Experience of Millikan from point of view of mathematical statistics. *Voprosy istorii estestvoznaniia i tekhniki (VIET)*, 2016, vol. 37, no. 2. (in Russian).