

Многокритериальная задача об оптимальной остановке в процессе отработки программного обеспечения

02, февраль 2016

Можаров Г. П.^{1,*}

УДК: 519.6

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

^{*}mojarov_g@mail.ru

Введение

Высокая эффективность компьютерных систем (КС) систем управления реального времени может быть достигнута только при соответствующей надежности всех компонентов систем. Условно в проблеме анализа надежности КС выделяют аппаратную, структурную (комбинаторную) и программную надежность [1, 2].

Отказы аппаратной части и программного обеспечения (ПО) КС являются взаимозависимыми событиями. Взаимозависимость может возникать по многим причинам, в том числе из-за влияния отказов друг на друга, влияния режимов применения и т.д. [1, 3]. Анализ надежности КС является достаточно сложной задачей, на которую влияет большое количество факторов. В то же время, в связи с продолжающимся ростом объема программ и расширением функций, выполняемых программно, проблема создания надежного ПО для КС систем управления реального времени приобретает все большее значение и становится все более важной и актуальной. Одним из наиболее трудоемких этапов создания ПО являются этапы комплексной отработки ПО, когда разработчик делает прогоны с различными исходными данными по максимально возможным ветвям ПО с целью выявления ошибок. По оценкам специалистов затраты на отработку достигают 50% стоимости разработки ПО [4, 5]. В этой связи снижение затрат (как финансовых, так и временных) на отработку ПО является важной и актуальной задачей.

Рассматривается задача статистического решения, в которой каждый прогон с некоторыми исходными данными стоит некоторую фиксированную сумму, и предположим, что разработчик может проводить прогоны ПО последовательно, делая после каждого прогона вывод о том, следует ли ему принять решение прекратить дальнейшие прогоны ПО или же отложить принятие этого решения и провести очередной прогон. Как правило, найдутся процедура выбора и решающая функция с общим риском, меньшим, чем риск всякой процедуры, при которой разработчик ПО должен задать некоторый фиксированный объем выборки заранее, до проведения наблюдений. В качестве примера, когда последователь-

ный выбор дает выигрыш, рассмотрим задачу, в которой разработчик должен решить, прекращать ему или нет прогон по всем ветвям ПО с некоторыми исходными данными. Предположим, что он может распознавать ошибки ПО и что за прогон необходимо платить некоторую сумму. Затем допустим, что, зная эту сумму, свою функцию потерь и априорное распределение, разработчик решает провести испытание на надежность ПО случайной выборкой из δ тестов и прекратить дальнейшие испытания в том и только в том случае, когда число обнаруженных ошибок с этой выборкой тестов окажется не большим Δ . Однако если наблюдения в выборке производятся и оплачиваются последовательно (т.е. по одному), то разработчик может найти процедуру, дающую тот же результат, что и предыдущая, но с меньшими затратами. Более точно, пусть прогоны проводятся по одному и процесс выбора прекращается, как только либо число ошибок в ПО достигло Δ , либо число наблюдаемых удачных прогонов стало равным $\delta - \Delta$. Весьма вероятно, что какое-нибудь из этих событий произойдет прежде, чем будут проведены все δ тестов. В первом случае разработчик решает продолжить прогон тестов, во втором – прекратить прогонку. Его решение всегда будет согласовываться с решением, основанным на всех δ прогонах [2-5].

Математическое постановка задачи последовательного выбора

Одним из основных инструментов моделирования стохастических систем являются марковские цепи. Исследуем многокритериальные задачи оптимального управления для систем, моделируемых марковскими цепями. В задаче принятия решений необходимо установить, окупает ли прирост (от новых прогонов) количества вновь обнаруженных ошибок, плату за их получение. Это характерно для задач теории статистических решений, в частности, остановки процесса прогонов тестовых программ для диагностирования и исправления ошибок [3, 6].

Пусть каждому состоянию $i \in S = \{1, \dots, N\}$ соответствует конечное множество K_i решений (или альтернатив), элементы которого обозначим номерами $1, \dots, k_i$. Пространством стратегий K называется прямое произведение множеств решений $K = K_1 \times \dots \times K_N$.

Пусть в i -м состоянии имеется не одно, а k_i множеств переходных вероятностей $\{p_{ij}^l\}$, $l = \overline{1, k_i}$. При $|K_i|=1$ имеем рассмотренную ранее ситуацию неуправляемой цепи Маркова.

Если система находится в состоянии $i \in S$ и принимается решение $k \in K_i$, то получаем доход r_i^k , а состояние системы в следующий момент времени определяется вероятностью p_{ij}^k , где p_{ij}^k – вероятность того, что система из состояния $i \in S$ при выборе решения $k \in K_i$ перейдет в состояние $j \in S$.

Таким образом, смысл k -го решения в i -м состоянии заключается в выборе одного

набора переходных вероятностей $\{p_{ij}^k\}$ из K_i возможных. Предполагается, что доход r_i^k ограничен при всех $i \in S$ и $k \in K_i$. Кроме того,

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}^k = 1, \quad p_{ij}^k \geq 0 \quad \text{при } i, j \in S, \quad k \in K_i.$$

Управляемой цепью Маркова называется конструкция, задаваемая параметрами $\langle K, P, r \rangle$, где K – решения, P – вероятности переходов, r – доходы. Доход, полученный за несколько шагов, является случайной величиной, зависящей от начального состояния и принимаемых в каждый момент времени решений [3].

Решение, принимаемое в конкретный момент, так называемое частное управление, есть последовательность решений в моменты $n=1, 2, \dots$. Качество управления можно оценить средним суммарным доходом (при конечном времени) или средним доходом в единицу времени (при бесконечном времени).

Пусть

$$f = \langle k_1, \dots, k_N \rangle \in K. \quad (1)$$

Стратегией π называется последовательность решений $\pi = (f_1, \dots, f_n, \dots)$, где f_n – вектор вида (1), i -я компонента которого, обозначаемая через $f_n(i)$ является решением, принимаемым в состоянии $i \in S$ в момент n , т.е. задание стратегии означает полное описание в каждый момент времени $t = 0, 1, \dots, n, \dots$ конкретных решений, которые должны были бы приниматься в i -м состоянии ($i = \overline{1, N}$), если бы система находилась в нем в рассматриваемый момент.

Стратегию $\pi = (f_1, f_2, \dots)$ назовем марковской, если решение f_n , принимаемое в каждом конкретном состоянии, не зависит от предшествующих состояний и принимавшихся в них решений. В случае марковской стратегии решения f_n могут зависеть только от момента времени n .

Обозначим произвольную конечную часть стратегии через ${}^n\pi = (f_1, \dots, f_n)$. Пусть зафиксированы произвольная стратегия $\pi = (f_1, \dots, f_n, \dots)$, и некоторый момент времени n . Если в этот момент система находилась в состоянии $i \in S$, то в следующий $(n+1)$ -й момент времени она будет находиться в состоянии $j \in S$ с вероятностью p_{ij}^k , где $k = f_n(i)$. Тогда матрица переходных вероятностей в момент n имеет вид

$$P = P(f_n) = \begin{pmatrix} p_{11}^{f_n(1)} & \dots & p_{1N}^{f_n(1)} \\ p_{21}^{f_n(2)} & \dots & p_{2N}^{f_n(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{N1}^{f_n(N)} & \dots & p_{NN}^{f_n(N)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при фиксированной стратегии π получаем цепь Маркова с матрицами перехода $P(n) = P(f_n)$, $n = 1, 2, \dots$.

При фиксированной стратегии $\pi = (f_1, f_2, \dots)$ вероятность перехода за n шагов из i -го состояния (в первый момент) в j -е (в момент $n+1$) определяется матрицей

$$P_n({}^n\pi) = P(f_1)P(f_2) \dots P(f_n).$$

Вычислим доход в момент n . Если при этом система находится в j -м состоянии, то было принято решение $f_n(j)$ и на n -м шаге получен доход $r_j^{f_n(j)}$. Положим

$$r(f_n) = \langle r_j^{f_n(1)}, \dots, r_j^{f_n(N)} \rangle. \quad (2)$$

С учетом (2) получаем, что доход в момент n определяется вектором

$$P_{n-1}(\pi)r(f_n), \quad (3)$$

причем его i -я компонента соответствует i -му начальному состоянию [4]. Действительно, i -я компонента вектора (3) равна $\sum_{j=1}^N p_{ij}^{(n-1)} r_j^{f_n(j)}$, где $p_{ij}^{(n-1)}$ – вероятность попадания из i -го состояния в j -е в момент n ; $r_j^{f_n(j)}$ – соответствующий доход.

Тем самым установлено, что вектор ${}^n\Gamma(\pi)$ суммарных средних доходов, полученных до любого момента n включительно, для любой стратегии $\pi = (f_1, \dots)$ равен ${}^n\Gamma(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i(\pi)r(f_{i+1})$, где $P_0(\pi) = E$, а E – единичная матрица. Действительно, доход в момент $n=1$ равен $r(f_1) = Er(f_1)$. Положим

$$\Gamma(\pi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} {}^n\Gamma(\pi)/n. \quad (4)$$

Отметим, что ${}^n\Gamma(\pi) = {}^n\Gamma({}^n\pi)$, где $\pi = (f_1, \dots, f_n, \dots)$, ${}^n\pi = (f_1, \dots, f_n)$.

Стратегия π^* , максимизирующая $\Gamma(\pi)$, т.е. удовлетворяющая векторному покомпонентному неравенству

$$\Gamma(\pi^*) \geq \Gamma(\pi) \quad (5)$$

при всех π , назовем оптимальной (для бесконечного времени). Стратегия ${}^n\pi^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$, удовлетворяющая векторному неравенству

$${}^n\Gamma({}^n\pi^*) \geq {}^n\Gamma({}^n\pi) \quad (6)$$

при всех ${}^n\pi = (f_1, \dots, f_n)$, называется оптимальной (для времени n). Пользуясь понятием отношения Парето [5-7], неравенства (5) и (6) можно записать в виде

$$\Gamma(\pi^*)P\Gamma(\pi), \quad {}^n\Gamma({}^n\pi^*)P^n\Gamma({}^n\pi)$$

Отметим, что нижний предел в формуле (4) определяется по координатам. Время

функционирования реальной системы не может быть бесконечным, но может быть весьма большим. Поэтому формула (4) выражает гарантированный результат: в какой бы момент система ни остановилась, накопленный к этому моменту средний доход в единицу времени будет не меньше, чем $\Gamma(\pi)$.

Многокритериальная задача об оптимальной остановке

Осуществляя последовательные прогоны условимся, что найденная ошибка означает выигрыш $+1$, а противоположное событие – проигрыш -1 . Таким образом, суммарный выигрыш за n шагов равен $B_n = \sum_{i=1}^n X_k$, где $X_k = +1$, если в результате k -го прогона найдена ошибка в программе, $X_k = -1$ в противном случае. После каждого прогона можем принять одно из двух решений: прекратить отработку программ (и собрать накопившийся к данному моменту выигрыш) или продолжить отработку и произвести по крайней мере еще один прогон. Необходимо прекратить отработку в такой момент, чтобы максимизировать свой выигрыш. Выберем в качестве состояния ПО общий накопленный к данному моменту выигрыш. Иными словами, $S = \{..., -N, -N+1, ..., 0, 1, ..., N, ...\}$ – множество всех целых чисел и

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/2, & j = i+1, \\ 1/2, & j = i-1, \\ 0, & \text{для других } j. \end{cases}$$

Доход $F(j)$ в состоянии $j \in S$ равен j , т.е. просто выигрышу в данный момент.

Задачей об оптимальной остановке называется задача $\langle P, S, S_c, S_s, i_0, F \rangle$, где P – матрица переходов цепи Маркова с множеством состояний S ; S_c и S_s – произвольные непересекающиеся подмножества S (S_c называют множеством состояний с вынужденным продолжением, S_s – множеством состояний с вынужденной остановкой); F – функция дохода, определенная на S ; i_0 – начальное состояние [6, 7].

Последовательность $\langle i_0, i_1, ..., i_n \rangle$ называется останавливающей, если после наблюдения состояний $i_0, i_1, ..., i_n$ принимается решение остановиться в i_n . Ясно, что $i_n \notin S_c$; если $i_n \in S_s$ то всякая последовательность, оканчивающаяся в i_n , является останавливающей.

Правилom остановки называется любое конечное или бесконечное множество L останавливающих последовательностей такое, что $\sum_L P(i_0, i_1, ..., i_n) = 1$, где

$P(i_0, i_1, ..., i_n) = p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}$. Оптимальным правилом остановки называется правило L_M ,

для которого средний доход $M(L) = \sum_L P(i_0, i_1, \dots, i_n) F(i_n)$ максимален. Величина $\max_{(L)} M(L)$ называется ценой. Тогда существует подмножество T множества S такое, что оптимальное правило остановки состоит из тех и только тех последовательностей, которые оканчиваются в T . Ясно, что $S_s \in T$, $S_c \subseteq S \setminus T$ [5, 7, 8].

Оптимальное правило не зависит от начального состояния, однако цена от него зависит. Обозначим через $H(i)$ цену, полученную при использовании оптимального правила при начальном состоянии i ; функция $H(i)$ удовлетворяет уравнению

$$H(i) = \begin{cases} F(i), & i \in S_s, \\ \sum_{j \in S} p_{ij} H(j), & i \in S_c, \\ \max \left\{ F(i), \sum_{j \in S} p_{ij} H(j) \right\}, & i \notin S_c \cup S_s. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнение (7) выражает принцип Беллмана в задаче об оптимальной остановке. В некоторых случаях его решение можно найти в явном виде [3].

В других аналогичных ситуациях поступающие объекты характеризуются несколькими признаками; упорядочение объектов по каждому признаку случайно, не зависит от упорядочения по остальным признакам и заранее не известно. Необходимо выбрать такой объект, который был бы в определенном смысле оптимальным среди всех остальных [8, 9].

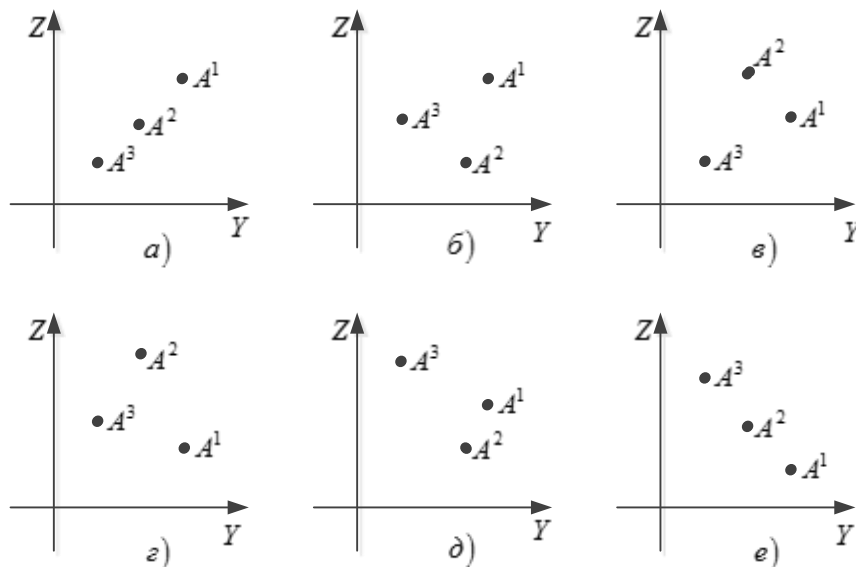


Рис. 1. Шесть расположений множества Ω из трех точек на плоскости

Будем считать, что объекты являются точками из E_m . Опишем конкретный механизм предъявления точек. Последовательно предъявляется n точек из E_m : A^1 , A^2 и т.д.; при

этом

$$\Pr\{A_1^2 > A_1^1\} = \Pr\{A_2^2 > A_2^1\} = \dots = \Pr\{A_m^2 > A_m^1\} = 1/2$$

и указанные события, относящиеся к разным координатам, независимы. При трех точках и двух осях общее число расположений точек в E_2 , отличающихся порядком по осям, равно $3!3! = 36$ и каждое из них имеет одну и ту же вероятность $1/36$. Шесть таких расположений были показаны на рис. 1.

Заметим, что на рис. 1 расположение по оси Y всегда одно и то же: $A_1^1 > A_1^2 > A_1^3$, а по Z оси представлены все $3! = 6$ возможных порядков. При $m=1$ описанный механизм совпадает с механизмом, рассмотренным в типовой ситуации во введении.

Задача состоит в том, чтобы выбрать с наибольшей вероятностью одну из лучших в некотором смысле точек, используя только данные о предъявленных точках.

Многокритериальной задачей оптимального последовательного выбора называется тройка $\langle Q, C, n \rangle$, где Q – механизм предъявления точек; C – функция выбора, обладающая свойствами:

а) если $A = \{A^1, \dots, A^l\}$, $B = \{B^1, \dots, B^l\}$,

$$\operatorname{sgn}(A_s^i - A_s^j) = \operatorname{sgn}(B_s^i - B_s^j) \quad (i, j = \overline{1, l}; s = \overline{1, m}),$$

то номера элементов A^i , выбираемых из A , совпадают с номерами элементов B^i , выбираемых из B ;

б) C наследственна; n – заранее заданное число предъявляемых точек.

Точка A^i считается одной из лучших, если $A^i \in C(\Omega)$. Считаем, что Q совпадает с указанным выше механизмом.

Свойства функции выбора C позволяют по произвольной последовательности поступивших точек $\langle A^1, \dots, A^k \rangle$ однозначно определить условную вероятность $P_1(A^1, \dots, A^k)$ того, что $A^k \in C(A^1, \dots, A^n)$ при условии, что данная последовательность $\langle A^1, \dots, A^k \rangle$ уже предъявлена, и безусловную вероятность $P_2(A^1, \dots, A^k)$ предъявления данной последовательности. Под правилом выбора будем понимать любое множество L последовательностей $\langle A^1, \dots, A^s \rangle$, $s \in \{1, \dots, n\}$, такое, что $\sum_L (A^1, \dots, A^s) = 1$, а под оценкой правила L – сумму

$$P(L) = \sum_L P_1(A^1, \dots, A^s) P_2(A^1, \dots, A^s). \quad (8)$$

Точка A^s выбирается, как только последовательность $\langle A^1, \dots, A^s \rangle$ принадлежит L . Формула (8) задает безусловную вероятность выбора некоторой точки $A^s \in C(A^1, \dots, A^n)$. Оптимальным правилом L^* назовем такое, при котором $P(L)$ максимальна. Решить мно-

гокритериальную задачу оптимального выбора $\langle Q, C, n \rangle$ – это значит указать одно из оптимальных правил L^* [8-10].

Установим связь этой задачи с задачей двухуровневой оптимизации управляемых марковских цепей и приведем ее решения в двух частных случаях. Построим цепь Маркова. Состоянием цепи является любая последовательность точек вида $\langle A^1, \dots, A^k \rangle$, $k = \overline{1, n}$. Начальным состоянием является пустая последовательность $\langle \emptyset \rangle$. Добавим фиктивное состояние x , соответствующее ситуации, в которой уже осуществлен выбор; x не является последовательностью точек. В каждом состоянии $i \neq x$ множество решений K_i состоит из двух элементов: $K_i = \{1, 2\}$. Решение 1 означает, что осуществляются переходы с вероятностями, определяемыми механизмом появления точек Q , т.е. из состояния $\langle A^1, \dots, A^s \rangle$ возможны только переходы в состояния вида $\langle A^1, \dots, A^s, A^{s+1} \rangle$, где A^{s+1} – вновь предъявляемая точка, с равными вероятностями. Доход r^1 равен нулю. Решение 2 означает, что происходит переход из состояния $\langle A^1, \dots, A^s \rangle$ в x с вероятностью единица; доход при этом равен A^s . В состоянии x $K_x = \{1\}$, доход равен 0, а переход возможен только в состояние x с вероятностью 1.

Множество состояний построенной управляемой цепи – это множество всех последовательностей вида $\langle A^1, \dots, A^s \rangle$ ($s = \overline{1, n}$), к которому добавлено начальное состояние $\langle \emptyset \rangle$ и фиктивное состояние x . Стратегия π однозначно определяет множество состояний, в которых принимается решение 2, т.е. задает некоторое множество последовательностей. Задание любого множества последовательностей типа $\langle A^1, \dots, A^s \rangle$ ($s \in \{1, \dots, n\}$) однозначно определяет некоторую стратегию, при которой решение 2 принимается на состояниях, соответствующих последовательностям из этого множества [4].

Таким образом, между множеством всех стратегий для построенной цепи и множеством всех правил выбора установлено взаимно однозначное соответствие. При этом вероятность получения дохода A^k в построенной цепи равна вероятности выбора точки A^k в исходной задаче. Отсюда следует, что слабо оптимальная стратегия для управляемой цепи Маркова определяет оптимальное правило выбора для исходной задачи.

Решим задачу $\langle Q, C, n \rangle$ при паретовской и совокупно экстремальной функциях выбора. Различные расположения точек $A^1, \dots, A^n$ в E_m можно описывать перестановками; r m -мерных точек $A^1, \dots, A^r$ задают m перестановок символов $1, \dots, r$: $\pi_1^r = \langle i_1^1, \dots, i_r^1 \rangle$, $\pi_2^r = \langle i_1^2, \dots, i_r^2 \rangle$, ..., $\pi_m^r = \langle i_1^m, \dots, i_r^m \rangle$, каждая из которых определяется 'проекцией точек $A^1, \dots, A^r$ на соответствующую ось E_m .

С каждым расположением r точек $\langle \pi_1^r, \dots, \pi_m^r \rangle$ связаны две вероятности;

$F(\pi_1^r, \dots, \pi_m^r; k)$ – вероятность того, что при предъявлении еще $n-r$ точек $A^{r+1}, \dots, A^n$ выполняется $A^k \in C(A^1, \dots, A^n)$; $H(\pi_1^r, \dots, \pi_m^r)$ – вероятность того, что при дальнейшем предъявлении точек лучшая точка окажется среди них при использовании оптимального правила выбора.

1°. Пусть $C = C^P$ – паретовская функция выбора (пусть $\Omega = \{x^1, \dots, x^N\} \subset E_m$, где N – число элементов Ω , и R – бинарное отношение на E_m . Мощность Ω^R зависит от Ω , N и R .

На рис. 1 приведены шесть расположений множества Ω из трех точек на плоскости. Если R – отношение Парето, то $|\Omega^R|$ в случаях а) и б) равно 1, в случаях в) – д) равно 2 и в случае е) равно 3. Если R – отношение лексикографии, то во всех случаях а)–е) $|\Omega^R| = 1$. При $|\Omega^R| = 2$ $|\Omega^R|$ не превосходит двух). На рис. 1 точка $A^3 \in C^P(A^1, A^2, A^3)$ только в случаях д) и е).

Рассмотрим одну ось. Точки $A^1, \dots, A^r$ определяют перестановку $\pi_r = \langle i_1, \dots, i_r \rangle$. Пусть предъявлена еще одна точка A^{r+1} . Тогда точки $A^1, \dots, A^r, A^{r+1}$ могут задать только одну из следующих перестановок:

$$\begin{aligned} \langle i_1', \dots, i_r', 1 \rangle &= \pi_r(1), \\ \langle i_1', \dots, i_r', 2 \rangle &= \pi_r(2), \\ &\dots\dots\dots \\ \langle i_1', \dots, i_r', r+1 \rangle &= \pi_r(r+1), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\langle i_1', \dots, i_r', k \rangle$ определяется следующим образом:

$$i_s' = \begin{cases} i_s, & \text{если } i_s < k, \\ i_s + 1, & \text{если } i_s \geq k. \end{cases}$$

Вероятность любого перехода из $\langle i_1, \dots, i_r \rangle$ в одну из перестановок (9) равна $1/(r+1)$.

Ясно, что

$$F(\pi_1^r, \dots, \pi_m^r; k) = \begin{cases} 1, & \text{если } A^k \text{ – паретовская точка,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (10)$$

$$H(\pi_1^n, \dots, \pi_m^n) = 0, \quad (11)$$

поскольку $r = n$. Найдем $H(\emptyset)$, т.е. вероятность выбора паретовской точки. Это позволит найти оптимальное правило. Для цепи Маркова, соответствующей данной задаче, уравнение Беллмана принимает вид [4, 9]

$$H(\pi_1^r, \dots, \pi_m^r) = \max \left\{ F(\pi_1^r, \dots, \pi_m^r; k), \sum_{1 \leq l_1, \dots, l_m \leq r+1} H(\pi_1^r(l_1), \dots, \pi_m^r(l_m)) \frac{1}{(r+1)^m} \right\}, \quad (12)$$

где

$$F(\pi_1^r, \dots, \pi_m^r; k) = \sum_{1 \leq l_1, \dots, l_m \leq r+1} F(\pi_1^r(l_1), \dots, \pi_m^r(l_m); k) \frac{1}{(r+1)^m}. \quad (13)$$

Рекуррентные формулы (12), (13) вместе с начальными условиями (10), (11) позволяют найти $H(\emptyset)$.

2°. Пусть C – совокупно экстремальная функция выбора.

При любом числе m критериев и числе n точек существуют числа $1 \leq s_m^* < \dots < s_1^* \leq n$ такие, что оптимальное правило задается следующим образом: если N -й предъявляется точка, которая лучше всех уже предъявленных по k критериям, и $N \geq s_k^*$, то она выбирается [9, 10]. Числа $s_m^*, \dots, s_1^*$ находятся из условия максимума функции:

$$P_k = \prod_{j=k+1}^m \prod_{i=s_j^*}^{N-1} \left(1 - \frac{C_m^j (i-1)^j}{i^m} \right) \sum_{l=0}^{m-k} \frac{(N-1)^l C_m^l}{N^m} f_{m-l} \sum_{k=1}^m \sum_{N=s_k^*}^{s_k-1} (N).$$

где

$$P_k = \prod_{j=k+1}^m \prod_{i=s_j^*}^{s_{j-1}^*-1} \left(1 - \frac{1}{i^m} \sum_{l=0}^{m-k} C_m^l (i-1)^l \right),$$

$$P_m = 1, \quad f_k(N) = 1 - (1 - N/n)^k.$$

Асимптотическое значение вероятности оптимального выбора при росте n и $m > 1$ равно

$$H(m) = (1/m)^{1/(m-1)}.$$

Асимптотика чисел $s_1^*, \dots, s_m^*$ задается формулой $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_i^*}{n} = 1 - (1 - H(m))^{1/i}$, $i = \overline{1, m}$.

Результаты расчетов величин H и F

Будем пользоваться моделью, показанной на рис. 2 для четырех точек $A^1 - A^4$; здесь $\pi_1^4 = \langle 3, 4, 2, 1 \rangle$, $\pi_2^4 = \langle 2, 3, 4, 1 \rangle$.

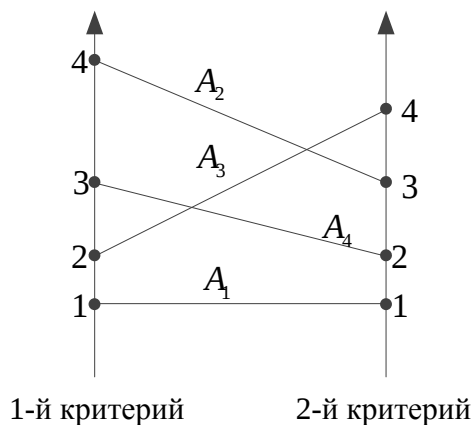


Рис. 2. Модель для четырех точек $A^1 \dots A^4$

Пусть $n = 5$ и расположение предъявленных точек A^1, A^2 показано на рис. 3, а. Вероятность $F(A^1, A^2; 2)$ того, что A^2 останется паретовской, равна 0,75; вероятность $H(A^1, A^2)$ равна 0,69. Выбирается A^2 , так как $H < F$. В расположении, показанном на рис. 3, б, имеем $F(A^1, A^2; 2) = 0,54333$ и $H(A^1, A^2) = 0,745$, т.е. A^2 не выбирается, так как $H > F$. При расположении трех точек, показанном на рис. 3, в, выбирается A^3 , так как $F = 0,78 > H = 0,6325$, а при расположении, показанном на рис. 3, г, A^3 не выбирается, так как $F = 0,685 < H = 0,7375$.

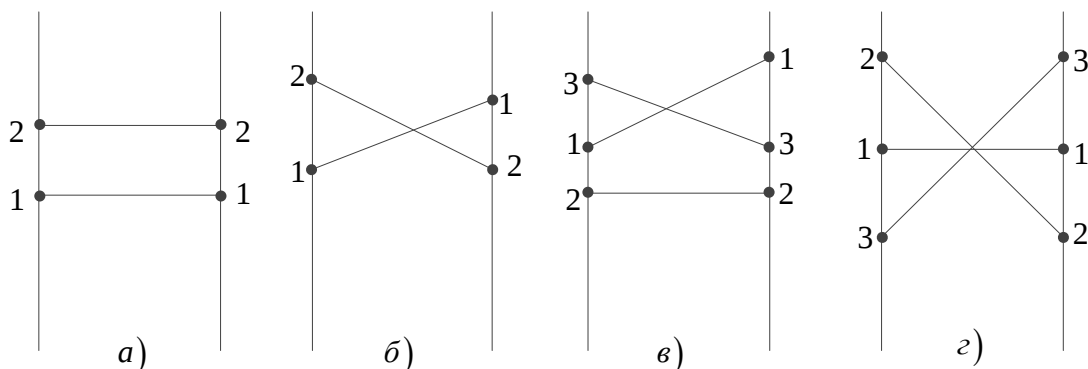


Рис. 3. Результаты расчетов H и F по формулам (10)-(13) при $m = 2$

Обозначим вероятность оптимального выбора при n точках и m критериях через $H(n, m)$. В таблице приведены значения $H(n, m)$ при $n \leq 9$ и $m = 1, 2$.

Таблица. Значения $H(n, m)$ при $n \leq 9$ и $m = 1, 2$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0,5	0,5	0,458	0,433	0,419	0,410	0,406	0,402
2	1	0,75	0,75	0,741	0,730	0,720	0,725	0,727	0,726

Для $H(n, 1)$ имеет место $\lim_{n \rightarrow \infty} H(n, 1) = e^{-1}$, а для $H(n, m)$ верно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует m_0 такое, что для всех $n = 1, 2, \dots$ и $m > m_0$ $H(n, m) > 1 - \varepsilon$.

Это означает, что, хотя при любом числе критериев отношение числа паретовских точек к общему числу n всех точек стремится к нулю с ростом n , вероятность выбора паретовской точки при достаточно большом числе критериев и любом n может быть сделана сколь угодно близкой к единице за счет использования оптимальных правил выбора.

Заключение

Рассмотрена многокритериальная задача оптимального управления процессом обработки ПО КС реального времени, моделируемой марковскими цепями. Исследованы теоретические методы, разработаны правила и алгоритмы, позволяющие осуществить опти-

мальную остановку процесса отработки ПО, за счет использования более общих принципов оптимальности: марковских цепей с векторными доходами.

Между множеством всех стратегий для построенной марковской цепи и множеством всех правил выбора остановки процесса отработки ПО установлено, что слабо оптимальная стратегия для управляемой цепи Маркова определяет оптимальное правило выбора для остановки. Решена задача при паретовской и совокупно экстремальной функциях выбора. Показана возможность использования полученных результатов единообразно сводить многокритериальную задачу к однокритериальной.

Предложенное решение многокритериальной задачи оптимального управления процессом отработки ПО КС реального времени может быть использовано при отработке ПО для КС работающих в реальном масштабе времени.

Полученные теоретические результаты и приведенные примеры подтверждают возможность использования полученных алгоритмов в реальном процессе отработки программного обеспечения компьютерных систем реального времени.

Список литературы

- [1]. Андреев А.М., Можаров Г.П., Сюзев В.В. Многопроцессорные вычислительные системы: теоретический анализ, математические модели и применение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. 334 с.
- [2]. Андреев А.М., Березкин Д.В., Можаров Г.П., Свирин Ил.С. Математическое моделирование надежности компьютерных систем и сетей // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. «Приборостроение». 2012. Спец. выпуск «Моделирование и идентификация компьютерных систем и сетей». С. 3-46.
- [3]. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. М.: МЦНМО. 2010. 560 с.
- [4]. Foss S., Shneer S., Turlikov A. Stability of a Markov-modulated Markov chain, with application to a wireless network governed by two protocols. Stochastic Systems. 2012. Vol.2. no. 1. pp. 208-231.
- [5]. Топорков В.В. Модели распределенных вычислений. М.: Физматлит. 2011. 320 с.
- [6]. Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. М.: ФМОП, МЦНМО. 2011. 144 с.
- [7]. Королёв В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2011. 620 с.
- [8]. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях. СПб: Изд-во «ЮТАС». 2007. 104 с.
- [9]. Карманов А.В. Исследование управляемых конечных марковских цепей с неполной информацией (минимаксный подход). М.: ФИЗМАТЛИТ. 2002. 176 с.
- [10]. Peskir G., Shiryaev A. Optimal stopping and free-boundary problems. Basel: Birkhäuser, 2006. 500 p.