

УДК 62-752+62-755

Массо-инерционные характеристики и безразмерные уравнения движения двухопорного ротора с автобалансиром с учетом массы компенсирующих грузов

Горбенко А. Н.^{1,*}

[*gan0941@yandex.ru](mailto:gan0941@yandex.ru)

¹Керченский государственный морской технологический
университет, Керчь, Россия

В работе рассматриваются динамические характеристики пространственного движения ротора с автобалансиром пассивного типа. Задача рассматривается с учетом того, что массы автобалансира и дисбаланса могут быть сопоставимы с массой ротора. Показано, что установка на ротор автобалансира немалой массы приводит к качественным изменениям его массо-инерционных свойств. Составной ротор приобретает свойство инерционной анизотропии. В результате этого могут существовать дополнительные критические частоты вращения и зоны неустойчивости движения. Кроме того, в случае многомассового автобалансира, параметры системы имеют интервальный характер. Получены безразмерные уравнения движения системы с минимально необходимым количеством безразмерных параметров.

Ключевые слова: ротор, инерционные характеристики, автобалансир, уравнения движения, анизотропия, динамика, устойчивость

Введение

Автобалансирующие устройства (АБУ) пассивного типа находят применение для снижения уровня вибрации в роторных машинах (РМ). При определенных условиях они автоматически уравнивают ротор, устраняя силы от дисбалансов и снижая вибрацию машины в процессе ее работы. Подобные устройства относятся к существенно нелинейным многомассовым механическим системам (МС) с нетривиальными свойствами, что вызывает трудности их исследования.

Исследование динамики МС неразрывно связано с этапами составления физической модели и вывода уравнений движения. Именно на этих этапах формулируются базовые положения и допущения, от которых в дальнейшем зависит эффективность исследования и область применимости его результатов. В то же время анализ существующих исследований данного направления (см. [1-11] и др.) показывает, что традиционно они в явной или неявной форме основаны на допущении о том, что компенсирующие грузы (КГ) автобалансиров, а также дисбаланс ротора, являются малыми величинами. Использование это-

го допущения вызвано высокой сложностью уравнений движения системы, особенно в случае пространственного движения ротора с АБУ. В результате этого модель движения не отражает качественных изменений динамических свойств ротора после установки на него АБУ с КГ немалой массы. Такой подход может оказаться некорректным при уравнивании РМ с большими дисбалансами, таких как центрифуги, экстракторы, сепараторы и т.п.

Необходимость учета конечной массы КГ автобалансира и дисбаланса ротора впервые показана в работе [12]. Однако задача здесь рассматривалась в упрощенной квазистатической постановке. В работе [13] получены уточненные дифференциальные уравнения пространственного движения ротора с автобалансиrom, масса которого сопоставима с массой ротора. Показано, что установка автобалансира на ротор приводит к изменению массы и моментов инерции ротора, что изменяет динамику ротора. Проведенный анализ литературных источников показал, что задачи об уравнивании ротора пассивными АБУ при пространственном движении ротора решены приближенно и требуют более глубокого анализа с учетом конечной массы КГ.

Целью данной работы является анализ влияния массы автобалансира на массо-инерционные свойства ротора, совершающего пространственное движение; вывод безразмерных уравнений движения системы и анализ характерных диапазонов значений безразмерных параметров. Данная работа является продолжением работы [13] и ориентирована на дальнейшее исследование динамики и устойчивости механической системы.

1. Физическая модель механической системы

Рассматриваемая МС РМ состоит из двух связанных между собой подсистем – подсистемы ротора и подсистемы АБУ (рис. 1). В процессе движения МС подсистемы ротора и АБУ взаимодействуют друг с другом через точку А крепления автобалансира.

Диск ротора насажен на жесткий вал, который установлен на двух упруго-вязких изотропных опорах. Ротор имеет возможность совершать пространственное движение (см. рис.2а). Скорость вращения ротора постоянна. Смещениями ротора вдоль своей оси вращения пренебрегаем. Ротор полагаем осесимметричным с центром масс в точке G на оси его вращения. В некоторой плоскости $z=z_A$ расположен статический дисбаланс s , который моделируется точечной дисбалансной массой (ДМ) m_0 , находящейся на расстоянии R_0 от продольной оси ротора.

Кроме того, выделим на оси вращения точку C – общий центр масс системы «ротор-АБУ» при основном режиме движения МС (идеальная автобалансировка).

Автобалансир прикреплен к ротору в точке A (плоскость $z=z_A$). АБУ состоит из набора КГ, которые моделируются материальными точками. Каждый КГ массой m_j имеет свободу движения относительно ротора по круговой траектории радиуса R_j с центром в точке A на оси ζ вращения ротора в плоскости перпендикулярной к этой оси в данной точке. Компенсирующие грузы совершают сложное пространственное движение (см. рис.2б).

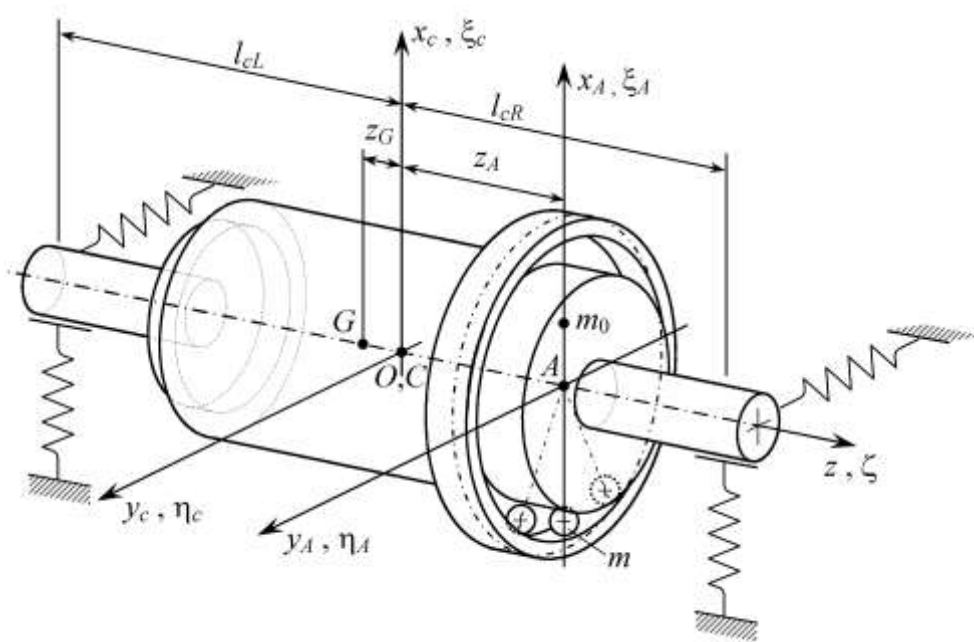


Рис. 1. Ротор на упруго-вязких опорах с автобаланси́ром

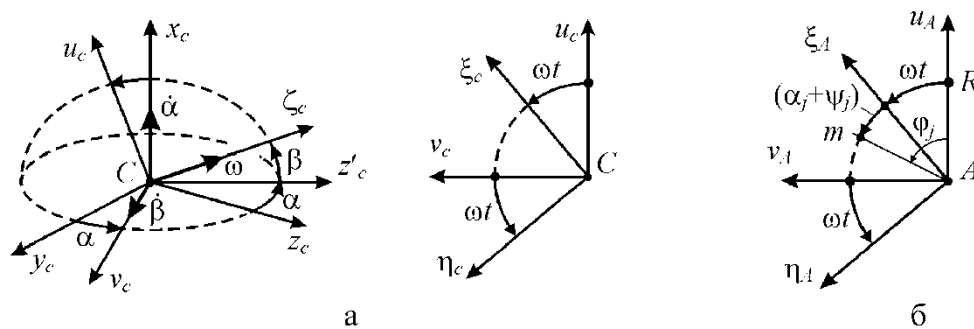


Рис. 2. Кинематика пространственного движения ротора (а) и компенсирующих грузов автобаланси́ра (б)
 h_L, h_R – коэффициенты вязкого демпфирования левой и правой опор, кг·с⁻¹; $l = l_{cL} + l_{cR}$ – расстояние между опорами ротора, м;

Полагаем, что все КГ АБУ одинаковы, т.е. $m_j = m, R_j = R, j = 1, \dots, n$. Движение одного КГ не препятствует движению других КГ.

Для всех точечных масс вводится единая нумерация: $j = 1, \dots, n$ – для КГ АБУ; $j = 0$ – для ДМ.

Физические и геометрические параметры МС:

ω – угловая скорость вращения ротора, рад/с;

M_r – масса ротора, кг;

C_r, A_r – полярный и экваториальный моменты инерции ротора относительно собственных осей, кг·м²;

x_c, y_c, x_A, y_A – текущие координаты точек C и A на оси ротора в неподвижной системе координат $Oxyz$, м;

α, β – текущие угловые отклонения оси вращения ротора;

c_L, c_R – коэффициенты жесткости левой и правой опор, Н/м;

l_{cL}, l_{cR} – расстояния от общей точки C до левой и правой опор (при консольном расположении ротора величина l_{cR} отрицательна), м;

m_0, R_0 – неуравновешенная масса (ДМ) ротора и радиус её расположения;

$\varphi_0 = \omega t + \alpha_0$ – абсолютная угловая координата ДМ; при этом $\psi_0 = 0$;

n, m, R – количество КГ в АБУ, масса каждого из них и радиус их расположения;

$\varphi_j = \omega t + \alpha_j + \psi_j, j=1, \dots, n$ – абсолютная текущая угловая координата j -го КГ;

$\alpha_j = \text{const}, j=1, \dots, n$ – средняя постоянная угловая координата j -го КГ относительно ротора в плоскости автобалансиратора;

$\psi_j, j=1, \dots, n$ – текущая угловая координата j -го КГ относительно α_j в плоскости автобалансиратора;

h_A – коэффициент вязкого сопротивления движению КГ относительно АБУ, кг·с⁻¹;

z_A, z_G – расстояния от общего центра масс МС (точка C) до точки A крепления автобалансиратора и до центра масс ротора G соответственно (с учетом знака), которые связаны соотношением $M_r z_G + (m_0 + nm) z_A = 0$.

Массы КГ m и массу дисбаланса m_0 полагаем немалыми величинами, которые могут быть сопоставимы с массой ротора M_r . Подчеркнем, что именно это обстоятельство отличает данную модель от существующих.

Обобщенные координаты (ОК) МС: $x_c, y_c, \alpha, \beta, s_\xi, s_\eta$, где s_ξ, s_η – проекции текущего суммарного дисбаланса, образуемого всеми КГ АБУ и ДМ, на собственные оси ротора. Данный набор ОК МС достаточен для изучения динамики системы и не зависит от количества n грузов в АБУ, см. [2, 3, 13].

Полное описание физической модели и кинематики пространственного движения ротора и компенсирующих грузов АБУ приведено в работе [13].

Изучаются малые колебания ОК МС, совершаемые при основном (автобалансирующем) движении системы, когда КГ АБУ занимают такие средние положения α_j , при которых они компенсируют имеющийся дисбаланс.

2. Уравнения движения механической системы

2.1. Уравнения движения в неподвижных координатах

В работе [13] была получена следующая система дифференциальных уравнений движения рассматриваемой МС:

$$\begin{aligned} M_s \ddot{x}_c + h_x \dot{x}_c + c_x x_c - h_{y\alpha} \dot{\beta} - c_{y\alpha} \beta + \ddot{s}_u &= 0; \\ M_s \ddot{y}_c + h_y \dot{y}_c + c_y y_c + h_{y\alpha} \dot{\alpha} + c_{y\alpha} \alpha + \ddot{s}_v &= 0; \\ J_{u_c} \ddot{\alpha} + (J_{u_c} + h_\alpha) \dot{\alpha} + c_\alpha \alpha - J_{u_c v_c} \ddot{\beta} - (J_{u_c v_c} - C_\Sigma \omega) \dot{\beta} + h_{y\alpha} \dot{y}_c + c_{y\alpha} y_c - z_A \ddot{s}_v &= 0; \\ J_{v_c} \ddot{\beta} + (J_{v_c} + h_\beta) \dot{\beta} + c_\beta \beta - J_{u_c v_c} \ddot{\alpha} - (J_{u_c v_c} + C_\Sigma \omega) \dot{\alpha} - h_{y\alpha} \dot{x}_c - c_{y\alpha} x_c + z_A \ddot{s}_u &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\ddot{s}_\xi + \frac{h_A}{m} \dot{s}_\xi + m\ddot{x}_A \sum_{j=1}^n \sin\theta_j \sin\alpha_j - m\ddot{y}_A \sum_{j=1}^n \cos\theta_j \sin\alpha_j &= 0; \\ \ddot{s}_\eta + \frac{h_A}{m} \dot{s}_\eta - m\ddot{x}_A \sum_{j=1}^n \sin\theta_j \cos\alpha_j + m\ddot{y}_A \sum_{j=1}^n \cos\theta_j \cos\alpha_j &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}c_x &= c_y = c_L + c_R; \quad c_\alpha = c_\beta = c_L l_{cL}^2 + c_R l_{cR}^2; \quad c_{y\alpha} = c_{x\beta} = c_L l_{cL} - c_R l_{cR}; \\ h_x &= h_y = h_L + h_R; \quad h_\alpha = h_\beta = h_L l_{cL}^2 + h_R l_{cR}^2; \quad h_{y\alpha} = h_{x\beta} = h_L l_{cL} - h_R l_{cR}; \\ M_s &= M_r + m_\Sigma = M_r + m_0 + nm; \quad A_s = A_r + M_r z_G^2 + (m_0 + nm) z_A^2; \\ J_{u_c} &= A_s + \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \sin^2 \theta_j; \quad J_{v_c} = A_s + \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \cos^2 \theta_j; \quad J_{u_c v_c} = \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \sin\theta_j \cos\theta_j; \\ C_\Sigma &= C_r + \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 = C_r + m_0 R_0^2 + nm R^2; \quad \theta_j = \omega t + \alpha_j; \quad x_A = x_c + z_A \beta; \quad y_A = y_c - z_A \alpha; \\ s_u &= \sum_{j=0}^n m_j R_j \cos\varphi_j; \quad s_v = \sum_{j=0}^n m_j R_j \sin\varphi_j; \\ s_\xi &= \sum_{j=0}^n m_j R_j \cos(\alpha_j + \psi_j); \quad s_\eta = \sum_{j=0}^n m_j R_j \sin(\alpha_j + \psi_j); \quad (\dot{}) \equiv d/dt.\end{aligned}\quad (3)$$

Уравнения (1) описывают поперечные и угловые колебания ротора в неподвижной системе координат. Уравнения (2) описывают движение АБУ.

В дальнейшем будем использовать матричную форму записи уравнений, которая наиболее удобна для последующего анализа. Систему уравнений движения (1), (2) тогда можно записать в виде (все матрицы имеют размер (2,2)):

$$M_s \{\ddot{z}_c\} + h_x \{\dot{z}_c\} + c_x \{z_c\} + h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{\gamma}\} + c_{y\alpha} [E_c] \{\gamma\} + \{\ddot{s}_w\} = \{0\}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}[J_C] \{\ddot{\gamma}\} + ([G_J] + h_\alpha [E]) \{\dot{\gamma}\} + c_\alpha \{\gamma\} - h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{z}_c\} - c_{y\alpha} [E_c] \{z_c\} + z_A [E_c] \{\ddot{s}_w\} &= \{0\}; \\ \{\ddot{s}\} + h_s \{\dot{s}\} + m [D_\alpha] \{\ddot{z}_A\} &= \{0\},\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}\{z_c\} &= \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix}; \quad \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}; \quad \{s\} = \begin{Bmatrix} s_\xi \\ s_\eta \end{Bmatrix}; \quad \{s_w\} = \begin{Bmatrix} s_u \\ s_v \end{Bmatrix}; \quad \{z_A\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \{z_c\} - z_A [E_c] \{\gamma\}; \\ [J_C] &= \begin{bmatrix} J_{u_c} & -J_{u_c v_c} \\ -J_{u_c v_c} & J_{v_c} \end{bmatrix}; \quad [G_J] = [J_c] - C_\Sigma \omega [E_c]; \quad [E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [E_c] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ [D_\alpha] &= \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \sin\theta_j \sin\alpha_j & -\cos\theta_j \sin\alpha_j \\ -\sin\theta_j \cos\alpha_j & \cos\theta_j \cos\alpha_j \end{bmatrix}; \quad h_s = \frac{h_A}{m};\end{aligned}\quad (6)$$

$\{z_c\}, \{\gamma\}, \{s\}$ – векторы ОК МС;

$[J_C], [G_J]$ – суммарный тензор инерции и суммарная матрица гироскопичности составного ротора, т.е. всей МС «ротор-ДМ-АБУ» в неподвижной системе координат;

$[D_\alpha]$ – суммарная геометрическая матрица, характеризующая расположение всех КГ в АБУ (без ДМ).

Сделаем несколько замечаний к приведенной системе уравнений.

Можно показать, что после некоторых преобразований тензор инерции $[J_C]$ и гироскопическая матрица $[G_J]$ могут быть представлены следующим образом:

$$[J_C] = A_s[E] + [J_A^{(AB)}]; [G_J] = -\omega C_r[E_c] - 2\omega[J_A^{(AB)}][E_c], \quad (7)$$

где

$$[J_A^{(AB)}] = \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \begin{bmatrix} \sin^2 \theta_j & -\sin \theta_j \cos \theta_j \\ -\sin \theta_j \cos \theta_j & \cos^2 \theta_j \end{bmatrix} - \text{суммарный тензор инерции всех КГ АБУ}$$

и ДМ (в неподвижной системе координат).

Суммарные ОК АБУ входят в систему (4), (5) в двух вариантах – $\{s\}$ и $\{s_w\}$, которые взаимосвязаны друг с другом через переменную матрицу поворота $[T]$:

$$\begin{aligned} \{s_w\} &= \begin{Bmatrix} s_u \\ s_v \end{Bmatrix} = m_0 R_0 \begin{Bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{Bmatrix} + mR \sum_{j=1}^n \begin{Bmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \end{Bmatrix}; \\ \{s\} &= \begin{Bmatrix} s_\xi \\ s_\eta \end{Bmatrix} = m_0 R_0 \begin{Bmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{Bmatrix} + mR \sum_{j=1}^n \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_j + \psi_j) \\ \sin(\alpha_j + \psi_j) \end{Bmatrix}; \quad \{s_w\} = [T]\{s\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Кроме того, обратим внимание, что переменные матрицы $[J_A^{(AB)}(t)]$ и $[D_\alpha(t)]$, входящие в уравнения движения и периодически зависящие от времени t , могут быть разложены на постоянные и переменные множители следующим образом:

$$[J_A^{(AB)}] = [T][I_A^{(AB)}][T]^{-1}; [D_\alpha] = \frac{1}{2}n[d_\alpha][T]^{-1}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} [I_A^{(AB)}] &= \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_j & -\sin \alpha_j \cos \alpha_j \\ -\sin \alpha_j \cos \alpha_j & \cos^2 \alpha_j \end{bmatrix}; \\ [d_\alpha] &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_j & -\sin \alpha_j \cos \alpha_j \\ -\sin \alpha_j \cos \alpha_j & \cos^2 \alpha_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - D_c & -D_s \\ -D_s & 1 + D_c \end{bmatrix}; \\ D_c &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j; \quad D_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j. \end{aligned}$$

Постоянные матрицы и связаны между собой соотношением:

$$[I_A^{(AB)}] = \frac{1}{2}m_0 R_0^2 [d_{\alpha 0}] + \frac{1}{2}nmR^2 [d_\alpha], \quad (10)$$

где

$$[d_{\alpha 0}] = \begin{bmatrix} 1 - D_{c0} & -D_{s0} \\ -D_{s0} & 1 + D_{c0} \end{bmatrix}; \quad D_{c0} = \cos 2\alpha_0; \quad D_{s0} = \sin 2\alpha_0.$$

Здесь $[d_\alpha]$ и $[d_{\alpha 0}]$ – относительные геометрические матрицы, характеризующие расположение КГ и ДМ относительно ротора. Отметим, что параметр α_0 в матрице $[d_{\alpha 0}]$ может быть выбран произвольно. В дальнейшем будем полагать, что $\alpha_0 = 0$.

Учитывая сделанные замечания, подставляем (7)–(10) в систему (4), (5).

Таким образом, система уравнений движения МС в неподвижных координатах после преобразований приводится к виду:

$$\begin{aligned} M_s \{\ddot{z}_c\} + h_x \{\dot{z}_c\} + c_x \{z_c\} + h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{\gamma}\} + c_{y\alpha} [E_c] \{\gamma\} + \{\ddot{s}_w\} &= \{0\}; \\ [J_c] \{\ddot{\gamma}\} + ([G_J] + h_\alpha [E]) \{\dot{\gamma}\} + c_\alpha \{\gamma\} - h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{z}_c\} - c_{y\alpha} [E_c] \{z_c\} + z_A [E_c] \{\ddot{s}_w\} &= \{0\}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\{\ddot{s}\} + h_s \{\dot{s}\} + \frac{1}{2} nm [d_\alpha] [T]^{-1} (\{\ddot{z}_c\} - z_A [E_c] \{\ddot{\gamma}\}) = \{0\}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} [J_c] &= [T] [I_c] [T]^{-1} = A_s [E] + [T] [I_A^{(AB)}] [T]^{-1}; \quad [I_c] = A_s [E] + [I_A^{(AB)}]; \\ [G_J] &= -\omega C_r [E_c] - 2\omega [T] [I_A^{(AB)}] [T]^{-1} [E_c]; \quad \{\ddot{s}_w\} = [T] (\{\ddot{s}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{s}\} - \omega^2 \{s\}). \end{aligned}$$

2.2. Уравнения движения во вращающихся координатах

Представленная выше система уравнений движения МС неавтономная, т.е. содержит переменные коэффициенты, периодически зависящие от времени t . В системе (11), (12) периодические коэффициенты выделены в отдельную матрицу $[T(t)]$. Остальные коэффициенты и матрицы в них постоянны. Неавтономность дифференциальных уравнений существенно затрудняет их анализ.

Получим автономные уравнения движения МС. Для этого перейдем к новой системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω . Выполним замену переменных и перейдем к новым обобщенным координатам МС:

$$\{z_c\} = [T] \{w\}; \quad \{\gamma\} = [T] \{\chi\}; \quad \{s_w\} = [T] \{s\}, \quad (13)$$

где

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} \xi_c \\ \eta_c \end{Bmatrix}, \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \{s\} = \begin{Bmatrix} s_\xi \\ s_\eta \end{Bmatrix} - \text{векторы ОК МС во вращающейся системе координат.}$$

Для удобства приведем некоторые свойства матрицы поворота $[T]$, а также матрицы $[E_c]$, которые входят в уравнения движения (11), (12):

$$\begin{aligned} [\dot{T}] &= \omega [T] [E_c]; \quad [\ddot{T}] = -\omega^2 [T]; \quad [T] [E_c] = [E_c] [T]; \\ [E_c]^2 &= -[E]; \quad [E_c]^{-1} = -[E_c]; \quad |E_c| = 1; \quad |T| = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее подставляем (13) в систему (11), (12) с учетом (14). Затем матричные уравнения слева умножаем на матрицу $[T]^{-1}$, в результате чего все переменные коэффициенты сокращаются. При этом учитываем также, что все матрицы в системе (11), (12), за исключением $[I_A^{(AB)}]$, $[d_\alpha]$ и $[d_{\alpha 0}]$, перестановочны (коммутируют) с матрицей $[T]$.

Система уравнений движения МС во вращающихся координатах после указанных преобразований имеет вид:

$$\begin{aligned} M_s \{\ddot{w}\} + [H_w] \{\dot{w}\} + [K_w] \{w\} + h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{\chi}\} + [K_{w\chi}] \{\chi\} + \{\ddot{s}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{s}\} - \omega^2 \{s\} &= \{0\}; \\ [I_C] \{\ddot{\chi}\} + [H_\chi] \{\dot{\chi}\} + [K_\chi] \{\chi\} - h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{w}\} - [K_{w\chi}] \{w\} + z_A [E_c] (\{\ddot{s}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{s}\} - \omega^2 \{s\}) &= \{0\}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\{\ddot{s}\} + h_s \{\dot{s}\} + \frac{1}{2} nm [d_\alpha] \left(\{\ddot{w}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{w}\} - \omega^2 \{w\} - z_A [E_c] (\{\ddot{\chi}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{\chi}\} - \omega^2 \{\chi\}) \right) = \{0\}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} [H_w] &= h_x [E] + 2\omega M_s [E_c]; & [K_w] &= (c_x - M_s \omega^2) [E] + \omega h_x [E_c]; \\ [H_\chi] &= h_\alpha [E] + \omega (2A_s - C_r) [E_c]; & [K_\chi] &= (c_\alpha - \omega^2 (A_s - C_r)) [E] + \omega^2 [I_A^{(AB)}] + \omega h_\alpha [E_c]; \\ [K_{w\chi}] &= -\omega h_{y\alpha} [E] + c_{y\alpha} [E_c]. \end{aligned}$$

Из полученных уравнений вытекает, что устойчивость системы зависит от следующих 19-ти физических параметров:

ω ; M_s ; A_s ; C_r ; z_A ; h_x ; h_α ; $h_{y\alpha}$; c_x ; c_α ; $c_{y\alpha}$ – параметры ротора;
 m_0 ; R_0 ; n ; m ; R ; D_c ; D_s ; h – параметры дисбаланса и автобалансера.

2.3. Преобразование геометрических матриц

В уравнения угловых колебаний ротора в (15) входит матрица тензора инерции $[I_C]$, которая в свою очередь зависит от геометрических матриц $[d_\alpha]$ и $[d_{\alpha 0}]$. Последняя, кроме того, в отдельности входит в уравнения движения КГ АБУ (16). Все эти матрицы имеют одинаковую структуру. Можно показать, что каждая из этих трех матриц может быть преобразована к диагональному виду, который наиболее удобен для анализа.

Рассмотрим геометрическую матрицу $[d_\alpha]$, которая характеризуют расположение грузов АБУ относительно ротора при автобалансирующем движении МС и зависит от двух параметров: D_c , D_s (см. формулы (9)). Подвергнем её преобразованию подобия вида

$$[d_A] = [T(\Delta\alpha)] [d_\alpha] [T(\Delta\alpha)]^{-1}, \quad (17)$$

где

$$[d_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 - D_c & -D_s \\ -D_s & 1 + D_c \end{bmatrix}; \quad [T(\Delta\alpha)] = \begin{bmatrix} \cos \Delta\alpha & -\sin \Delta\alpha \\ \sin \Delta\alpha & \cos \Delta\alpha \end{bmatrix};$$

$[T(\Delta\alpha)]$ – постоянная матрица поворота на постоянный угол $\Delta\alpha$.

Выполнив матричное произведение, получаем

$$[d_A] = \begin{bmatrix} 1 - D_c \cos 2\Delta\alpha + D_s \sin 2\Delta\alpha & -D_c \sin 2\Delta\alpha - D_s \cos 2\Delta\alpha \\ -D_c \sin 2\Delta\alpha - D_s \cos 2\Delta\alpha & 1 + D_c \cos 2\Delta\alpha - D_s \sin 2\Delta\alpha \end{bmatrix}.$$

Выберем постоянный угол поворота $\Delta\alpha$ таким, чтобы внедиагональные элементы новой матрицы были равны нулю, т.е.

$$\sin 2\Delta\alpha = -\frac{D_s}{\sqrt{D_c^2 + D_s^2}}; \quad \cos 2\Delta\alpha = \frac{D_c}{\sqrt{D_c^2 + D_s^2}}. \quad (18)$$

Подставив (18) в (17) получаем, что после преобразования подобия матрица $[d_\alpha]$ примет диагональный вид

$$[d_A] = \begin{bmatrix} 1-D_A & 0 \\ 0 & 1+D_A \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где

$$D_A = \sqrt{D_c^2 + D_s^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j^* ; \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j^* = 0 ; \quad \alpha_j^* = \alpha_j + \Delta\alpha ; \quad 0 \leq D_A \leq 1.$$

Таким образом, показано, что независимо от расположения КГ АБУ существует преобразование поворота (17), которое приводит матрицу $[d_\alpha]$ к более простому диагональному виду $[d_A]$ (19), зависящему только от одного параметра D_A .

Рассмотрим далее геометрическую матрицу $[d_{\alpha 0}]$ (см. формулы (10)), которая входит в суммарный тензор инерции ротора $[I_C]$ и характеризует расположение ДМ относительно ротора. Приведенное выше преобразование подобия (17), (18) преобразует $[d_{\alpha 0}]$ в виду:

$$[d_{A0}] = [T(\Delta\alpha)][d_{\alpha 0}][T(\Delta\alpha)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1-D_{c0}^* & -D_{s0}^* \\ -D_{s0}^* & 1+D_{c0}^* \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где

$$[d_{\alpha 0}] = \begin{bmatrix} 1-D_{c0} & -D_{s0} \\ -D_{s0} & 1+D_{c0} \end{bmatrix}; \quad D_{c0} = \cos 2\alpha_0 = 1; \quad D_{s0} = \sin 2\alpha_0 = 0; \quad D_{c0}^* = \cos 2\Delta\alpha; \quad D_{s0}^* = \sin 2\Delta\alpha.$$

Напомним, что угол α_0 начального положения ДМ ротора в момент времени $t=0$ выше был принят равным нулю.

В общем случае матрица $[d_{\alpha 0}]$ определяется выражением (20). Однако в типичном частном случае симметричного расположения КГ в АБУ имеют место равенства: $D_A = D_c$; $D_s = 0$; $\Delta\alpha = 0$ и матрица $[d_{A0}]$ принимает простой вид:

$$[d_{A0}] = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В дальнейшем анализе динамики рассматриваемой МС будем предполагать случай симметричного расположения КГ в АБУ. Учет несимметричности расположения КГ качественно не изменяет динамические свойства МС, однако приводит к усложнению уравнений движения. Кроме того, в наиболее распространенном случае двухмассового АБУ грузы всегда расположены симметрично относительно линии дисбаланса.

Далее рассмотрим уравнения движения МС (15), (16). Выполним замену переменных следующего вида:

$$\{w_1\} = [T(\Delta\alpha)]\{w\}; \quad \{\chi_1\} = [T(\Delta\alpha)]\{\chi\}; \quad \{s_1\} = [T(\Delta\alpha)]\{s\} \quad (22)$$

и умножим слева матричные уравнения на матрицу $[T(\Delta\alpha)]^{-1}$. При этом учитываем (18)-(20).

Обратим внимание на то, что матрица преобразования $[T(\Delta\alpha)]$ коммутативна (перестановочна) со всеми матрицами, входящими в уравнения движения, за исключением матриц $[d_\alpha]$, $[d_{\alpha 0}]$ и потому вид большинства матричных коэффициентов этих уравнений не изменяется, поскольку матрицы $[T(\Delta\alpha)]$ и $[T(\Delta\alpha)]^{-1}$ взаимно сокращаются. В результате указанное преобразование (22) не изменяет вида уравнений движения МС за исключением:

- геометрической матрицы $[d_\alpha]$, которая преобразовывается из двухпараметрического вида (9) в однопараметрический вид $[d_A]$ (19);
- геометрической матрицы $[d_{\alpha 0}]$, которая преобразовывается из вида (10) в вид $[d_{A0}]$ (21).

Таким образом, в дальнейшем будем полагать, что преобразованные уравнения движения полностью совпадают с системой уравнений (15), (16), в которой, однако, матрицы $[d_\alpha]$ и $[d_{\alpha 0}]$ заменены матрицами $[d_A]$ и $[d_{A0}]$. Последние определяются выражениями (19) и (21). То же относится и к уравнениям движения (11), (12) в неподвижных координатах.

В итоге получена система уравнений движения МС с меньшим количеством параметров. Отметим также, что аналогичное преобразование выполнено в работе [14], однако для более простой МС.

2.4. Автобалансирующее движение ротора с АБУ

Уравнения движения МС (15), (16) (или (11), (12)) допускают автобалансирующее движение, при котором все ОК МС (суммарный дисбаланс КГ АБУ и ДМ, поперечные и угловые отклонения ротора) тождественно равны нулю:

$$\begin{aligned} \text{КГ АБУ: } \varphi_j &= \tilde{\varphi}_j = \omega t + \alpha_j; \quad \psi_j = \tilde{\psi}_j = 0; \quad j = 1, \dots, n; \\ \text{ОК АБУ: } s_\xi &= \tilde{s}_\xi = 0; \quad s_\eta = \tilde{s}_\eta = 0; \quad \{s\} = \{\tilde{s}\} = \{0\}; \quad \{s_w\} = \{\tilde{s}_w\} = \{0\}; \\ \text{ОК ротора: } \xi_c &= \tilde{\xi}_c = 0; \quad \eta_c = \tilde{\eta}_c = 0; \quad \{w\} = \{\tilde{w}\} = \{0\}; \end{aligned} \quad (23)$$

В дальнейшем мы будем интересоваться, прежде всего, автобалансирующим (основным) движением механической системы.

При идеальной автобалансировке геометрическое расположение КГ в АБУ (постоянные углы α_j) зависит от параметров дисбаланса и автобалансира. При этом имеют место следующие равенства, вытекающие из выражений для s_ξ , s_η в (3) с учетом (23):

$$\sum_{j=1}^n \cos \alpha_j = -\frac{m_0 R_0}{mR} = -\frac{n}{E}; \quad \sum_{j=1}^n \sin \alpha_j = 0, \quad (24)$$

где $E = \frac{nmR}{m_0 R_0}$ – ёмкость автобалансира.

Отсюда необходимое требование к параметрам автобалансира: $E \geq 1$.

В случае двумассового автобалансира ($n=2$) параметры дисбаланса и АБУ однозначно определяют геометрию расположения двух КГ (симметричного относительно линии

дисбаланса) и массо-инерционные характеристики АБУ и всей системы. Можно показать, что в этом случае справедливы следующие выражения (см. ф.(23), (24), (9), (19)):

$$\alpha_2 = -\alpha_1; \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = -\frac{1}{E}; \sin \alpha_1 = -\sin \alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{E^2}}; [d_A] = \begin{bmatrix} 1 - D_A & 0 \\ 0 & 1 + D_A \end{bmatrix}; \quad (25)$$

$$D_A = \sqrt{D_c^2 + D_s^2} = |D_c| = \left| \frac{2}{E^2} - 1 \right|; D_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \cos 2\alpha_j = \frac{2}{E^2} - 1; D_s = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sin 2\alpha_j = 0.$$

В случае многомассового автобалансира ($n \geq 3$) существует множество возможных положений грузов α_j , при которых удовлетворяются автобалансирующие равенства (24). Поэтому геометрические параметры D_A , D_c , D_s , матрица $[d_A]$ и зависящие от неё матрицы $[I_c]$, $[I_A^{(AB)}]$, $[K_\chi]$ определены неоднозначно и могут принимать значения в некоторых интервалах.

Таким образом, в случае многомассового автобалансира система имеет однопараметрическое семейство основных движений. Одно движение семейства отличается от другого движения семейства значением параметра D_A , который характеризует расположение КГ в АБУ. Максимально возможный диапазон значений этого параметра $D_A \in [0; 1]$. Однако в работе [15] показано, что в зависимости от n и E действительный диапазон возможных значений геометрического параметра D_A может быть заметно более узким, т.е. $0 \leq D_{A\min} \leq D_A \leq D_{A\max} \leq 1$.

Отметим также, что при ёмкости автобалансира $E=1$ параметр D_A принимает однозначное значение $D_A=1$ независимо от n . Кроме того, при ёмкости АБУ в интервале $1 < E < \sqrt{2}$ диапазон возможных значений параметра D_A весьма узкий, но его расположение при этом чувствительно к параметру E .

3. Массо-инерционные характеристики ротора с АБУ

В результате установки автобалансира на ротор образуется механическая система «ротор – ДМ – КГ АБУ», которую будем также называть составной ротор. При этом массовые и инерционные параметры составного ротора в общем случае отличаются от параметров исходного ротора. Полученные выше уравнения движения (15), (16) или (11), (12) учитывают влияние массы автобалансира на параметры составного ротора.

Инерционность составного ротора при его поперечных колебаниях определяется суммарной массой:

$$M_s = M_r + m_0 + nm.$$

Инерционность составного ротора при его угловых колебаниях определяется его суммарным тензором инерции $[I_c]$ (относительно собственных осей ротора) и суммарным полярным моментом инерции C_Σ :

$$[I_c] = \begin{bmatrix} A_{C1} & 0 \\ 0 & A_{C2} \end{bmatrix} = A_s[E] + [I_A^{(AB)}]; C_\Sigma = C_r + m_0 R_0^2 + nmR^2, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned}
A_s &= A_r + M_r z_G^2 + (m_0 + nm) z_A^2; \\
A_{C1} &= I_{\xi_c} = A_s + \frac{1}{2} A_m (1 - D_A); \quad A_{C2} = I_{\eta_c} = A_s + A_{m0} + \frac{1}{2} A_m (1 + D_A); \\
[I_A^{(AB)}] &= \begin{bmatrix} A_{A1} & 0 \\ 0 & A_{A2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A_{m0} [d_{A0}] + \frac{1}{2} A_m [d_A]; \\
A_{A1} &= I_{\xi_c}^{(AB)} = \frac{1}{2} A_m (1 - D_A); \quad A_{A2} = I_{\eta_c}^{(AB)} = A_{m0} + \frac{1}{2} A_m (1 + D_A); \quad A_{m0} = m_0 R_0^2; \quad A_m = nm R^2; \\
[d_{A0}] &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [d_A] = \begin{bmatrix} 1 - D_A & 0 \\ 0 & 1 + D_A \end{bmatrix}; \quad 0 \leq D_A \leq 1; \\
z_A &= \frac{M_r}{M_r + m_0 + nm} z_{GA}; \quad z_G = - \frac{m_0 + nm}{M_r + m_0 + nm} z_{GA};
\end{aligned}$$

$A_{C1,2}$ – суммарные моменты инерции составного ротора относительно собственных поперечных осей;

$A_{A1,2}$ – суммарные моменты инерции ДМ и АБУ относительно собственных осей;

$z_{GA} = z_A - z_G$ – расстояние от центра масс ротора G до точки A крепления автобалансира.

Выражения (26) выписаны с учетом преобразования поворота в п.2.3. См. также выражения (9), (10), (19), (21).

Как видим, суммарный тензор инерции составного ротора $[I_C]$ складывается из тензоров инерции ротора $A_s[E]$ и ДМ с КГ АБУ $[I_A^{(AB)}]$. Суммарный полярный момент инерции составного ротора C_Σ складывается из полярных моментов инерции ротора, ДМ и КГ АБУ. Для удобства и наглядности выражения для массовых и инерционных параметров механической системы «ротор – ДМ – КГ АБУ» представлены в табл. 1.

Из приведенных выражений следует, что компенсирующие грузы АБУ количественно увеличивают значения массы M_s и всех моментов инерции составного ротора в матрице $[I_C]$. Однако важно отметить, что при этом происходит и качественное изменение массо-инерционных свойств МС.

Составной ротор приобретает следующие два качественно новых свойства, которые изменяют его динамическое поведение.

1. Составной ротор становится инерционно анизотропным из-за того, что значения моментов инерции относительно собственных поперечных осей A_{C1} и A_{C2} увеличиваются неодинаково после установки автобалансира. Это приводит к заметному усложнению динамических свойств МС (см., например, [16-18]). В частности, могут появляться дополнительные критические скорости вращения и зоны неустойчивости движения.

Таблица 1. Массо-инерционные параметры МС «Ротор - ДМ - АБУ»

Ротор	ДМ	КГ АБУ
Массы:		
M_r	m_0	$m=m_j, j=1, \dots, n$
	$m_\Sigma = \sum_{j=0}^n m_j = m_0 + nm$	
$M_s = M_r + m_0 + nm$		
Статические моменты:		
0	$m_0 R_0$	$mR=m_j R_j, j=1, \dots, n$
Моменты инерции относительно осей, жестко связанных с ротором:		
Полный тензор инерции ротора относительно ГЦОИ: $[I_{rot}] = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & A_r & 0 \\ 0 & 0 & C_r \end{bmatrix};$ Тензор инерции угловых колебаний ротора относительно ГЦОИ: $[I_r] = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}.$	$\frac{1}{2} m_0 R_0^2 [d_{A0}],$ где геометрическая матрица ДМ: $[d_{A0}] = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Phi.(21).$	$\frac{1}{2} nm R^2 [d_A],$ где суммарная геометрическая матрица всех КГ АБУ: $[d_A] = \begin{bmatrix} 1 - D_A & 0 \\ 0 & 1 + D_A \end{bmatrix};$ $D_A = \sqrt{D_c^2 + D_s^2};$ $D_c = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j;$ $D_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j, \Phi.(19).$
	$[I_A^{(AB)}] = \frac{1}{2} m_0 R_0^2 [d_{A0}] + \frac{1}{2} nm R^2 [d_A], \Phi.(10), (26)$	
$[I_C] = A_s [E] + [I_A^{(AB)}] = A_\Sigma [E] + \Delta A [E_A]; C_\Sigma = C_r + m_0 R_0^2 + nm R^2,$ где $A_s = A_r + M_r z_G^2 + m_\Sigma z_A^2$; $A_\Sigma = A_s + \frac{1}{2} m_0 R_0^2 + \frac{1}{2} nm R^2, \Phi.(7), (26), (27).$		
Моменты инерции относительно поворотной-подвижных (но не вращающихся) осей uv :		
$[J_r] = [I_r]$	$[J_A^{(AB)}] = [T(t)][I_A^{(AB)}][T(t)]^{-1}, \Phi.(9).$	
$[J_c] = [T(t)][I_c][T(t)]^{-1} = A_s [E] + [J_A^{(AB)}] \Phi.(7), (11).$		
Инерционная анизотропия составного ротора с АБУ:		
$\Delta A = \frac{1}{2} (A_{C2} - A_{C1}) = \frac{1}{2} A_{m0} + \frac{1}{2} A_m D_A, \Phi.(27).$		

С учетом указанного, суммарный тензор инерции и другие инерционные матрицы и параметры, входящие в уравнения движения (15), удобно представить в форме с выделением изотропной и анизотропной составляющих:

$$\begin{aligned} [I_C] &= \begin{bmatrix} A_{C1} & 0 \\ 0 & A_{C2} \end{bmatrix} = A_\Sigma [E] + \Delta A [E_A]; & [I_A^{(AB)}] &= \begin{bmatrix} A_{A1} & 0 \\ 0 & A_{A2} \end{bmatrix} = A_{A,cp} [E] + \Delta A [E_A]; \\ [H_\chi] &= h_\alpha [E] + \omega(2A_\Sigma - C_\Sigma)[E_c]; & [K_\chi] &= (c_\alpha - \omega^2(A_\Sigma - C_\Sigma))[E] + \Delta A \omega^2 [E_A] + \omega h_\alpha [E_c], \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} A_{C1} &= A_\Sigma - \Delta A; & A_{C2} &= A_\Sigma + \Delta A; & A_{A1} &= A_{A,cp} - \Delta A; & A_{A2} &= A_{A,cp} + \Delta A; \\ A_\Sigma &= \frac{1}{2}(A_{C1} + A_{C2}) = A_s + \frac{1}{2}A_{m0} + \frac{1}{2}A_m; & A_{A,cp} &= \frac{1}{2}(A_{A1} + A_{A2}) = \frac{1}{2}A_{m0} + \frac{1}{2}A_m; \\ \Delta A &= \frac{1}{2}(A_{C2} - A_{C1}) = \frac{1}{2}A_{m0} + \frac{1}{2}A_m D_A; & [E_A] &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A_Σ , $A_{A,cp}$ – средние суммарные моменты инерции составного ротора в целом и КГ АБУ и ДМ, соответственно, которые характеризуют изотропную составляющую;

ΔA – инерционная анизотропия составного ротора.

Отметим, что здесь учитывались соотношения: $2A_\Sigma - C_\Sigma = 2A_s - C_r$;

$C_\Sigma - A_\Sigma = C_r - A_s + A_{A,cp}$, которые входят в матрицы $[H_\chi]$ и $[K_\chi]$.

Формальным источником анизотропии в уравнениях движения МС являются геометрические матрицы $[d_A]$ и $[d_{A0}]$, диагональные элементы которых неодинаковы. По этой причине в уравнениях движения (11) в неподвижных осях тензор инерции непостоянный и периодическим образом изменяется во времени.

2. Ещё одно нетривиальное свойство, которое приобретает МС в результате установки автобалансира, заключается в неоднозначности величин моментов инерции A_{C1} , A_{C2} составного ротора в случае применения многомассового автобалансира ($n > 2$). Причиной такой особенности является неоднозначность расположения грузов АБУ в автобалансирующем режиме движения МС, что характеризуется геометрическим параметром D_A . Таким образом, при заданных параметрах МС инерционная анизотропия ротора с АБУ является интервальной величиной, поскольку параметр D_A может принимать произвольное значение от 0 до 1 (в многомассовых АБУ).

Отметим также, что если принять традиционное допущение о малости масс m и m_0 по сравнению с массой ротора, то в первом приближении общая масса системы становится равной массе ротора ($M_s \approx M_r$), суммарный тензор инерции составного ротора не отличается от тензора инерции ротора ($[I_C] \approx [I_r] = \text{diag}(A_r, A_r)$; $[I_A^{(AB)}] \approx 0$; $A_s \approx A_r$; $\Delta A \approx 0$), а общий центр масс системы C совпадает с центром масс ротора G ($z_G \approx 0$; $z_A \approx z_{GA}$). При этом уравнения движения составного ротора (15) принимают известный вид (см., например, [1, 2, 7, 11]).

С другой стороны, учет массы автобалансира не изменяет традиционного вида уравнений движения АБУ (16).

4. Безразмерные уравнения движения механической системы

В данном разделе осуществляется переход к безразмерным уравнениям движения МС, удобным для дальнейшего анализа динамики движения. При этом выделяется минимально необходимое количество безразмерных параметров, определяющих области устойчивости МС, что расширяет возможности последующего анализа. Кроме того, использование безразмерных уравнений и параметров позволяет выделять наиболее общие свойства всего рассматриваемого класса роторных машин.

Введем безразмерное время τ :

$$\tau = \omega_0 t; \quad \dot{f} = \frac{df}{dt} = \omega_0 \frac{df}{d\tau} = \omega_0 f'; \quad \ddot{f} = \frac{d\dot{f}}{dt} = \omega_0 \frac{d(\omega_0 f')}{d\tau} = \omega_0^2 \frac{df'}{d\tau} = \omega_0^2 f'' \quad (28)$$

и безразмерные переменные $\{\bar{w}\}, \{\bar{\chi}\}, \{\bar{s}\}$:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} \xi_c \\ \eta_c \end{Bmatrix} = l_w \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_c \\ \bar{\eta}_c \end{Bmatrix} = l_w \{\bar{w}\}; \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} = l_\chi \begin{Bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = l_\chi \{\bar{\chi}\}; \quad \{s\} = \begin{Bmatrix} s_\xi \\ s_\eta \end{Bmatrix} = l_s \begin{Bmatrix} \bar{s}_\xi \\ \bar{s}_\eta \end{Bmatrix} = l_s \{\bar{s}\}, \quad (29)$$

где $\omega_0, l_w, l_\chi, l_s$ – масштабные коэффициенты, которые будут выбраны позже.

Подставляем (28), (29) в уравнения движения МС (15), (16). Далее разделим первое матричное уравнение системы на $M_s \omega_0^2 l_w$, второе уравнение – на $A_\Sigma \omega_0^2 l_\chi$ и третье уравнение – на $\omega_0^2 l_s$. Тогда уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} \{\bar{w}\}'' + \frac{1}{M_s \omega_0} [H_w] \{\bar{w}\}' + \frac{1}{M_s \omega_0^2} [K_w] \{\bar{w}\} + \frac{h_{y\alpha} l_\chi}{M_s \omega_0 l_w} [E_c] \{\bar{\chi}\}' + \frac{l_\chi}{M_s \omega_0^2 l_w} [K_{w\chi}] \{\bar{\chi}\} + \\ + \frac{l_s}{M_s l_w} \{\bar{s}\}'' + \frac{2\omega l_s}{M_s \omega_0 l_w} [E_c] \{\bar{s}\}' - \frac{\omega^2 l_s}{M_s \omega_0^2 l_w} \{\bar{s}\} = \{0\}; \\ \frac{1}{A_\Sigma} [I_c] \{\bar{\chi}\}'' + \frac{1}{A_\Sigma \omega_0} [H_\chi] \{\bar{\chi}\}' + \frac{1}{A_\Sigma \omega_0^2} [K_\chi] \{\bar{\chi}\} - \frac{h_{y\alpha} l_w}{A_\Sigma \omega_0 l_\chi} [E_c] \{\bar{w}\}' - \frac{l_w}{A_\Sigma \omega_0^2 l_\chi} [K_{w\chi}] \{\bar{w}\} + \\ + \frac{z_A l_s}{A_\Sigma l_\chi} [E_c] \left(\{\bar{s}\}'' + 2 \frac{\omega}{\omega_0} [E_c] \{\bar{s}\}' - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \{\bar{s}\} \right) = \{0\}; \\ \{\bar{s}\}'' + \frac{h_s}{\omega_0} \{\bar{s}\}' + \frac{1}{2} nm [d_A] \left\{ \frac{l_w}{l_s} \{\bar{w}\}'' + \frac{2\omega l_w}{\omega_0 l_s} [E_c] \{\bar{w}\}' - \frac{\omega^2 l_w}{\omega_0^2 l_s} \{\bar{w}\} - \right. \\ \left. - z_A \frac{l_\chi}{l_s} [E_c] \left(\{\bar{\chi}\}'' + 2 \frac{\omega}{\omega_0} [E_c] \{\bar{\chi}\}' - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \{\bar{\chi}\} \right) \right\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Очевидным является введение следующих безразмерных параметров и безразмерных матриц (см. (15), (16) с учетом (26), (27)):

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \bar{h}_x = \frac{h_x}{M_s \omega_0}; \quad \bar{h}_\alpha = \frac{h_\alpha}{A_\Sigma \omega_0}; \quad \bar{h}_s = \frac{h_s}{\omega_0} = \frac{h}{m \omega_0}; \quad \bar{p}_x^2 = \frac{c_x}{M_s \omega_0^2}; \quad \bar{p}_\alpha^2 = \frac{c_\alpha}{A_\Sigma \omega_0^2}; \\ \bar{C}_\Sigma = \frac{C_\Sigma}{A_\Sigma}; \quad \bar{C}_r = \frac{C_r}{A_\Sigma}; \quad \bar{A}_s = \frac{A_s}{A_\Sigma}; \quad \bar{A}_{m0} = \frac{m_0 R_0^2}{A_\Sigma}; \quad \bar{A}_m = \frac{nm R^2}{A_\Sigma}; \quad \bar{A}_{A.cp} = \frac{A_{A.cp}}{A_\Sigma}; \quad \Delta \bar{A} = \frac{\Delta A}{A_\Sigma}; \\ [\bar{H}_w] = \frac{1}{M_s \omega_0} [H_w] = \bar{h}_x [E] + 2\Omega [E_c]; \quad [\bar{H}_\chi] = \frac{1}{A_\Sigma \omega_0} [H_\chi] = \bar{h}_\alpha [E] + \Omega (2 - \bar{C}_\Sigma) [E_c]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{K}_w] &= \frac{1}{M_s \omega_0^2} [K_w] = (\bar{p}_x^2 - \Omega^2) [E] + \Omega \bar{h}_x [E_c]; \\
[\bar{K}_\chi] &= \frac{1}{A_\Sigma \omega_0^2} [K_\chi] = (\bar{p}_\alpha^2 - \Omega^2 (1 - \bar{C}_\Sigma)) [E] + \Delta \bar{A} \Omega^2 [E_A] + \Omega \bar{h}_\alpha [E_c]; \\
[\bar{I}_C] &= \frac{1}{A_\Sigma} [I_C] = \bar{A}_s [E] + [\bar{I}_A^{(AB)}] = [E] + \Delta \bar{A} [E_A]; \\
[\bar{I}_A^{(AB)}] &= \frac{1}{A_\Sigma} [I_A^{(AB)}] = \frac{1}{2} \bar{A}_{m0} [d_{A0}] + \frac{1}{2} \bar{A}_m [d_A] = \bar{A}_{A.cp} [E] + \Delta \bar{A} [E_A].
\end{aligned}$$

Здесь параметры, характеризующие поперечные колебания ротора, отнесены к суммарной массе МС M_s , а параметры, характеризующие угловые колебания, отнесены к среднему суммарному моменту инерции составного ротора A_Σ . Тогда, с учетом введенных безразмерных величин, уравнения движения МС принимают вид:

$$\begin{aligned}
\{\bar{w}\}'' + [\bar{H}_w] \{\bar{w}\}' + [\bar{K}_w] \{\bar{w}\} + \frac{h_{y\alpha} l_\chi}{M_s \omega_0 l_w} [E_c] \{\bar{\chi}\}' + \frac{l_\chi}{M_s \omega_0^2 l_w} [K_{w\chi}] \{\bar{\chi}\} + \\
+ \frac{l_s}{M_s l_w} \left(\{\bar{s}\}'' + 2\Omega [E_c] \{\bar{s}\}' - \Omega^2 \{\bar{s}\} \right) = \{0\};
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{I}_C] \{\bar{\chi}\}'' + [\bar{H}_\chi] \{\bar{\chi}\}' + [\bar{K}_\chi] \{\bar{\chi}\} - \frac{h_{y\alpha} l_w}{A_\Sigma \omega_0 l_\chi} [E_c] \{\bar{w}\}' - \frac{l_w}{A_\Sigma \omega_0^2 l_\chi} [K_{w\chi}] \{\bar{w}\} + \\
+ \frac{z_A l_s}{A_\Sigma l_\chi} [E_c] \left(\{\bar{s}\}'' + 2\Omega [E_c] \{\bar{s}\}' - \Omega^2 \{\bar{s}\} \right) = \{0\}; \\
\{\bar{s}\}'' + \bar{h}_s \{\bar{s}\}' + \frac{1}{2} nm [d_A] \left\{ \frac{l_w}{l_s} \{\bar{w}\}'' + 2\Omega \frac{l_w}{l_s} [E_c] \{\bar{w}\}' - \Omega^2 \frac{l_w}{l_s} \{\bar{w}\} - \right. \\
\left. - z_A \frac{l_\chi}{l_s} [E_c] \left(\{\bar{\chi}\}'' + 2\Omega [E_c] \{\bar{\chi}\}' - \Omega^2 \{\bar{\chi}\} \right) \right\} = \{0\}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Выбором неопределенных масштабных коэффициентов ω_0 , l_w , l_χ , l_s уменьшим количество безразмерных параметров.

Выберем масштабный коэффициент ω_0 равным «сепаратной» (парциальной) «недемпфированной» собственной частоте поперечных колебаний ротора. При таком выборе ω_0 в матрице жесткости $[\bar{K}_w]$ безразмерный коэффициент $\bar{p}_x^2$ равен единице:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_x}{M_s}}; \quad \bar{p}_x^2 = \frac{c_x}{M_s \omega_0^2} = 1. \tag{32}$$

Потребуем также, чтобы были равны между собой модули коэффициентов при «перекрестных» слагаемых в первом и втором матричных уравнениях в (30), а именно

$$\frac{h_{y\alpha} l_\chi}{M_s \omega_0 l_w} = \frac{h_{y\alpha} l_w}{A_\Sigma \omega_0 l_\chi} \quad \text{и} \quad \frac{l_\chi}{M_s \omega_0^2 l_w} = \frac{l_w}{A_\Sigma \omega_0^2 l_\chi}.$$

Эти равенства выполняются при следующем выборе масштабных коэффициентов:

$\frac{l_\chi}{l_w} = \sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}}$. При этом соответствующие коэффициенты в (30) становятся равными:

$$\frac{l_\chi}{M_s l_w} \equiv \frac{l_w}{A_\Sigma l_\chi} = \frac{1}{\sqrt{M_s A_\Sigma}}.$$

С учетом последнего вводим безразмерные коэффициенты и матрицу взаимного («перекрестного») влияния поперечных и угловых колебаний ротора:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{y\alpha} &= \frac{h_{y\alpha} l_\chi}{\omega_0 M_s l_w} = \frac{h_{y\alpha} l_w}{\omega_0 A_\Sigma l_\chi} = \frac{h_{y\alpha}}{\omega_0 \sqrt{M_s A_\Sigma}}; \quad \bar{c}_{y\alpha} = \frac{c_{y\alpha}}{\omega_0^2 \sqrt{M_s A_\Sigma}}; \\ [\bar{K}_{w\chi}] &= \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{M_s A_\Sigma}} [K_{w\chi}] = -\Omega \bar{h}_{y\alpha} [E] + \bar{c}_{y\alpha} [E_c]. \end{aligned}$$

Потребуем также, чтобы коэффициент при $\{\bar{s}\}''$ в первом уравнении в (30) был равен единице, т.е. $\frac{l_s}{M_s l_w} = 1$. Для этого выбираем масштабные коэффициенты: $l_s/l_w = M_s$.

С учетом выбранных выше соотношений $\frac{l_\chi}{l_w} = \sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}}$ и $\frac{l_s}{l_w} = M_s$, находим третье соотношение масштабных коэффициентов: $l_s/l_\chi = \sqrt{M_s A_\Sigma}$.

Отсюда коэффициент при $\{\bar{s}\}''$ во втором матричном уравнении в (30) равен

$$\frac{z_A l_s}{A_\Sigma l_\chi} = z_A \sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}}.$$

Введем следующий безразмерный параметр:

$$\bar{z}_A = z_A \frac{l_\chi}{l_w} \quad \text{или} \quad \bar{z}_A = z_A \sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}}.$$

При этом можно показать, что аналогичный коэффициент при $\{\bar{\chi}\}''$ в уравнениях движения АБУ (31) может быть представлен в виде

$$z_A \frac{l_\chi}{l_s} = \bar{z}_A \frac{l_w}{l_s}.$$

С учетом последнего и выбранных выше соотношений уравнения движения АБУ (31) принимают вид:

$$\begin{aligned} \{\bar{s}\}'' + \bar{h}_s \{\bar{s}\}' + \frac{1}{2} \frac{nm}{M_s} [d_A] \left\{ \{\bar{w}\}'' + 2\Omega [E_c] \{\bar{w}\}' - \Omega^2 \{\bar{w}\} - \right. \\ \left. - \bar{z}_A [E_c] \left(\{\bar{\chi}\}'' + 2\Omega [E_c] \{\bar{\chi}\}' - \Omega^2 \{\bar{\chi}\} \right) \right\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Введем, наконец, последний безразмерный коэффициент – безразмерную массу КГ АБУ: $\bar{m} = \frac{n m}{M_s}$.

Таким образом, в итоге проделанных преобразований получаем систему безразмерных уравнений движения МС во вращающихся координатах в виде:

$$\begin{aligned} \{\bar{w}\}'' + [\bar{H}_w]\{\bar{w}\}' + [\bar{K}_w]\{\bar{w}\} + \bar{h}_{y\alpha}[E_c]\{\bar{\chi}\}' + [\bar{K}_{w\chi}]\{\bar{\chi}\} + \{\bar{s}\}'' + 2\Omega[E_c]\{\bar{s}\}' - \Omega^2\{\bar{s}\} = \{0\}; \\ [\bar{I}_C]\{\bar{\chi}\}'' + [\bar{H}_\chi]\{\bar{\chi}\}' + [\bar{K}_\chi]\{\bar{\chi}\} - \bar{h}_{y\alpha}[E_c]\{\bar{w}\}' - [\bar{K}_{w\chi}]\{\bar{w}\} + \\ + \bar{z}_A[E_c]\left(\{\bar{s}\}'' + 2\Omega[E_c]\{\bar{s}\}' - \Omega^2\{\bar{s}\}\right) = \{0\}; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{s}\}'' + \bar{h}_s\{\bar{s}\}' + \frac{1}{2}\bar{m}[d_A]\left(\{\bar{w}\}'' + 2\Omega[E_c]\{\bar{w}\}' - \Omega^2\{\bar{w}\} - \right. \\ \left. - \bar{z}_A[E_c]\left(\{\bar{\chi}\}'' + 2\Omega[E_c]\{\bar{\chi}\}' - \Omega^2\{\bar{\chi}\}\right)\right) = \{0\}, \end{aligned} \quad (34)$$

где безразмерные матрицы:

$$\begin{aligned} [\bar{H}_w] &= \frac{1}{M_s\omega_0}[H_w] = \bar{h}_x[E] + 2\Omega[E_c]; \quad [\bar{H}_\chi] = \frac{1}{A_\Sigma\omega_0}[H_\chi] = \bar{h}_\alpha[E] + \Omega(2 - \bar{C}_\Sigma)[E_c]; \\ [\bar{K}_w] &= \frac{1}{M_s\omega_0^2}[K_w] = (\bar{p}_x^2 - \Omega^2)[E] + \Omega\bar{h}_x[E_c]; \\ [\bar{K}_\chi] &= \frac{1}{A_\Sigma\omega_0^2}[K_\chi] = (\bar{p}_\alpha^2 - \Omega^2(1 - \bar{C}_\Sigma))[E] + \Delta\bar{A}\Omega^2[E_A] + \Omega\bar{h}_\alpha[E_c]; \\ [\bar{K}_{w\chi}] &= \frac{1}{\omega_0^2\sqrt{M_sA_\Sigma}}[K_{w\chi}] = -\Omega\bar{h}_{y\alpha}[E] + \bar{c}_{y\alpha}[E_c]; \\ [\bar{I}_C] &= \frac{1}{A_\Sigma}[I_C] = \bar{A}_s[E] + [\bar{I}_A^{(AD)}] = \begin{bmatrix} \bar{A}_{C1} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{C2} \end{bmatrix} = [E] + \Delta\bar{A}[E_A]; \\ [\bar{I}_A^{(AB)}] &= \frac{1}{A_\Sigma}[I_A^{(AB)}] = \frac{1}{2}\bar{A}_{m0}[d_{A0}] + \frac{1}{2}\bar{A}_m[d_A] = \bar{A}_{A,cp}[E] + \Delta\bar{A}[E_A]; \\ [d_A] &= \begin{bmatrix} 1 - D_A & 0 \\ 0 & 1 + D_A \end{bmatrix} = [E] + D_A[E_A]; \quad [d_{A0}] = 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [E] + [E_A]; \\ [E] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [E_c] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad [E_A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

и безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \bar{p}_x^2 = \frac{c_x}{M_s\omega_0^2} = 1; \quad \bar{p}_\alpha^2 = \frac{c_\alpha}{A_\Sigma\omega_0^2}; \quad \bar{c}_{y\alpha} = \frac{c_{y\alpha}}{\omega_0^2\sqrt{M_sA_\Sigma}}; \\ \bar{h}_x &= \frac{h_x}{M_s\omega_0}; \quad \bar{h}_\alpha = \frac{h_\alpha}{A_\Sigma\omega_0}; \quad \bar{h}_{y\alpha} = \frac{h_{y\alpha}}{\omega_0\sqrt{M_sA_\Sigma}}; \quad \bar{h}_s = \frac{h_s}{\omega_0} = \frac{h}{m\omega_0}; \\ \bar{C}_\Sigma &= \frac{C_\Sigma}{A_\Sigma}; \quad \bar{C}_r = \frac{C_r}{A_\Sigma}; \quad \bar{A}_s = \frac{A_s}{A_\Sigma}; \quad \bar{A}_{m0} = \frac{m_0R_0^2}{A_\Sigma}; \quad \bar{A}_m = \frac{nmR^2}{A_\Sigma}; \\ \bar{A}_{A,cp} &= \frac{A_{A,cp}}{A_\Sigma} = \frac{1}{2}\bar{A}_{m0} + \frac{1}{2}\bar{A}_m; \quad \Delta\bar{A} = \frac{\Delta A}{A_\Sigma} = \frac{1}{2}(\bar{A}_{C2} - \bar{A}_{C1}) = \frac{1}{2}\bar{A}_{m0} + \frac{1}{2}\bar{A}_m D_A; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\bar{A}_{C1,2} = 1 \mp \Delta \bar{A} = \frac{A_{C1,2}}{A_\Sigma}; \quad \bar{z}_A = z_A \sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}}; \quad \bar{m} = \frac{n m}{M_s}; \quad 0 \leq D_A \leq 1.$$

Здесь все матрицы имеют размерность (2,2). Размерные параметры $M_s, A_\Sigma, \Delta A, A_s, \omega_0$ см. формулы (3), (26), (27), (32), а также в табл. 1.

Безразмерные обобщенные координаты МС $\{\bar{w}\}, \{\bar{\chi}\}, \{\bar{s}\}$, входящие в уравнения движения (33), (34), определяются выражениями (29), где масштабные коэффициенты l_w, l_χ, l_s выбраны следующим образом:

$$\frac{l_\chi}{l_w} = \sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}}; \quad \frac{l_s}{l_w} = M_s; \quad \frac{l_s}{l_\chi} = \sqrt{M_s A_\Sigma}. \quad (37)$$

При этом один из масштабных коэффициентов l_w, l_χ, l_s может быть выбран произвольно, например, можно принять $l_w = R_0$. Отметим, кроме того, что множитель $\rho_s = \sqrt{A_\Sigma / M_s}$, входящий в выражения для безразмерных параметров системы, имеет физический смысл радиуса инерции составного ротора.

Безразмерные уравнения движения МС в неподвижных координатах могут быть получены из (11), (12) путем замены времени (28) и замены ОК МС, аналогичной (29), с учетом преобразования (22) в п. 2.3:

$$\{\bar{z}_c\}'' + \bar{h}_x \{\bar{z}_c\}' + \bar{p}_x^2 \{\bar{z}_c\} + \bar{h}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{\gamma}\}' + \bar{c}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{\gamma}\} + \{\bar{s}_w\}'' = \{0\}; \quad (38)$$

$$[\bar{J}_c(\tau)] \{\bar{\gamma}\}'' + (\bar{h}_\alpha [E] + [\bar{G}_J(\tau)]) \{\bar{\gamma}\}' + \bar{p}_\alpha^2 \{\bar{\gamma}\} - \bar{h}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{z}_c\}' - \bar{c}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{z}_c\} + \bar{z}_A [E_c] \{\bar{s}_w\}'' = \{0\};$$

$$\{\bar{s}\}'' + \bar{h}_s \{\bar{s}\}' + \frac{1}{2} \bar{m} [d_A] [T]^{-1} (\{\bar{z}_c\}'' - \bar{z}_A [E_c] \{\bar{\gamma}\}'') = \{0\}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \{\bar{z}_c\} &= \begin{Bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{y}_c \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_w} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_w} \{z_c\}; \quad \{\bar{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_\chi} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_\chi} \{\gamma\}; \\ \{\bar{s}_w\} &= \begin{Bmatrix} \bar{s}_u \\ \bar{s}_v \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_s} \begin{Bmatrix} s_u \\ s_v \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_s} \{s_w\}; \quad \{\bar{s}\} = \begin{Bmatrix} \bar{s}_\xi \\ \bar{s}_\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_s} \begin{Bmatrix} s_\xi \\ s_\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_s} \{s\}; \quad \{\bar{s}_w\} = [T] \{\bar{s}\}; \\ [\bar{J}_c(\tau)] &= \bar{A}_s [E] + [T] [\bar{I}_A^{(AB)}] [T]^{-1}; \quad [\bar{G}_J(\tau)] = -\Omega (\bar{C}_r [E] + 2[T] [\bar{I}_A^{(AB)}] [T]^{-1}) [E_c]; \\ [T] &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \tau & -\sin \Omega \tau \\ \sin \Omega \tau & \cos \Omega \tau \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь безразмерные параметры и масштабные коэффициенты см. в (36) и (37).

Безразмерные текущие координаты точки A крепления автобалансира к ротору в неподвижных и во вращающихся координатах (см. (3), (6), (13), (29)):

$$\begin{aligned} \{\bar{z}_A\} &= \frac{1}{l_w} \{z_A\} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_A \\ \bar{y}_A \end{Bmatrix} = \{\bar{z}_c\} - \bar{z}_A [E_c] \{\bar{\gamma}\}; \quad \{\bar{z}_A\} = [T] \{\bar{w}_A\}; \\ \{\bar{w}_A\} &= \frac{1}{l_w} \{w_A\} = \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_A \\ \bar{\eta}_A \end{Bmatrix} = \{\bar{w}\} - \bar{z}_A [E_c] \{\bar{\chi}\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Приведем также расчетные формулы для безразмерных коэффициентов жесткости и демпфирования. В случае если у ротора две одинаковые изотропные опоры ($c = c_L = c_R$;

$h=h_L=h_R$), то из (3) имеем:

$$\begin{aligned} c_x &= 2c; & c_\alpha &= c(l_{cL}^2 + l_{cR}^2); & c_{y\alpha} &= c(l_{cL} - l_{cR}); \\ h_x &= 2h; & h_\alpha &= h(l_{cL}^2 + l_{cR}^2); & h_{y\alpha} &= h(l_{cL} - l_{cR}), \end{aligned} \quad (41)$$

где c, h – коэффициенты жесткости и демпфирования каждой из опор;

l_{cL}, l_{cR} – расстояния от центра масс C составного ротора до левой и правой опор, которые считаются положительными при расположении диска между опорами (см. рис.1); при $l_{cR} > 0$ – межопорный ротор, а при $l_{cR} < 0$ – консольный ротор;

$l = l_{cL} + l_{cR}$ – расстояние между опорами ротора.

Безразмерные коэффициенты жесткости и демпфирования могут быть вычислены по формулам, полученным из (41) с учетом (36):

$$\begin{aligned} \bar{p}_x^2 = \bar{c}_x &= \frac{p_x^2}{\omega_0^2} = 1; & \bar{p}_\alpha^2 = \bar{c}_\alpha &= \frac{p_\alpha^2}{\omega_0^2} = \frac{c_\alpha}{A_\Sigma \omega_0^2} = \frac{c_\alpha}{c_x} \frac{M_s}{A_\Sigma} = \frac{\bar{l}_L^2 + (1 - \bar{l}_L)^2}{2\bar{\rho}_s^2}; \\ \bar{c}_{y\alpha} &= \frac{c_{y\alpha}}{\omega_0^2 \sqrt{M_s A_\Sigma}} = \frac{c_{y\alpha}}{c_x} \sqrt{\frac{M_s}{A_\Sigma}} = \frac{2\bar{l}_L - 1}{2\bar{\rho}_s}; \\ \bar{h}_x &= \frac{h_x}{M_s \omega_0} = \frac{2h}{M_s p_x}; & \bar{h}_\alpha &= \frac{h_\alpha}{A_\Sigma \omega_0} = \bar{h}_x \frac{\bar{l}_L^2 + (1 - \bar{l}_L)^2}{2\bar{\rho}_s^2}; & \bar{h}_{y\alpha} &= \frac{h_{y\alpha}}{\omega_0 \sqrt{M_s A_\Sigma}} = \bar{h}_x \frac{2\bar{l}_L - 1}{2\bar{\rho}_s}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{l}_L = l_{cL}/l; \quad \bar{\rho}_s = \rho_s/l; \quad \rho_s = \sqrt{A_\Sigma/M_s}.$$

Здесь введены безразмерные (относительные) параметры:

$\bar{l}_L$ – относительное расстояние от центра масс составного ротора до левой опоры; при $0 < \bar{l}_L < 1$ – межопорный ротор, при $\bar{l}_L = 0,5$ – симметрично расположенный ротор, а при $\bar{l}_L > 1$ – консольный ротор;

$\bar{\rho}_s$ – относительный радиус инерции ротора; например, в случае тонкого диска радиуса R_r ($A_r = 0,25M_r R_r^2$) и при межопорном расстоянии равно $l = 0,5R_r$ параметр равен $\bar{\rho}_s = 1$ (при отсутствии ДМ и АБУ).

В качестве иллюстрации на рисунках 3-6 приведены графики изменения безразмерных массо-инерционных параметров ротора, рассчитанные по формулам (26), (27), (36), см. также табл.1. Графики построены при следующих базовых значениях параметров МС: $A_r = 0,413$ кг·м²; $C_r = 0,289$ кг·м²; $M_r = 57,83$ кг; $m = 4$ кг; $R = 0,2$ м; $D_A = 0,5$; $m_0 = 2$ кг; $R_0 = 0,2$ м; $z_{GA} = 0,1$ м. При этом безразмерные параметры МС принимают значения: $E = 2$; $\bar{m} = 0,063$; $\bar{A}_m = 0,272$; $\Delta \bar{A} = 0,136$; $\bar{C}_\Sigma = 0,901$; $\bar{C}_r = C_r/A_r = 0,7$. Графики на рисунках 3-5 построены путем варьирования безразмерной массы КГ в диапазоне $\bar{m} = 0 \dots 0,2$ при постоянной ёмкости АБУ $E = 2$.

Как видно из графиков, компенсирующие грузы АБУ могут создавать заметный дополнительный момент инерции $\bar{A}_m$, даже при незначительной массе $\bar{m}$. Это приводит к тому, что значения суммарных моментов инерции относительно собственных поперечных осей A_{C1} и A_{C2} становятся различными (рис.3) и составной ротор приобретает свойство

инерционной анизотропии, которое характеризуется параметром $\Delta\bar{A}$ (рис.4). Семейство графиков на рис.4 иллюстрирует интервальный характер изменения инерционных свойств составного ротора с многомассовым АБУ в зависимости от геометрического параметра D_A . Наибольшая степень анизотропии $\Delta\bar{A}$ имеет место при значении параметра $D_A=1$. Безразмерный параметр $\bar{C}_\Sigma = C_\Sigma/A_\Sigma$ увеличивается (рис.5). Это свидетельствует о том, что массы КГ АБУ и ДМ увеличивают полярный момент инерции составного ротора в большей степени, чем экваториальные моменты инерции. В результате этого составной ротор становится «более коротким» по своим динамическим свойствам в угловых движениях.

Для наглядности на рис.6 показан годограф величины $A_C(\alpha)$ – суммарного момента инерции составного ротора относительно поперечной оси α . Инерционная анизотропия составного ротора ($A_{C1} \neq A_{C2}$) проявляется в том, что годограф имеет форму эллипса, а не окружности как для изотропного ротора.

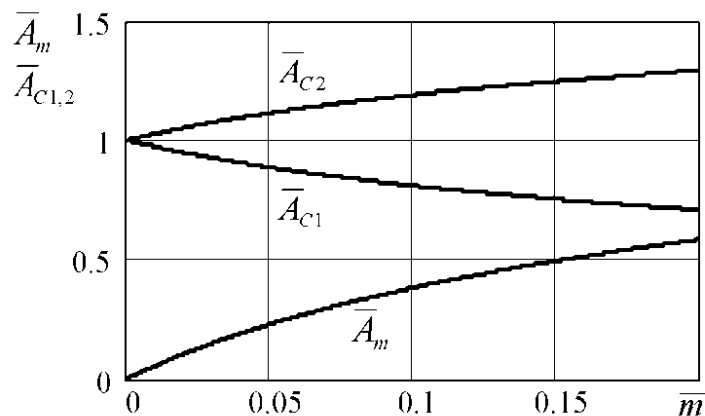


Рис. 3. Зависимости момента инерции КГ АБУ $\bar{A}_m$ и суммарных моментов инерции составного ротора $\bar{A}_{C1,2}$ от массы КГ $\bar{m}$

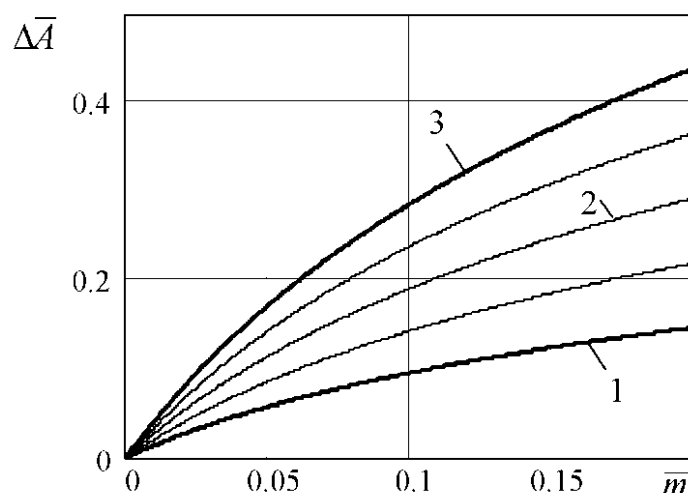


Рис. 4. Зависимость степени инерционной анизотропии составного ротора с АБУ $\Delta\bar{A}$ от массы КГ $\bar{m}$

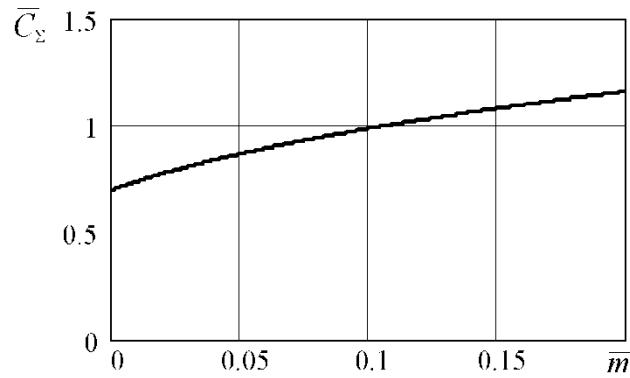


Рис. 5. Зависимость относительного полярного момента инерции составного ротора с АБУ $\bar{C}_\Sigma = C_\Sigma / A_\Sigma$ от массы КГ $\bar{m}$

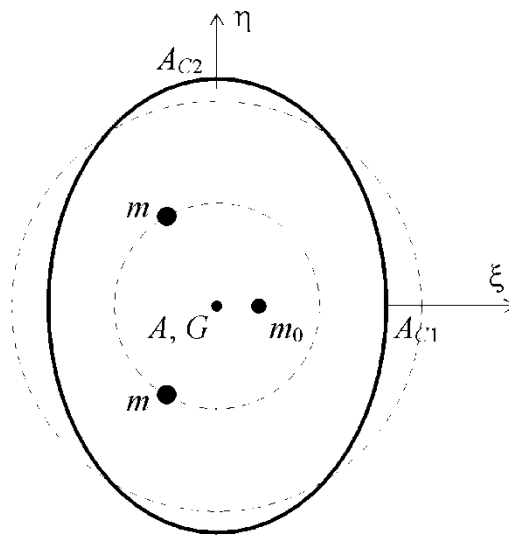


Рис. 6. Годограф величины суммарного момента инерции составного ротора $A_C(\alpha)$

5. Независимые безразмерные параметры системы

Полученные безразмерные уравнения движения МС содержат минимальное число параметров. Из (33), (34) вытекает, что устойчивость автобалансировки и динамические свойства рассматриваемой МС определяется 13-ю независимыми безразмерными параметрами (вместо 19-ти физических параметров в исходных уравнениях (15), (16)), а именно:

Ω ; $\bar{C}_\Sigma$; $\bar{z}_A$; $\bar{h}_x$; $\bar{h}_\alpha$; $\bar{h}_{y\alpha}$; $\bar{p}_\alpha$; $\bar{c}_{y\alpha}$ – параметры ротора;

$\bar{m}$; $\bar{h}_s$; D_A ; $\bar{A}_{m0}$; $\bar{A}_m$ – параметры дисбаланса и автобалансера.

Выполним оценку порядков малости безразмерных параметров МС.

Основной особенностью является то, что безразмерную массу $\bar{m}$ компенсирующих грузов автобалансера, а также дисбалансную массу $\bar{m}_0$, полагаем немалой (конечной) величиной нулевого порядка малости $\varepsilon^0=1$. Именно это обстоятельство является основным

отличием данной работы от существующих подходов, которые основаны на предположении о малости $\bar{m}$. Полученные выше уравнения МС учитывают тот факт, что массы КГ (m) и ДМ (m_0) могут быть сопоставимы с массой ротора.

Безразмерные моменты инерции $\bar{A}_m$ и $\bar{A}_{m_0}$ пропорциональны массам грузов автобалансира и ДМ соответственно. Поэтому эти параметры, а также суммарный тензор инерции КГ АБУ и ДМ $[\bar{I}_A^{(AB)}]$, являются немалыми (конечными) величинами нулевого порядка малости $\varepsilon^0=1$.

Параметр $\bar{C}_\Sigma = C_\Sigma/A_\Sigma$ характеризует тип гироскопического составного ротора: при $\bar{C}_\Sigma < 1$ – длинный ротор, $\bar{C}_\Sigma = 1$ – сферический ротор, $\bar{C}_\Sigma > 1$ – короткий ротор. Обратим внимание, что значение параметра $\bar{C}_\Sigma$ зависит не только от самого ротора, но и от моментов инерции КГ и ДМ. Поэтому при немалых значениях $\bar{m}$ и $\bar{m}_0$ составной ротор становится «более коротким» (см. рис. 5). Параметр $\bar{C}_\Sigma$ будем полагать немалой (конечной) величиной нулевого порядка малости $\varepsilon^0=1$.

Параметр D_A характеризует положение грузов в автобалансире и в общем случае может принимать значения в пределах от 0 до 1. При $n=2$ параметр D_A принимает вполне конкретное значение в зависимости от имеющегося дисбаланса или ёмкости АБУ (см. (25)). В случае многомассового автобалансира ($n \geq 3$) параметр D_A имеет некоторый интервал возможных значений, который лежит внутри диапазона $D_A \in [0, 1]$. В результате этого ряд динамических параметров МС (тензор инерции, критические скорости составного ротора, границы устойчивости, амплитуды вынужденных колебаний) приобретают интервальный характер. В этом случае имеется однопараметрическое семейство основных движений МС.

Отметим, также, что крайние возможные значения параметра D_A являются особыми частными случаями. Случай $D_A=1$ является критическим, поскольку уравнения движения АБУ (34) или (16) имеют, по крайней мере, один нулевой корень. Случай $D_A=0$ также является особым, поскольку при этом степень инерционной анизотропии ротора минимальна (см. (35), (36)) и упрощается анализ уравнений движения АБУ (34).

Анализ показывает, что безразмерные параметры $\bar{z}_A; \bar{h}_x; \bar{h}_\alpha; \bar{h}_{y\alpha}; \bar{p}_\alpha; \bar{c}_{y\alpha}; \bar{h}_s$ в общем случае роторной машины с АБУ имеют нулевой порядок малости.

Безразмерная угловая скорость Ω вращения ротора может изменяться в широких пределах. Не ограничивая общности, будем полагать, что параметр Ω может принимать значения от 0 до $+\infty$ в зависимости от назначения, конструкции и режима работы роторной машины, т.е. $\Omega \in (0, +\infty)$.

Таким образом, в общем случае все безразмерные параметры МС будем полагать немалыми (конечными) величинами нулевого порядка малости, т.е.

$$\bar{m}; \bar{A}_{m_0}; \bar{A}_m; \bar{C}_\Sigma; D_A \in [0, 1]; \bar{z}_A; \bar{h}_x; \bar{h}_\alpha; \bar{h}_{y\alpha}; \bar{p}_\alpha; \bar{c}_{y\alpha}; \bar{h}_s; \Omega \in (0, +\infty) \sim \varepsilon^0=1.$$

Заключение

1. Выполненный анализ МС с учетом влияния массы компенсирующих грузов АБУ показал, что установка автобалансира на ротор, совершающий пространственное движение, приводит к количественному и качественному изменению его массо-инерционных характеристик. А именно, составной ротор с АБУ приобретает два качественно новых свойства:

1.1. Ротор, будучи изначально изотропным, после установки на него АБУ, становится инерционно анизотропным, т.е. суммарные массовые моменты инерции составного ротора относительно двух собственных поперечных осей не равны друг другу. Добавление к ротору точечных масс компенсирующих грузов АБУ и ДМ увеличивает все компоненты тензора инерции механической системы, но неодинаково, что и приводит к инерционной анизотропии. Установлено, что даже незначительные массы $\overline{m}$ КГ АБУ могут приводить к заметной степени анизотропии $\Delta\overline{A}$. Кроме того, составной ротор становится «более коротким» (отношение моментов инерции увеличивается). Как следствие, происходит изменение динамических свойств составного ротора, прежде всего в его угловых колебаниях, – появление дополнительных («расщепление») критических частот вращения и дополнительных зон неустойчивости движения. Поэтому, в частности, даже при идеальной автобалансировке, когда КГ АБУ находятся точно в автобалансирующих положениях и неподвижны относительно ротора, могут существовать зоны неустойчивости движения МС (в случае, когда составной ротор является длинным или сферическим).

1.2. Ряд инерционных параметров МС ($A_{C1,2}, \Delta A$) приобретает интервальный характер в случае установки многомассового АБУ ($n > 2$), т.е. их величины определены не однозначно, а могут принимать множество значений из некоторого диапазона. Причиной такой особенности является неоднозначность расположения грузов АБУ в автобалансирующем режиме движения МС, что характеризуется геометрическим параметром D_A , который в общем случае может принимать значения от 0 до 1. Механическая система допускает однопараметрическое семейство движений в зависимости от параметра D_A . Поэтому степень инерционной анизотропии, критические частоты вращения и границы зон устойчивости движения МС также являются интервальными величинами.

2. Получена система безразмерных уравнений движения МС «ротор – ДМ – КГ АБУ». При этом выделено минимально необходимое количество безразмерных параметров, определяющих динамику и области устойчивости МС. Установлено, что динамические свойства рассматриваемой МС определяется 13-ю независимыми безразмерными параметрами, вместо 19-ти физических параметров в исходных размерных уравнениях. Использование безразмерных уравнений и параметров расширяет возможности последующего анализа и позволяет выделять наиболее общие свойства всего рассматриваемого класса роторных машин с АБУ.

3. Установленные в работе особенности влияния конечной (немалой) массы автобалансира необходимо учитывать при анализе динамики роторов с АБУ, совершающих пространственное движение, поскольку в результате учета данного фактора имеют место не только количественные, но и качественные изменения. Дальнейшие исследования будут

связаны с анализом спектра критических скоростей вращения и границ устойчивости автобалансировки составного ротора с АБУ.

Автор работы выражает глубокую благодарность доктору технических наук Филимонину Г.Б. за помощь и сотрудничество при подготовке данной статьи.

Список литературы

1. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. 84 с.
2. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. Кіровоград: КНТУ, 2004. 352 с.
3. Gorbenko A.N. On the Stability of Self-Balancing of a Rotor with the Help of Balls // Strength of Materials. 2003. Vol. 35, is. 3. P. 305-312. DOI: [10.1023/A:1024621023821](https://doi.org/10.1023/A:1024621023821)
4. Green K., Champneys A.R., Friswell M.I., Munoz A.M. Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanisms for eccentric rotors // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2008. Vol. 366. P. 705-728. DOI: [10.1098/rsta.2007.2123](https://doi.org/10.1098/rsta.2007.2123)
5. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2008. Vol. 43, is. 6. P. 527-541. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002)
6. Lu C.-J., Wang M.-C., Huang S.-H. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer // Mechanical Systems and Signal Processing. 2009. Vol. 23, is. 3. P. 884-896. DOI: [10.1016/j.ymssp.2008.06.008](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.06.008)
7. Яцун В.В. Математична модель зрівноваження кульовими автобалансирами крильчатки осьового вентилятора // Науковий вісник Національного гірничого університету (Дніпропетровськ). 2009. № 9. С. 11-18. Режим доступа: http://www.nbuu.gov.ua/old_jrn/natural/Nvngu/2009_9/Yatsun.pdf (дата обращения 01.11.2015).
8. Быков В.Г. Балансировка статически и динамически неуравновешенного ротора одноплоскостным автобалансирующим механизмом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2009. № 4. С. 67-76.
9. Дубовик В.А., Зиякаев Г.Р. Основное движение двухмаятникового автобалансира на гибком валу с упругими опорами // Известия Томского политехнического университета. 2010. Т. 317, № 2: Математика и механика. Физика. С. 37-39.
10. Bykov V.G. Auto-balancing of a rotor with an orthotropic elastic shaft // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2013. Vol. 77, is. 4. P. 369-379. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2013.11.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.005)
11. Филимонович Г.Б., Гончаров В.В. Уравновешивание автобалансиrom ротора в упруго-вязко закреплённом корпусе, совершающем пространственное движение // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 325, № 2: Математика, физика и механика. С. 41-49.
12. Філімоніхіна І.І., Філімоніхін Г.Б. Узагальнений емпіричний критерій стійкості основного руху і його застосування до ротора на двох осесиметричних пружних опорах // Машинознавство. 2007. № 3. С. 22-27.

13. Филимоныхин Г.Б., Горбенко А.Н. Влияние массы шаров автобалансира на структуру уравнений движения двухопорного ротора // Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении: Украинский межведом. науч.-техн. сб. Вып. 45. Львов: Нац. ун-т «Львовская политехника» 2011. С. 478-488. Режим доступа: http://www.nbu.gov.ua/old_jrn/natural/Avtomatyzac/2011_45/77.pdf (дата обращения 05.06.2012).
14. Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В., Філімоніхіна І.І. Безрозмірні диференціальні рівняння, що описують стійкість основного руху системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпуса і автобалансира // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2011. Т. 1, № 3 (49). С. 40-44.
15. Горбенко А.Н. Изменение границы устойчивости автобалансировки ротора шарами в процессе эксплуатации // Авиационно-космическая техника и технология. 2008. Вып. 8 (55). С. 156-159. Режим доступа: <http://gorbenko-a-n.narod.ru/> (дата обращения 18.06.2010).
16. Вибрации в технике: справочник. В 6 т. Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов / под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1980. 544 с.
17. Genta G. Dynamics of Rotating Systems. New York: Springer US, 2005. 658 p. DOI: [10.1007/0-387-28687-X](https://doi.org/10.1007/0-387-28687-X)
18. Горбенко А.Н. О динамических свойствах несимметрично установленного ротора с инерционной анизотропией // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. Т. 3, № 7 (69). С. 8-17. DOI: [10.15587/1729-4061.2014.24484](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.24484)

Mass-Inertial Characteristics and Dimensionless Equations of Two-bearing Rotor Motion with Auto-balancer in Terms of Compensating Body Mass

A.N. Gorbenko^{1,*}

^{*}gan0941@yandex.ru

¹Kerch State Marine Technological University, Kerch, Russia

Keywords: rotor, inertial characteristics, autobalancer, equations of motion, anisotropy, dynamics, stability

Modern rotary machines use auto-balancing devices of passive type to provide automatic balancing of rotors and reduce vibration. Most available researches on the rotor auto-balancing dynamics and stability are based on the assumption that the compensating bodies of the auto-balancer, as well as the rotor imbalance, are infinitesimal values. The literature review has shown that the problems concerning the automatic balancing of rotor with its three-dimensional motion are solved approximately and require an in-depth analysis taking into consideration the final mass of the compensating bodies.

The paper analyses the effect of an auto-balancer mass on the mass-inertial properties of the three-dimensional rotor motion. It gives the autonomous equations of the system motion. The work shows that attaching the point masses of compensating auto-balancer bodies and imbalance to the rotor causes an increase, however non-identical, in all components of the total inertia tensor of the mechanical system. This leads to a qualitative change in mass-inertial characteristics of the system.

The composite rotor becomes an inertia anisotropic body in which the inertia moments about the two transverse own axes are not equal to each other. The rotor anisotropy results in complicated dynamic behavior of the gyroscopic rotor. In this case, the additional critical rotor speeds and the zones of instability of motion may occur.

It is shown that in the case of using multi-body auto-balancer the inertial parameters of the rotor system grow into the interval values, i.e. their values are not uniquely determined and may be equal to a variety values from a certain range. Thus, the degree of inertial anisotropy and other auto-balancing parameters are the interval values as well in this case.

The system of dimensionless equations of rotary machine motion, which contains the minimum required number of dimensionless parameters, has been obtained. The specific ranges of the dimensionless parameter values have been analyzed. Using the dimensionless equations and

parameters extends the capabilities for further analysis and allows us to define the most general properties of an entire class of the auto-balancer rotary machines under consideration.

References

1. Nesterenko V.P. *Avtomaticheskaya balansirovka rotorov priborov i mashin so mnogimi stepenyami svobody* [Automatic balancing of rotor of devices and machines with many degrees of freedom]. Tomsk, TSU Publ., 1985. 84 p. (in Russian).
2. Filimonikhin G.B. *Zrivnovazhennya i vibrozakhist rotoriv avtobalansirami z tverdimi korigival'nimi vantazhami* [Balancing and vibration protection of rotors by autobalancers with solid corrective weights]. Kirovograd, KNTU, 2004. 352 p. (in Ukrainian).
3. Gorbenko A.N. On the Stability of Self-Balancing of a Rotor with the Help of Balls. *Strength of Materials*, 2003, vol. 35, is. 3, pp. 305-312. DOI: [10.1023/A:1024621023821](https://doi.org/10.1023/A:1024621023821)
4. Green K., Champneys A.R., Friswell M.I., Munoz A.M. Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanisms for eccentric rotors. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2008, vol. 366, pp. 705-728. DOI: [10.1098/rsta.2007.2123](https://doi.org/10.1098/rsta.2007.2123)
5. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, is. 6, pp. 527-541. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002)
6. Lu C.-J., Wang M.-C., Huang S.-H. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, vol. 23, is. 3, pp. 884-896. DOI: [10.1016/j.ymssp.2008.06.008](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.06.008)
7. Yacun V.V. Mathematical model of axial fan impeller balancing by ball autobalancers. *Naukovij visnik Nacional'nogo girnichogo universitetu (Dnipropetrovs'k) = Scientific Bulletin of National Mining University (Dnepropetrovsk)*, 2009, no. 9, P. 11-18. Available at: http://www.nbu.gov.ua/old_jrn/natural/Nvngu/2009_9/Yatsun.pdf , accessed 01.11.2015. (in Ukrainian).
8. Bykov V.G. Compensating of statically and dynamically unbalanced rotor by single-plane auto-balancing device. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiya = Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2009, no. 4, pp. 67-76. (in Russian).
9. Dubovik V.A., Ziyakaev G.R. Main movement of two pendulum device at flexible shaft with elastic supports. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta = Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2010, vol. 317, no. 2: *Mathematics and Mechanics. Physics*, pp. 37-39. (in Russian).
10. Bykov V.G. Auto-balancing of a rotor with an orthotropic elastic shaft. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, is. 4, pp. 369-379. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2013.11.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.005)
11. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Rotor balancing by auto-balancer in visco-elastic fixed bed being in spatial motion. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta = Bulletin*

- of the Tomsk Polytechnic University, 2014, vol. 325, no. 2: *Mathematics, Physics and Mechanics*, pp. 41-49. (in Russian).
12. Filimonikhina I.I., Filimonikhin G.B. The generalized empirical criterion of stability the main motion and its application to the rotor on two axially symmetric elastic supports. *Mashinoznavstvo = Mechanical engineering*, 2007, no. 3, pp. 22-27. (in Ukrainian).
 13. Filimonikhin G.B., Gorbenko A.N. Effect of the balls mass of the auto-balancer on structure of the motion equations of the rotor on two supports. *Avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov v mashinostroenii i priborostroenii: Ukrainskii mezhvedom. nauch.-tekhn. sb. Vyp. 45* [Automation of production processes in mechanical engineering and instrument: Ukrainian interdepartmental scientific and technical collection. Is. 45]. Lviv, Lviv Polytechnic National University, 2011, pp. 478-488. Available at: http://www.nbu.gov.ua/old_jrn/natural/Avtomatyzac/2011_45/77.pdf , accessed 05.06.2012. (in Ukrainian).
 14. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V., Filimonikhina I.I. The dimensionless differential equations describing the firmness of the basic movements of one rotor system. *Vostochno-Evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnologii = East European Journal of Enterprise Technologies*, 2011, vol. 1, no. 3 (49), pp. 40-44. (in Ukrainian).
 15. Gorbenko A.N. Change of borders of stability of a rotor autobalancing by spheres while in maintenance. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya = Aerospace technic and technology*, 2008, no. 8 (55), pp. 156-159. (in Russian).
 16. Dimentberg F.M., Kolesnikov K.S., eds. *Vibratsii v tekhnike: spravochnik. V 6 t. T. 3. Kolebaniya mashin, konstruksii i ikh elementov* [Vibration in technique: Handbook. In 6 vols. Vol. 3. Oscillations of machines, designs and their elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 544 p. (in Russian).
 17. Genta G. *Dynamics of Rotating Systems*. Springer US, 2005. 658 p. DOI: [10.1007/0-387-28687-X](https://doi.org/10.1007/0-387-28687-X)
 18. Gorbenko A.N. On the dynamic properties of the asymmetrically mounted rotor with inertial anisotropy. *Vostochno-Evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnologii = East European Journal of Enterprise Technologies*, 2014, vol. 3, no. 7 (69), pp. 8-17. DOI: [10.15587/1729-4061.2014.24484](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.24484) (in Russian).