

УДК 621.865.8

Модифицированная система координат Денавита-Хартенберга для исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой

Ковальчук А. К.^{1,*}

[*aleksandr.alexkov@yandex.ru](mailto:aleksandr.alexkov@yandex.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Предложена модифицированная система координат Денавита-Хартенберга, являющаяся результатом совместного применения методов теории графов и системы координат Денавита-Хартенберга, разработанной для описания кинематики исполнительных механизмов роботов с линейной разомкнутой кинематической цепью. Она позволяет формировать математические модели исполнительных механизмов роботов, имеющих древовидные кинематические структуры. Введены понятия основных и вспомогательных систем координат. Рассмотрен пример формирования матрицы достижимости и графа достижимости звеньев для древовидного исполнительного механизма роботизированного манекена. Эффективность использования предлагаемой модифицированной системы координат Денавита-Хартенберга показана на примерах математического описания кинематики и динамики древовидных исполнительных механизмов конкретных роботов, рассмотренных в опубликованных ранее работах. Показано, что предложенная система координат может с успехом применяться и для описания исполнительных механизмов роботов с линейной разомкнутой кинематической цепью, являющейся частным случаем древовидной кинематической структуры. Отсутствие в ней узлов ветвления не требует введения вспомогательных систем координат, а параметры $f(i)$ и $ps(i)$ необходимы только для формальной записи уравнений, которые для древовидной и линейной цепей имеют одинаковый вид. В таком случае модифицированная система координат и традиционная совпадают.

Ключевые слова: древовидный исполнительный механизм, система координат Денавита-Хартенберга, кинематическая схема робота, проектирование исполнительного механизма робота, уравнения кинематики и динамики робота

Введение

Методам математического описания кинематики и динамики ИМ роботов посвящена обширная литература [1-6]. Авторы рассматривают ИМ как линейную разомкнутую кинематическую цепь, что характерно для промышленных роботов и манипуляционных

устройств специального назначения. Наибольшее распространение получили два метода описания кинематики и динамики ИМ таких роботов.

Первый метод основан на использовании блочных матриц [7, 8]. Он позволяет получать уравнения кинематики ИМ как в аналитической, так и в алгоритмической формах. Важно отметить, что для практического использования данного метода авторами разработано программное обеспечение, позволяющее исследовать и проектировать исполнительные системы роботов, в том числе и с упругими звеньями. В работе [9] рассмотрен пример использования данного метода к построению модели кинематики ИМ промышленного робота с разветвлённой кинематической структурой (КС) схвата.

Второй метод описания кинематики ИМ роботов предложили Денавит (J. Denavit) и Хартенберг (R.S. Hartenberg) в работе [10]. Он основан на использовании матриц однородных преобразований (4×4), дающих однозначные и чёткие правила построения математической модели ИМ робота. При этом число параметров, входящих в матрицу A_i относительного положения последовательных звеньев ИМ, минимально, и естественным образом определяет взаимное расположение последовательных звеньев ИМ. Вид матрицы A_i одинаков как для вращательного, так и для поступательного сочленений.

Существенным преимуществом такого метода построения связанных СК является то, что можно указать только четыре параметра, определяющих относительное положение двух последовательных СК $i-1$ и i , а следовательно и матрицу пересчёта A_i .

Итоговая матрица A_i , связывающая СК $i-1$ и i имеет следующий вид [10]:

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & a_i \cdot \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & a_i \cdot \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Из четырёх параметров $(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i)$, входящих в выражение (1), два параметра a_i и α_i всегда постоянны и определяются конструкцией ИМ робота. Один из двух других параметров $(\theta_i$ либо $d_i)$ является переменным. Для вращательного сочленения величина θ_i характеризует угол относительного поворота звеньев $i-1$ и i , а линейная величина d_i постоянна. Для телескопического соединения наоборот, переменной величиной является d_i . Переменную величину i -го сочленения $(\theta_i$ или $d_i)$ обычно называют обобщённой координатой ИМ робота.

При построении кинематических моделей роботов данный метод получил наибольшее распространение среди разработчиков из-за его наглядности и привязки к конструктивным параметрам ИМ.

Однако попытки использовать данный метод к описанию роботов, ИМ которых имеют древовидную КС, выявили определённые сложности его применения.

1. Актуальность

При создании шагающих роботов (ШР), получивших интенсивное развитие в последнее время, у разработчиков возникла проблема математического описания кинематики и динамики их ИМ, представляющих собой пространственные древовидные КС с большим числом степеней подвижности. Использование известных методов, дающих хорошие результаты для описания ИМ роботов с линейной разомкнутой кинематической цепью, не всегда приемлемо для описания ИМ, имеющих древовидные кинематические цепи.

Важно и то, чтобы полученные этими методами математические модели кинематики ИМ могли быть использованы при построении уравнений динамики и алгоритмов управления движением роботов.

Поэтому разработка новых эффективных методов построения математических моделей кинематики и динамики древовидных ИМ роботов является важной научно-технической задачей.

2. Метод

Предлагается метод построения модифицированной СК Д-Х, позволяющий формировать математические модели ИМ роботов, имеющих произвольные древовидные КС. Метод основан на совместном применении теории графов [11] и СК Д-Х, предложенной в [10] для описания кинематики роботов с линейной разомкнутой кинематической цепью. При этом сохраняются известные преимущества СК Д-Х и появляется возможность описания кинематики произвольной древовидной КС с использованием методов теории графов.

3. Результаты

Представим кинематическую схему ИМ робота (рис. 1) в виде древовидного направленного графа (рис. 2) [11]. Звенья ИМ в таком графе являются вершинами, а соединяющие их сочленения – дугами [12]. За корень дерева (звено с номером «0») примем окружающее пространство, в котором находится робот. Звенья ИМ робота нумеруются с 1-го и далее по возрастающим номерам, от корня дерева к его листьям без пропусков. При этом должно выполняться условие, что собственный номер звена меньше номера любого звена-потомка. Номер обобщенной координаты ИМ, как и номер соответствующего сочленения тот же, как и у звена, присоединяемого этим сочленением к предыдущему звену. Для ШР, корпус которого не закреплён к неподвижному основанию, общее число степеней его свободы равно $N+6$, где N – число степеней подвижности его ИМ. Для “привязки” ИМ ШР к абсолютной СК и описания его движения в пространстве, вводится фиктивная кинематическая цепь, соединяющая корпус робота с неподвижной в абсолютной СК фиктивной стойкой. Эта фиктивная цепь состоит из невесомых звеньев

(0÷5), (три поступательные и три вращательные кинематические пары 5-го класса) и характеризует положение и ориентацию корпуса робота в абсолютной СК.

Такое описание кинематической схемы древовидного ИМ робота допускает различные варианты нумерации звеньев. Количество вариантов нумерации зависит от сложности древовидной кинематической структуры. При этом каждому варианту нумерации соответствует свой направленный граф, своя матрица достижимости и свой блочный вектор $\bar{Z}$, определяющий последовательность ортов осей $\bar{z}$, соответствующих сочленениям, соединяющим звенья ИМ с их звеньями-отцами.

Разработчику предоставляется право выбора конкретного варианта нумерации исходя из его приоритетов. Однако, надо помнить, что все варианты нумерации равноправны и приводят к искомому результату.

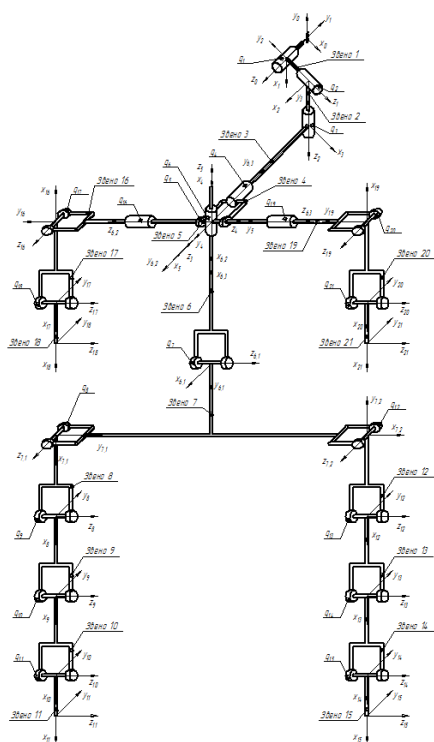


Рис. 1. Кинематическая схема ИМ роботизированного манекена с фиктивными звеньями

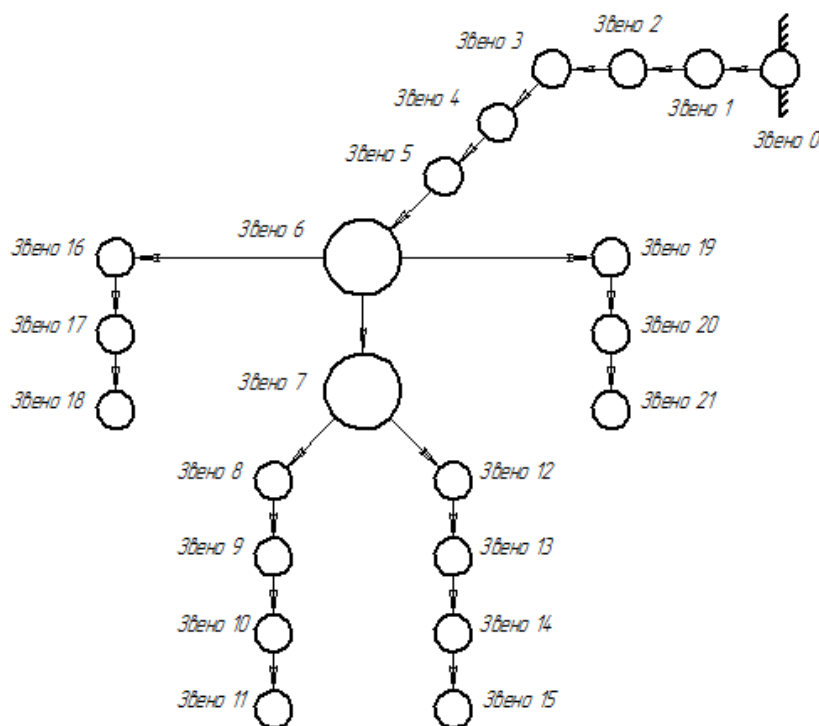


Рис. 2. Древовидный граф, представляющий кинематическую структуру ИМ роботизированного манекена

При математическом описании кинематических структур ИМ роботов, представленных в виде древовидных направленных графов, воспользуемся следующими определениями [12]:

$L=\{1,2,...,N\}$ – неупорядоченное множество, элементами которого являются номера звеньев ИМ;

$f(i)$ – номер звена, являющегося звеном-отцом для звена i ;

$s(i,k)$ – номер звена, являющегося k -м звеном-сыном для звена i ;

$dg^+(i)$ – полустепень исхода звена i , определяет количество звеньев-сыновей звена i ;

$\Gamma(i)$ – кортеж номеров звеньев, являющихся для звена i звеньями-сыновьями
 $\Gamma(i)=\{(s(i,1),$
 $s(i,2),\dots s(i,k),\dots s(i, dg^+(i))\}$;

$ns(i)$ – определяет, каким по счёту звеном-сыном является звено i для своего звена-отца;

$\sigma_i = \{0, 1\}$ – коэффициент, определяющий тип сочленения звена i (1 – вращательное, 0 – поступательное);

$\sigma_i = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_N\}$ – диагональная матрица, определяющая типы сочленения звеньев древовидного ИМ.

Рассмотрим порядок назначения СК связанных со звеньями древовидного ИМ [13, 14]. С каждым звеном ИМ связывается столько СК, сколько звеньев-сыновей оно имеет. Одна из СК, связанных со звеном, назначается за основную, остальные являются вспомогательными. В качестве примера на рис. 3 показаны три СК, связанные со звеном i , имеющим три звена-сына. Все СК назначаются в соответствии с правилами Денавита-Хартенберга [10].

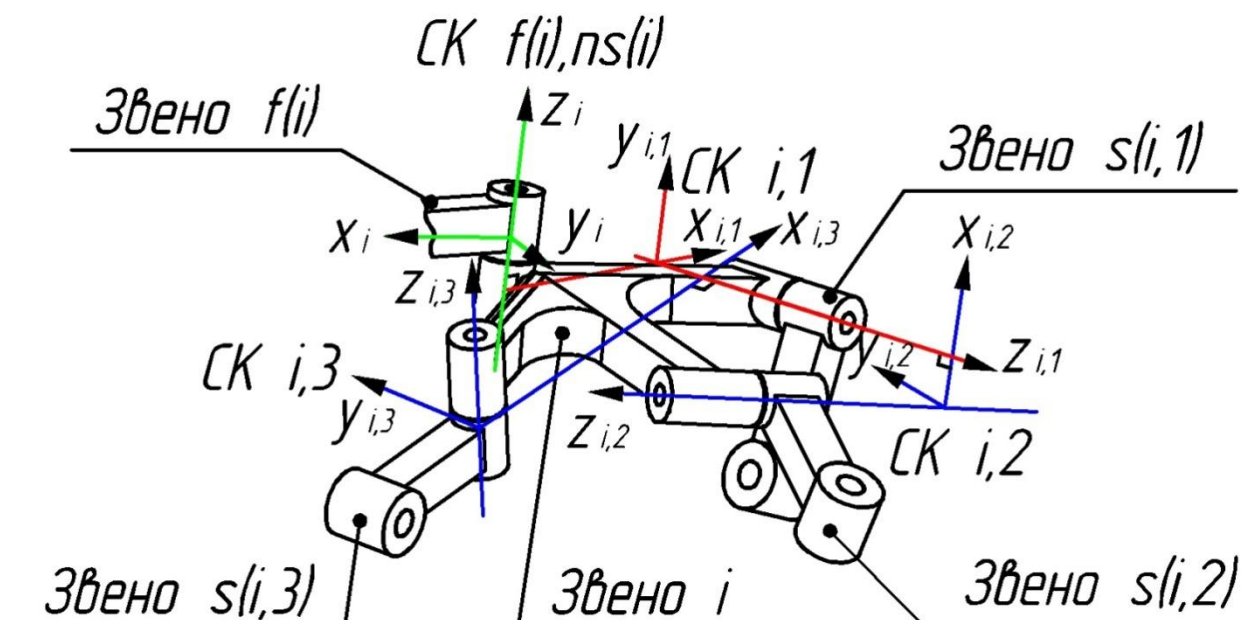


Рис. 3. Назначение СК, связанных с ветвящимся звеном

Переход из основной СК звена i в СК его звена-отца $f(i)$, соответствующую этому звену, определяется матрицей преобразования A_i :

$$A_i = \begin{vmatrix} f(i),ns(i)R_i & f(i),ns(i)\bar{l}_i \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

А переходы из вспомогательных СК в основную СК звена i определяется постоянными матрицами однородных преобразований $M_{i,ns(j)}$, где j – число звеньев-сыновей звена i :

$$M_{i,ns(j)} = \left| \begin{array}{ccc|c} {}^iR_{M_{i,ns(j)}} & & & {}^i r_{i,ns(j)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|. \quad (3)$$

Выражения (2) и (3) позволяют записать рекуррентные соотношения для определения матрицы T , которая характеризует переход от основных СК звеньев в абсолютную СК.

$$T_i = T_{f(i)} M_{i,ns(j)} A_i.$$

Матрица $M_{i,ns(j)}$ всегда постоянна и выполняет вспомогательную функцию при переходе из основной СК звена-сына в основную СК звена-отца. В случае, если $j \in \Gamma_{(i)}$ и ему соответствует основная СК звена i , то $M_{i,ns(j)} = E$.

Порядок следования СК в древовидной кинематической структуре ИМ робота задаётся с помощью блочного вектора $\bar{Z}$. Он определяет последовательность ортов осей z , соответствующих сочленениям, соединяющим звенья ИМ с их звеньями-отцами. Так, для ИМ, кинематическая схема которого представлена на рис. 1, блочный вектор $\bar{Z}$ имеет следующий вид:

$$\bar{Z} = ({}^0z_1, {}^0z_2, {}^0z_3, {}^0z_4, {}^0z_5, {}^0z_{6,1}, {}^0z_{7,1}, {}^0z_8, {}^0z_9, {}^0z_{10}, {}^0z_{11}, {}^0z_{7,2}, {}^0z_{12}, {}^0z_{13}, {}^0z_{14}, {}^0z_{15}, {}^0z_{6,2}, {}^0z_{16}, {}^0z_{17}, {}^0z_{18}, {}^0z_{6,3}, {}^0z_{19}, {}^0z_{20}, {}^0z_{21})^T \quad (4)$$

Первым элементом (соответствует первому звену) является z_0 абсолютной СК. Вторым элементом – орт оси z первого звена. А, например, для 19 звена – орт оси z вспомогательной СК 6-го звена. Оси СК звеньев-листьев в этот блочный вектор не входят.

Необходимо отметить, что в рассматриваемом примере блочный вектор $\bar{Z}$ имеет размерность (24x24), а блочный вектор $\bar{z}$ – размерность (21x21). Это связано с тем, что элементы ${}^0z_{6,2}$, ${}^0z_{6,3}$, ${}^0z_{7,2}$ вектора $\bar{Z}$ не являются осями кинематических пар ИМ, а соответствуют вспомогательным системам координат робота, определяющим их положение и ориентацию в основных системах координат. Для линейной разомкнутой кинематической цепи размерности векторов $\bar{Z}$ и $\bar{z}$ совпадают.

Для математического описания древовидной кинематической структуры ИМ необходимо также определить порядок расположения звеньев друг относительно друга. Он определяется матрицей достижимости D – квадратной матрицей, каждый элемент которой $d_{ij} = 1$, если i -я вершина направленного графа, описывающего кинематическую структуру ИМ, достижима из вершины j , и $d_{ij} = 0$, если i -я вершина не достижима из вершины j .

При нумерации звеньев ИМ робота в соответствии с изложенными выше правилами, матрица достижимости D получается нижней треугольной матрицей, размерность которой равна числу звеньев ИМ. Следовательно, как древовидный граф, представляющий

древовидную кинематическую структуру робота, так и матрица достижимости D отражают взаимное расположение и достижимость звеньев его ИМ.

Таким образом, предлагаемый метод построения модифицированной СК Д-Х позволяет определить значения параметров основных и вспомогательных СК древовидного ИМ робота. В таблицах 1 и 2 представлены значения модифицированных параметров Д-Х для основных и вспомогательных СК ИМ робота, кинематическая схема которого представлена на рис. 1 [11].

Таблица 1. Значения модифицированных параметров Д-Х для основных СК ИМ робота

№ СК	θ , рад	d , м	a , м	α , рад	$f(i)$	$ns(i)$
1	$-\pi/2$	0	0	$-\pi/2$	0	1
2	$-\pi/2$	0	0	$-\pi/2$	1	1
3	$-\pi/2$	0	0	$-\pi/2$	2	1
4	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	3	1
5	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	4	1
6	0	-0,349	0	$-\pi/2$	5	1
7	$\pi/2$	-0,1	0,17	$\pi/2$	6	1
8	0	0	0	$-\pi/2$	7	1
9	0	0	0,4	0	8	1
10	0	0	0,42726	0	9	1
11	0	0	0,051	0	10	1
12	$-\pi/2$	0	0	$-\pi/2$	7	2
13	0	0	0,4	0	12	1
14	0	0	0,42726	0	13	1
15	0	0	0,051	0	14	1
16	π	0,2	0	$\pi/2$	6	2
17	π	0	0,262	$-\pi/2$	16	1
18	0	0	0,444	0	17	1
19	π	0,2	0	$-\pi/2$	6	3
20	π	0	0,262	$-\pi/2$	19	1
21	0	0	0,444	0	20	1

Таблица 2. Значения модифицированных параметров Д-Х для вспомогательных СК ИМ робота

№ СК	θ , рад	d , м	a , м	α , рад	$f(i)$	$ns(i)$
6,2	$\pi/2$	0	-0,349	π	6	2
6,3	$\pi/2$	0	-0,349	0	6	3
7,2	$\pi/2$	0	0,2	0	7	2

По древовидному графу (рис. 2), представляющему кинематическую структуру робота, определим матрицу достижимости $D(21 \times 21)$ звеньев ИМ робота, численные значения элементов которой представлены в таблице 3.

Таблица 3. Численные значения элементов матрицы D

$D(21 \times 21) =$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Первые шесть столбцов матрицы $D(21 \times 21)$ соответствуют звеньям фиктивной кинематической цепи, соединяющий корпус робота с неподвижной в абсолютной системе фиктивной стойкой. Единичные значения элементов первых шести столбцов указывают на то, что из этих звеньев достижимы все остальные звенья кинематической цепи робота. Седьмой столбец матрицы $D(21 \times 21)$ соответствует звену 7, из которого достижимы звенья 8÷15. Восьмой столбец соответствует звену 8, из которого достижимы только звенья 9÷11. Звено 11 (11 столбец) достижимо только из самого себя и т.д.

Таким образом, если традиционные параметры Д-Х θ_i , d_i , a_i , α_i дополнить параметрами $f(i)$, $ns(i)$, а также блочным вектором $\bar{z}$, диагональной матрицей σ и матрицей достижимости D , характеризующих особенности конкретной КС, то можно формализовать запись уравнений кинематики для ИМ робота с произвольной древовидной кинематической цепью.

Используя предложенный выше метод описания кинематики древовидного ИМ робота с помощью модифицированной СК Д-Х, запишем в блочно-матричном виде кинематические зависимости для всех звеньев ИМ [13, 14]. Используемые ниже обозначения величин в выражениях (5)÷(14) соответствуют принятым в работе [14]. Выражения для определения угловых скоростей 0W и угловых ускорений 0e звеньев представим в следующем виде:

$${}^0W = (D \cdot {}^0z^d \cdot \sigma) \dot{q}; \quad (5)$$

$${}^0e = (D \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \ddot{q} + D \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d \cdot {}^0\dot{z}). \quad (6)$$

Запишем выражения для определения скоростей 0V и ускорений ${}^0\dot{V}$ начал основных СК звеньев:

$${}^0V = \left(\Lambda^T({}^0I_D) {}^0z^d \cdot \sigma + D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma) \right) \dot{q}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} {}^0\dot{V} = & \left(\Lambda^T({}^0I_D) {}^0z^d \cdot \sigma + D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma) \right) \ddot{q} + \\ & + \left(\Lambda^T({}^0\dot{I}_D) {}^0z^d \cdot \sigma + \Lambda^T({}^0I_D) {}^0\dot{z}^d \cdot \sigma + D \cdot {}^0\dot{z}^d \cdot (E - \sigma) \right) \dot{q}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ускорения центров масс звеньев ИМ определим с помощью следующего выражения:

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{a}_{ц.м.} = & (D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0C_{fD}) {}^0z^d \cdot \sigma) \ddot{q} + \\ & + \Lambda^T({}^0C_{fD}) \Lambda^T({}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d) (D - E) {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q} + \\ & + \Lambda^T(\Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot \sigma \cdot {}^0\dot{q}^d \cdot {}^0\dot{z}^d + D + \Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot \\ & \cdot ((D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0z^d \cdot \dot{q}^d)) {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q} + \\ & + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T({}^0z^d) \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{q}^d (D - E) {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q}. \end{aligned} \quad (9)$$

Во все выражения (5÷9) входят определённые выше матрица достижимости D , блочный вектор z , определяющий последовательность ортов z СК, связанных со звеньями, и диагональная матрица σ , определяющая типы сочленений для звеньев ИМ (поступательные или вращательные). Верхний индекс «0» указывает на то, что все полученные выражения (5÷9) записаны в базовой СК «0».

Предложенный выше метод позволяет также записать в блочно-матричном виде динамические соотношения для всех звеньев ИМ робота. Схема приложения действующих между звеньями древовидного ИМ сил и моментов представлена на рис. 4.

Выражения, описывающие динамические соотношения, запишем при выполнении следующих условий [13, 14]:

- силы и моменты, действующие между звеньями ИМ робота, будем рассматривать через силы и моменты, действующие на звено со стороны его звена-отца;
- силы, действующие на звенья со стороны их звеньев-отцов, и внешние силы, действующие на звенья, приводятся к началам СК звеньев-отцов, соответствующих этим звеньям;
- моменты, действующие на звенья, включают в себя моменты от приведения этих сил к началам соответствующих СК.

Тогда блочно-матричные выражения для определения сил 0f и моментов 0n , действующих между звеньями ИМ, запишутся в следующем виде:

$${}^0f = D^T \cdot m^d \cdot {}^0a \cdot D^T \cdot {}^0f_B; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} {}^0n = & -[\Lambda^T({}^0C_{fD})]^T \cdot m^d \cdot {}^0a + D^T \cdot {}^0J_C^d \cdot {}^0e + D^T \cdot \Lambda({}^0W^d) \cdot {}^0J_C^d \cdot \\ & \cdot {}^0W - (D^T - E) \cdot \Lambda({}^0s^d) \cdot D^T \cdot {}^0f_B - D^T \cdot {}^0n_B - D^T \cdot \Lambda({}^0t^d) \cdot {}^0f_B; \end{aligned} \quad (11)$$

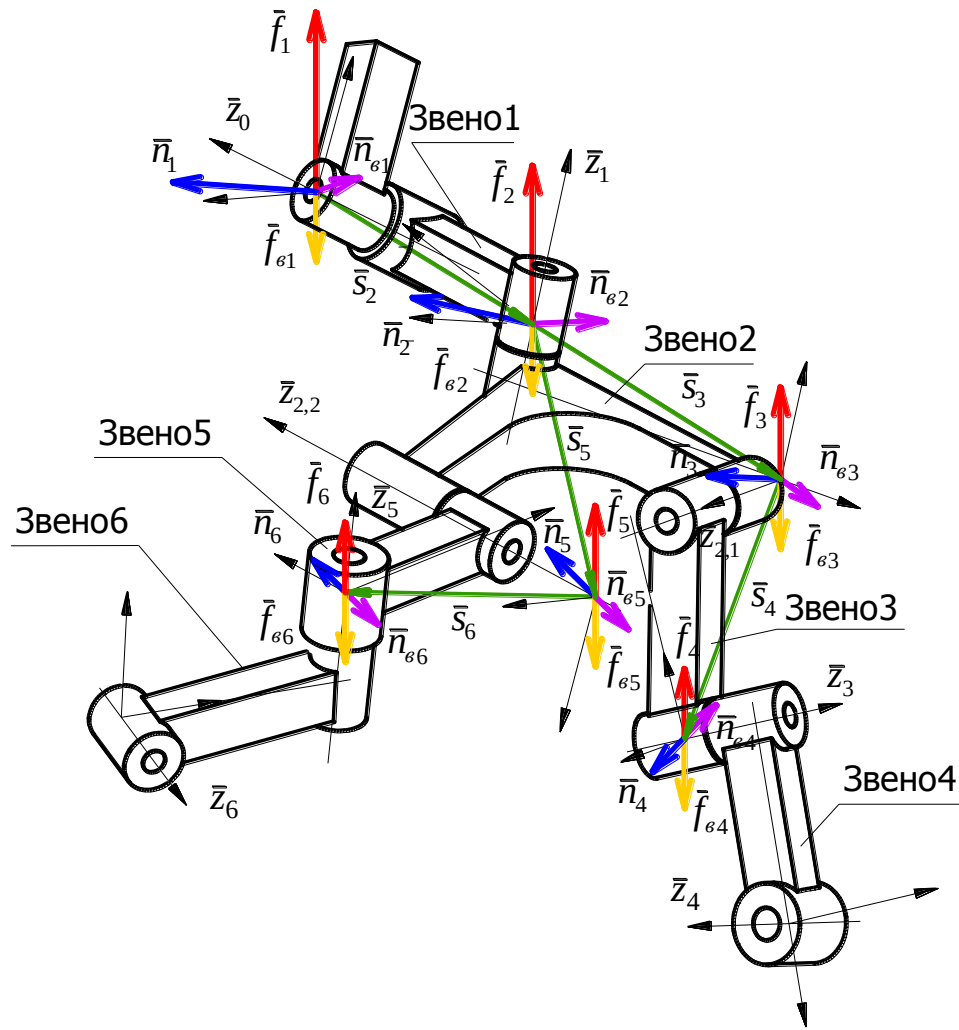


Рис. 4. Силы и моменты, действующие между звеньями древовидного ИМ робота

Выражения для определения сил и моментов, развиваемых приводами ИМ робота, получим при проецировании вышеопределённых сил ${}^0\bar{f}$ и моментов ${}^0\bar{n}$ взаимодействия звеньев между собой, на оси z СК, соответствующих сочленениям, связывающим эти звенья с их звеньями-отцами.

$$\begin{aligned}
 \tau = & \sigma \cdot ({}^0z^d)^T \cdot \left[-\left(\Lambda({}^0C_{fD}) \right)^T \cdot m^d \cdot {}^0a + D^T \cdot {}^0J_C^d \cdot {}^0e + \right. \\
 & + D^T \cdot \Lambda({}^0W^d) \cdot {}^0J_C^d \cdot {}^0W - \left((D^T - E) \cdot \Lambda({}^0s^d) \cdot D^T + \right. \\
 & \left. + D^T \cdot \Lambda({}^0t^d) \cdot {}^0f_B - D^T \cdot {}^0n_B \right] + \\
 & + (E - \sigma) \cdot ({}^0z^d)^T \cdot (D^T \cdot m^d \cdot {}^0a - D^T \cdot {}^0f_B).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Если в выражении (12) для усилий, развиваемых приводам, выразить скорости и ускорения через обобщённые координаты q и их производные и сгруппировать слагаемые

при абсолютных скоростях и ускорениях, то получим следующее уравнение динамики ИМ робота, имеющего древовидную кинематическую структуру:

$$A(q) \cdot \ddot{q} + B(q, \dot{q}) - C(q) \cdot {}^0\bar{f}_B - H(q) \cdot {}^0\bar{n}_B = \tau, \quad (13)$$

где:

$$\begin{aligned} A(q) &= \sigma \cdot ({}^0z^d)^T \cdot \left(-\left(\Lambda({}^0C_{fD}) \right)^T \cdot m^d \cdot (D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot \right. \\ &\quad \cdot {}^0z^d \cdot \sigma) + D^T \cdot {}^0J_C^d \cdot D \cdot {}^0z^d \cdot \\ &\quad \cdot \sigma) + (E - \sigma) \cdot ({}^0z^d)^T \cdot D^T \cdot m^d \cdot (D \cdot {}^0z^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot {}^0z^d \cdot \sigma); \\ B(q, \dot{q}) &= \sigma \cdot ({}^0z^d)^T \cdot \left\{ -\left(\Lambda({}^0C_{fD}) \right)^T \cdot m^d \cdot [\Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \Lambda^T({}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d) \cdot (D - E) + \\ &\quad + \Lambda^T(\Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d \cdot {}^0z^d \cdot D + \Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot ((D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0z^d \cdot \dot{q}^d)^d) + \\ &\quad + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T({}^0z^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{q}^d) \cdot (D - E)] + D^T \cdot {}^0J_C^d \cdot D \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d \cdot \Lambda^T \cdot \\ &\quad \cdot ({}^0z^d) \cdot (D - E) + \\ &\quad + D^T \cdot \Lambda(D \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d) \cdot {}^0J_C^d \cdot D \} \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q} + (E - \sigma) \cdot \\ &\quad \cdot ({}^0z^d)^T \cdot D^T \cdot m^d \cdot [\Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot \Lambda^T({}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d) \cdot \\ &\quad \cdot (D - E) + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T({}^0z^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{q}^d) \cdot (D - E) + \\ &\quad + \Lambda^T(\Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d \cdot {}^0z^d \cdot D + \\ &\quad + \Lambda^T(\Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot \sigma \cdot \dot{q}^d \cdot {}^0z^d \cdot D + \Lambda^T({}^0C_{fD}) \cdot \\ &\quad \cdot ((D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0z^d \cdot \dot{q}^d)^d)] \cdot {}^0z^d \cdot \sigma \cdot \dot{q}; \\ C(q) &= \sigma \cdot ({}^0z^d)^T \cdot ((D^T - E) \cdot \Lambda({}^0s^d) \cdot D^T + D^T \cdot \Lambda({}^0t^d)) + \\ &\quad + (E - \sigma) \cdot ({}^0z^d)^T \cdot D^T; \\ H(q) &= \sigma \cdot ({}^0z^d)^T \cdot D^T; \end{aligned}$$

${}^0\bar{f}_B = ({}^0\bar{f}_{B1}, {}^0\bar{f}_{B2}, \dots, {}^0\bar{f}_{BN})^T$ и ${}^0\bar{n}_B = ({}^0\bar{n}_{B1}, {}^0\bar{n}_{B2}, \dots, {}^0\bar{n}_{BN})$ – блочные матрицы внешних сил и моментов, действующих на звенья древовидного ИМ робота.

Данное уравнение справедливо при выполнении следующих допущений:

- звенья ИМ абсолютно жёсткие;
- связи в сочленениях – голономные;
- кинематические цепи, составляющие древовидную кинематическую структуру, – разомкнутые.

Полученное уравнение (13), в основе формирования которого лежит модифицированная СК Д-Х, является универсальным (при указанных допущениях) для

целого класса ИМ роботов с древовидными кинематическими структурами, определяемыми матрицами достижимости D , блочными векторами $\bar{z}$ и диагональными матрицами σ .

4. Обсуждение

В работе [15] представлены результаты исследования кинематики и динамики древовидного ИМ робота-собаки. Для ИМ, имеющего 22 степени подвижности, получены численные значения модифицированных параметров Д-Х, матрицы достижимости D , блочный вектор $\bar{z}$ и диагональная матрица σ . На основе уравнения (13) с использованием специально разработанной в среде MATLAB программы [16] определены значения моментов и мощностей в степенях подвижности робота-собаки.

Работа [17] посвящена синтезу КС и исследованию динамики древовидного ИМ робота-краба, имеющего 62 степени подвижности. Использование модифицированной СК Д-Х позволяет построить математическую модель кинематики и динамики его ИМ. Разработанная 3-D модель ИМ робота-краба позволила определить массо-инерционные характеристики элементов его конструкции. С использованием программы [16] получены численные значения элементов матриц, входящих в уравнение (13), а также значения моментов и мощностей в степенях подвижности робота-краба.

В работе [18] рассмотрен пример использования модифицированной СК Д-Х при формировании математической модели кинематики и динамики древовидного ИМ антропоморфного робота, имеющего 114 степеней подвижности. Для уравнения (13) получены значения элементов входящих в него матриц $A(q)$, $B(q, \dot{q})$, $C(q)$, $H(q)$, а также вычислены с помощью программы [16] значения моментов и мощностей в степенях подвижности ИМ робота. Полученные результаты рекомендованы для использования при создании современных образцов антропоморфных шагающих роботов.

В работах [19, 20] показано, что модифицированная СК Д-Х является эффективным средством формирования математических моделей ИМ роботов, имеющих линейную разомкнутую кинематическую цепь, являющуюся частным случаем древовидной.

В этом случае кинематическую схему можно представить в виде ориентированного графа, не имеющего циклов. Вершины графа соединены последовательно, так как любая из них будет иметь не более двух смежных вершин.

При этом матрица достижимости D звеньев ИМ робота вырождается в нижнюю треугольную единичную матрицу порядка N , где N – число степеней подвижности ИМ робота.

Если на схват манипулятора или на какое-либо звено ИМ наложены внешние связи, то уравнение динамики ИМ запишется в следующем виде [14]:

$$\begin{pmatrix} A(q) & -J_{VR}^T(q) \\ J_t(q) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ {}^0R^f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(q, \dot{q}) \\ P(q) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L(q) \cdot {}^0F_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Матричные коэффициенты $A(q)$, $B(q, \dot{q})$, $J_t(q)$, $J_{VR}^T(q)$, ${}^0R^f$, $P(q)$, $L(q)$, 0F_B определяются в соответствии с [14].

Уравнение (14) позволяет определить движение ИМ робота с произвольной древовидной КС при наложенных на него кинематических связях и вычислить значения возникающих при этом сил и моментов реакций связей.

В работе [21] показана эффективность применения предлагаемой СК для построения уравнений кинематики и динамики древовидного ИМ активного экзоскелета. Использование уравнения (14) позволило определить не только значения мощности приводов в степенях подвижности его ИМ при наложенных на него кинематических связях, но и вычислить силы и моменты реакции этих связей, возникающие при его взаимодействии с опорной поверхностью шагания. При этом эффективным средством расчёта и исследования является специально разработанная в среде MATLAB программа [22].

В исследовании [23] описан метод синтеза КС древовидных ИМ ШР по фотографическим изображениям скелета его биологического прототипа, в основе которого лежит применение алгоритма восстановления КС [24-26] и модифицированной СК Д-Х. В качестве примера использования метода приведены результаты синтеза КС ИМ робота-стегозабра.

Таким образом, рассмотренные выше результаты исследований позволяют сделать заключение, что предложенная модифицированная СК Д-Х обладает определённой общностью и может быть использована при формировании математических моделей кинематики и динамики ИМ роботов с произвольной КС.

Выводы

Создание современных шагающих роботов сдерживается отсутствием эффективных методов формирования математических моделей их ИМ, имеющих древовидные КС.

При построении математических моделей кинематики и динамики таких ИМ предлагается использовать модифицированную СК Д-Х. Её использование даёт разработчику чёткий алгоритм построения математических моделей ИМ роботов с произвольной древовидной КС.

Полученные таким образом математические модели и разработанное для их исследования программное обеспечение могут быть использованы при создании перспективных образцов шагающих роботов.

Список литературы

1. Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С. Системы управления манипуляционных роботов / под ред. Е.П. Попова. М.: Наука, 1978. 416 с.
2. Воробьев Е.И. и др. Механика промышленных роботов: учеб. пособие для вузов / под ред. К.В. Фролова и Е.И. Воробьева. М.: Высшая школа, 1988.

3. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника: пер. с англ. / под ред. В.Г. Градецкого. М.: Мир, 1989. 624 с.
4. Шахинпур М. Курс робототехники: пер. с англ. М.: Изд-во Мир, 1990. 528 с.
5. Крутько П.Д. Управление исполнительными системами роботов. М.: Наука, 1991. 336 с.
6. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 480 с.
7. Лесков А.Г., Ющенко А.С. Моделирование и анализ робототехнических систем. М.: Машиностроение, 1992. 80 с.
8. Лесков А.Г. Теоретические основы моделирования и анализа динамики манипуляционных роботов, их приложение к задачам проектирования и подготовки операторов: дис. ... докт. техн. наук. М., МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 329 с.
9. Лесков А.Г., Бажинова К.В., Морошкин С.Д., Феоктистова Е.В. Построение моделей кинематики исполнительных механизмов манипуляционных роботов с использованием блочных матриц // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 9. DOI: [10.18698/2308-6033-2013-9-954](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-9-954)
10. Denavit J., Hartenberg R.S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices// Journal of Applied Mechanics. 1955. Vol. 22. P. 215-221.
11. Ковальчук А.К. Разработка математической модели исполнительного механизма роботизированного манекена // Научный Вестник МГТУ ГА. 2011. № 168 (6). С. 103-109.
12. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. М.: Изд-во Бином, 2006. 319 с.
13. Ковальчук А.К., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е. Математическое описание кинематики и динамики исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Известия вузов. Машиностроение. 2008. № 11. С.13-25.
14. Ковальчук А.К., Кулаков Б.Б., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е., Яроц В.В. Основы теории исполнительных механизмов шагающих роботов. М.: Изд-во Рудомино, 2010. 170 с.
15. Ковальчук А.К. Выбор кинематической структуры и исследование древовидного исполнительного механизма робота-собаки // Известия вузов. Машиностроение. 2011. № 8. С. 65-73. DOI: [10.18698/0536-1044-2011-8-65-73](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2011-8-65-73)
16. Ковальчук А.К., Каргинов Л.А., Кулаков Б.Б., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е., Яроц В.В. Программа моделирования древовидных исполнительных механизмов шагающих роботов: свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2012610398. 2012.
17. Ковальчук А.К. Выбор кинематической структуры и исследование динамики древовидного исполнительного механизма робота-краба // Известия вузов. Машиностроение. 2013. № 7. С. 73-79. DOI: [10.18698/0536-1044-2013-7-73-79](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2013-7-73-79)
18. Ковальчук А.К. Проектирование исполнительного механизма антропоморфного шагающего робота // Естественные и технические науки. 2014. № 2 (70). С. 162-166.

19. Ковальчук А.К. Расчёт мощности приводов робота с учётом динамики его исполнительного механизма // Естественные и технические науки. 2014. № 1 (69). С. 128-131.
20. Kovalchuk A.K. Designing Drives of a Medical Robot Actuator // Life Science Journal. 2014. Vol. 11, no. 11s. P. 337-340.
21. Верейкин А.А., Ковальчук А.К., Каргинов Л.А. Исследование динамики исполнительного механизма экзоскелета нижних конечностей с учётом реакций опорной поверхности // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал. 2014. № 12. С. 256-278. DOI: [10.7463/1214.0745388](https://doi.org/10.7463/1214.0745388)
22. Ковальчук А.К. Каргинов Л.А., Кулаков Б.Б., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е., Яроц В.В., Верейкин А.А. Моделирование древовидных исполнительных механизмов шагающих роботов с учётом внешних наложенных связей: свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2014612547. 2014.
23. Ковальчук А.К., Каргинов Л.А., Ахметова Ф.Х., Устюжанин А.Ю., Секерин С.С., Верейкин А.А. Синтез кинематической схемы древовидного исполнительного механизма робота-стегозабра с использованием фотографических изображений его биологического прототипа // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал. 2015. № 5. С. 82-102. DOI: [10.7463/0515.0766349](https://doi.org/10.7463/0515.0766349)
24. Пупков К.А., Ковальчук А.К., Кулаков Б.Б. Использование биологических прототипов при построении кинематических схем современных шагающих роботов // Вестник РУДН. Сер. Инженерные исследования. 2009. № 4. С. 44-54.
25. Pupkov K.A., Kovalchuk A.K., Kulakov B.B. Usage of Biological Prototypes for Kinematical Scheme Construction of Modern Robots // Proc. of the 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing. 3-5 June 2009. Moscow, 2009. P. 1829-1834. (Preprint).
26. Ковальчук А.К. Использование биологического прототипа при проектировании древовидных исполнительных механизмов двуногих шагающих роботов // Известия вузов. Машиностроение. 2011. № 9. С. 49-56.

Modified Denavit-Hartenberg Coordinate System for Robot Actuating Mechanisms with Tree-like Kinematic Structure

A.K. Kovalchuk^{1,*}

[*aleksandr.alexkov@yandex.ru](mailto:aleksandr.alexkov@yandex.ru)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: tree-like actuating mechanism, coordinate system of Denavit-Hartenberg, kinematic scheme of robot, robot actuating mechanism designing, robot kinematic and dynamic equations

To build mathematical models of actuating mechanisms (AM) of robots with linear kinematic structure, J. Denavit and R.S. Hartenberg (D-H) proposed to use a special coordinate system (CS). It uses a matrix of homogeneous transformation and provides clear and unambiguous rules to build mathematical models of robot actuating mechanisms. Developers widely use this approach because of its clarity and binding to AM design parameters. However, its use to describe robots the AM of which has a spatial tree-like kinematic structure revealed the certain hardship.

The paper offers a method for building a modified D-H coordinate system. Its using allows to create mathematical models of robot AM, having spatial kinematic structure. The method is based on using both the graphs theory and the known D-H coordinate system jointly.

The paper defines concepts of main and auxiliary coordinate systems and the order of their location on the tree-like AM. The values of the modified parameters of D-H are obtained. There its known parameters $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ are complemented by parameters $f(i)$, which determine the father number of the link i , and $ns(i)$, that shows, which son in succession is the link i for the link $f(i)$. An algorithm to form the matrix of reachability and the graph of reachability of the tree-like AM is proposed.

It is proved that the use of the modified D-H coordinate system allows us to record in a block-matrix form both kinematic and dynamic equations for all links of the tree-like AM of robot. The use of these equations together with D'Alembert principle allowed us to write the equations of the tree-like AM dynamics of robot in the form traditional for recording the AM dynamics equations with open kinematic structure.

Via examples of mathematically described kinematics and dynamics of tree-like AM of specific robots (robot-dog, robot-crab, anthropomorphic walking robot, etc.) the paper shows efficiency of modified D-H coordinate system

Obtained research results of the medical robot AM have shown that the proposed model can be successfully used to describe robots with linear open kinematic structure, which is a special case of tree-like kinematic one.

References

1. Medvedev V.S., Leskov A.G., Jushhenko A.S. *Sistemy upravleniya manipuljacionnykh robotov* [Robotic Manipulators Control Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 416 p. (in Russian).
2. Vorob'ev E.I., et al. *Mekhanika promyshlennykh robotov* [Mechanics of industrial robots]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1988. (in Russian).
3. Fu K., Gonzalez R., Lee K. *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*. McGraw-Hill Book Company, 1987. (Russ. ed.: Fu K., Gonzalez R., Lee K. *Robototekhnika*. Moscow, Mir Publ., 1989. 624 p.).
4. Shahinpoor M. *A Robot Engineering Textbook*. New York, HarperCollins Publishers, 1987. (Russ. ed.: Shahinpoor M. *Kurs robototekhniki*. Moscow, Mir Publ., 1990. 528 p.).
5. Krut'ko P.D. *Upravlenie ispolnitelnymi sistemami robotov* [Control of Robots Actuating System]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 336 p. (in Russian).
6. Zenkevich S.L., Iushchenko A.S. *Osnovy upravleniia manipuliatsionnymi robotami* [Bases of controlling of manipulators]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004. 480 p.
7. Leskov A.G., Jushhenko A.S. *Modelirovanie i analiz robototekhnicheskikh sistem* [Simulation and Analysis of Robotic Systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 80 p. (in Russian).
8. Leskov A.G. *Teoreticheskie osnovy modelirovaniya i analiza dinamiki manipulyatsionnykh robotov, ikh prilozhenie k zadacham proektirovaniya i podgotovki operatorov. Dokt. diss.* [Theoretical Bases of Simulating and Analysis of the Dynamics of Manipulation Robots, Their Application to Problems of Designing and Operator Training. Dr. diss.]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2002. 329 p. (in Russian, unpublished).
9. Leskov A.G., Bazhinova K.V., Moroshkin S.D., Feoktistova E.V. Modeling of trobotic arms kinematics by means of block matrixes. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 9. DOI: [10.18698/2308-6033-2013-9-954](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-9-954) (in Russian).
10. Denavit J., Hartenberg R.S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*, 1955, vol. 22, pp. 215-221.
11. Koval'chuk A.K. Development of Mathematical Model of the Robotic Mannequin Actuating Mechanism. *Nauchnyi Vestnik MGTU GA = Scientific Bulletin of Moscow State Technical University of Civil Aviation*, 2011, no. 6 (168), pp. 103-109. (in Russian).
12. Alekseev V.E., Talanov V.A. *Grafy i algoritmy. Struktury dannykh. Modeli vychisleniy* [Graphs and Algorithms. The Structure of the Data. Computation Models]. Moscow, Binom Publ., 2006. 319 p. (in Russian).

13. Kovalchuk A.K., Kulakov D.B., Semenov S.E. The Mathematical Description of the Kinematics and Dynamics of the Actuating Mechanisms of Robots With Tree-like Kinematic Structure. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie = Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2008, no. 11, pp. 13-25. (in Russian).
14. Kovalchuk A.K., Kulakov B.B., Kulakov D.B., Semenov S.E., Yarots V.V. *Osnovi teorii ispolnitel'nykh mekhanizmov shagayushikh robotov* [Bases of the Theory of Walking Robots Actuating Mechanisms]. Moscow, Rudomino Publ., 2010. 170 p. (in Russian).
15. Kovalchuk A.K. Choice of a kinematic structure and research of a “Robot-dog” tree-like actuator. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie = Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2011, no. 8, pp. 65-73. DOI: [10.18698/0536-1044-2011-8-65-73](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2011-8-65-73) (in Russian).
16. Kovalchuk A.K., Karginov L.A., Kulakov B.B., Kulakov D.B., Semenov S.E., Yarots V.V. *Programma modelirovaniya drevovidnykh ispolnitel'nykh mekhanizmov shagayushchikh robotov* [Simulation program of tree-like actuators of walking robots]. Certificate of state registration of computer program, no. 2012610398 RF, 2012. (in Russian).
17. Kovalchuk A.K. Choosing the Kinematic Structure and Dynamics Study of Tree-like Robot Crab Actuator. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie = Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2013, no. 7, pp. 73-79. DOI: [10.18698/0536-1044-2013-7-73-79](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2013-7-73-79) (in Russian).
18. Kovalchuk A.K. Design of Actuator of Anthropomorphic Walking Robot. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Natural and technical sciences*, 2014, no. 2, pp. 162-166. (in Russian).
19. Kovalchuk A.K. Calculation of capacity drives for robot based on dynamics of its executive machinery. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Natural and technical sciences*, 2014, no. 1, pp. 128-131. (in Russian).
20. Kovalchuk A.K. Designing Drives of a Medical Robot Actuator. *Life Science Journal*, 2014, vol. 11, no. 11s, pp. 337-340.
21. Vereikin A.A., Kovalchuk A.K., Karginov L.A. The Lower Extremities Exoskeleton Actuator Dynamics Research Taking into Account Support Reaction. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 12, pp. 256-278. DOI: [10.7463/1214.0745388](https://doi.org/10.7463/1214.0745388) (in Russian).
22. Kovalchuk A.K., Karginov L.A., Kulakov B.B., Kulakov D.B., Semenov S.E., Yarots V.V., Vereikin A.A. *Modelirovanie drevovidnykh ispolnitel'nykh mekhanizmov shagayushchikh robotov s uchetom vneshnikh nalozhennikh svyazey* [Simulation of Walking Robots Tree-like Actuating Mechanisms, Taking into Account Imposed External Relations]. Certificate of state registration of computer program, no. 2014612547 RF, 2014. (in Russian).
23. Kovalchuk A.K., Karginov L.A., Akhmetova F. Kh., Ustjuzhanin A.Yu., Sekerin S.S., Vereikin A.A. Tree-like Robot-stegosaurus Actuator Kinematic Scheme Synthesis Using Photographic Images of its Biological Prototype Skeleton *Nauka i obrazovanie MGTU im.*

N.E. Bauman = *Science and Education of the Bauman MSTU*, 2015, no. 5, pp. 82-102.
DOI: [10.7463/0515.0766349](https://doi.org/10.7463/0515.0766349) (in Russian).

24. Pupkov K.A., Kulakov B.B., Kovalchuk A.K. Usage of biological prototypes for kinematical scheme construction of modern walking robots. *Vestnik RUDN. Ser. Inzhenernie issledovaniya* = *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Engineering Researches*, 2009, no. 4, pp. 44-54. (in Russian).
25. Pupkov K.A., Kovalchuk A.K., Kulakov B.B. Usage of Biological Prototypes for Kinematical Scheme Construction of Modern Robots. *Proc. of the 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing*. 3-5 June, 2009. Moscow, 2009, pp. 1829-1834. (unpublished).
26. Kovalchuk A.K. Use of a biological prototype when designing tree-like actuators of bipedal walking robots. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie* = *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2011, no. 9, pp. 49-56. (in Russian).