

УДК 532.6

Асимптотический закон формы стекающей жидкой пленки при частичном смачивании

Полянский А. Р.^{1,*}, Романов А. С.¹,

[*korolev100-rd@mail.ru](mailto:korolev100-rd@mail.ru)

Семиколенов А. В.¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается метод непротиворечивого описания динамического угла смачивания при стекании частично смачивающей жидкости по твердой поверхности с учетом дополнительного химического потенциала (расклинивающего давления) для частиц жидкости в тонких слоях жидкости вблизи линии трехфазного контакта. Применение развиваемой теории продемонстрировано на примере расчета формы поверхности жидкости при различных скоростях движения. По результатам численных экспериментов получены приближенные соотношения для отступающей трехфазной границы.

Ключевые слова: частично смачивающая жидкость, тонкая пленка, поверхностное натяжение, расклинивающее давление, трехфазный контакт, краевой угол

Введение

Учет поверхностного натяжения формально не представляет затруднений в рамках гидродинамики капельной жидкости. С другой стороны, при наличии поверхностного натяжения попытки выполнить условие Юнга для краевого угла смачивания наталкиваются на принципиально непреодолимые трудности. Так, например, задача о смачивании при растекании капельной жидкости вдоль твердой поверхности, вообще говоря, не имеет решения в рамках стандартной гидродинамической теории вязкой жидкости [1], если одновременно действует поверхностное натяжение и требуется выполнение условия Юнга при частичном смачивании. Возникающие проблемы удастся решить, если вместо условия Юнга, которое задается на линии трехфазного контакта, переформулировать задачу с учетом дополнительного химического потенциала (или, по-другому, расклинивающего давления), которым обладают частицы жидкости в тонких слоях жидкости вблизи линии трехфазного контакта. Очевидно, что именно расклинивающее давление ответственно за форму свободной поверхности вблизи линии трехфазного контакта. (Термин «расклинивающее давление» в настоящее время является общепринятым и был впервые введен Б. В. Дерягиным [2], [3].) В рамках такого подхода

удается в замкнутом непротиворечивом виде сформулировать соответствующую задачу математической физики [4]. Уникальная зависимость расклинивающего давления от толщины жидкой пленки и угла наклона свободной поверхности приводит, с одной стороны, к вырождению уравнений гидродинамики на линии трехфазного контакта и, с другой стороны, к выполнению условия Юнга. Эффективность такого подхода продемонстрирована авторами на нескольких примерах (см., например, [5], [6]).

Несомненный интерес для анализа результатов экспериментов и технических приложений представляет формулирование в рамках этой парадигмы некоторых приближенных соотношений, связывающих скорость перемещения трехфазной границы с «динамическим» углом смачивания, зависящим от скорости перемещения линии трехфазного контакта. Так, например, в [7] рассматривается задача о безнапорном заполнении тонкого капилляра частично смачивающей жидкостью. Для замыкания системы уравнений в [7] используется полученное авторами обобщение известного асимптотического закона для динамического угла смачивания Таннера [8].

В настоящей работе численно определяется форма свободной поверхности жидкости вблизи линии трехфазного контакта при стекании жидкости со смоченной поверхности. По результатам численных экспериментов получены аналогичные приближенные соотношения для отступающей трехфазной границы.

Постановка задачи

В приближении теории смазки форма свободной поверхности одномерной жидкой пленки, растекающейся вдоль гладкой твердой поверхности при частичном смачивании, описывается уравнением [4] – [6]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_\alpha(h)}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

где $h(x, t)$ - толщина слоя жидкости над твердой поверхностью, x, t - координата вдоль которой растекается жидкость (см. рис. 1) и время соответственно, μ - динамическая вязкость, σ - поверхностное натяжение, функция $\Phi_\alpha(h)$ определяет зависимость расклинивающего давления (или, с точностью до знака, химического потенциала молекул жидкости, рассчитанного на единицу объема) по формуле

$$\Phi_\alpha(h) = \frac{\pi}{12} h^{-3} \left[(n_L^2 a_{LL} - n_L n_S a_{LS}) G(\alpha) - n_L n_S a_{LS} G(\pi - \alpha) \right]. \quad (2)$$

Здесь функция $G(\alpha) = 1 + \cos^3 \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha$, n_L, n_S - концентрации молекул жидкости и твердого тела соответственно, a_{LL}, a_{LS} - постоянные взаимодействия молекул жидкость – жидкость и жидкость – твердое тело по Ван-дер-Ваальсу - Лондону соответственно. Все подробности вывода соотношений (1) и (2) приведены в [4].

Из соотношения (2) следует, что если $a_{LL} n_L^2 > n_L n_S a_{LS}$, то всегда существует некоторое значение угла $\alpha = \alpha_0$, $\pi > \alpha > 0$, такое, что $\Phi_\alpha(h) = 0$, $\alpha = \alpha_0$. Поэтому в рамках

развиваемой теории при равновесии обязательно выполняется равенство $\alpha = \alpha_0$ при $h = 0$. Тем самым угол α_0 отождествляется с равновесным углом смачивания $\alpha_0 = \alpha_e$ для частично смачивающей жидкости.

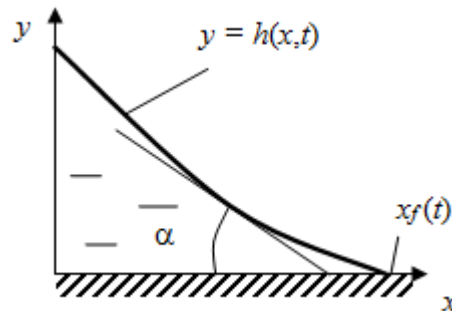


Рис. 1. Задание формы свободной поверхности жидкости

Указанное выше неравенство $A_{LL} > A_{LS}$ (где $A_{LL} = n_L^2 a_{LL}$, $A_{LS} = n_L n_S a_{LS}$ – соответствующие постоянные Гамакера) физически означает, что объемная плотность энергии взаимодействия молекул жидкости между собой больше чем с молекулами твердой подложки. Если же $A_{LS} > A_{LL}$, то жидкость полностью смачивает твердую поверхность и никакого равновесного краевого угла смачивания при $h = 0$ не существует. Интересно также отметить, что $\alpha_e = 0$ при равенстве $A_{LL} = A_{LS}$, но ни при каких значениях постоянных Гамакера невозможно значение $\alpha_e = \pi$. Для этого необходимо, чтобы притяжение между молекулами сменилось отталкиванием, что невозможно в рамках данной теории.

Выражение (2) для малых углов наклона свободной поверхности упрощается:

$$\Phi_\alpha(h) = \frac{\pi}{48} A_{LL} h^{-3} \left[\frac{16}{3} (1 - \beta) - \alpha^4 \right], \quad \beta = \frac{A_{LS}}{A_{LL}}, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (3)$$

Соответственно этому для малых равновесных углов смачивания получаем асимптотическую формулу:

$$\alpha_e = \left[\frac{16}{3} (1 - \beta) \right]^{\frac{1}{4}}, \quad \beta \rightarrow 1 - 0.$$

Уравнение свободной поверхности (1) должно быть дополнено граничными условиями на трехфазной границе $x = x_f(t)$:

$$h = 0, \quad h^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \Phi_\alpha(h) \right) = 0, \quad (4)$$

первое из этих условий является очевидным, второе означает отсутствие расхода через линию трехфазного контакта.

Дальнейшее изучение движения жидкой пленки удобно провести в безразмерных переменных. При этом более определенно выясняется роль отдельных слагаемых в

соотношениях (1), (4). Выберем в качестве характерных величин: $L = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_l g}}$ - характерная длина (это так называемая капиллярная длина), ρ_l , g - плотность жидкости и ускорение свободного падения соответственно, $t_0 = \frac{3\mu L}{\sigma}$ - характерное время. Учтем также, что при малых углах наклона справедливо приближенное равенство (3). Тогда уравнение (1) и граничные условия (4) переписываются в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ w^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w + \frac{R}{w^3} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 - \alpha_e^4 \right) \right] \right\} = 0, \quad (5)$$

$$w = 0, \quad w^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w + \frac{R}{w^3} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 - \alpha_e^4 \right) \right] = 0 \quad \text{при } x = x_f(t). \quad (6)$$

Здесь для безразмерной координаты и безразмерного времени сохранены те же обозначения, как и для размерных координаты и времени, $w = \frac{h}{L}$ - безразмерная толщина жидкой пленки. Безразмерный критерий $R = \frac{\pi A_{LL}}{48 \sigma L^2}$ определяет относительную роль расклинивающего давления и поверхностного натяжения.

Для наглядности, для одного частного случая оценим характерные величины t_0 , L и безразмерного критерия R . Примем $n_L = 3,34 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, $T = 300 \text{ К}$, $A_{LL} = \frac{48}{\pi} \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$. Зададим также $\sigma = 0,062 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$, $\mu = 1,48 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\rho_l = 1,26 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, что примерно соответствует глицерину при температуре $T = 300 \text{ К}$. Тогда получим $L = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $t_0 = 0,2 \text{ с}$, $R = 3 \cdot 10^{-14}$. Как видно, для безразмерного критерия справедливо сильное неравенство $R \ll 1$. Поэтому роль соответствующих слагаемых в соотношениях (5) и (6) существенна только при $w \rightarrow 0$, то есть при достаточно малых толщинах жидкой пленки, в том числе вблизи линии трехфазного контакта $x \rightarrow x_f(t)$.

Более наглядно оценить значения толщины жидкой пленки, при которой необходим учет расклинивающего давления, непосредственно в размерных переменных. Относительная роль поверхностного натяжения и расклинивающего давления определяется равенством: $\frac{\sigma}{\rho_0} = \frac{A_{LL}}{h_0^3}$, где $\rho_0 > 0$ - характерное значение кривизны поверхности пленки, h_0 - некоторая «критическая» толщина пленки. При толщине пленки $h^3 < h_0^3$ расклинивающее давление должно учитываться наряду с поверхностным натяжением. Учитывая, что $\sigma = \frac{A_{LL}}{r_0^2}$ (смотри [4]), r_0 - радиус молекулы жидкости по Ван-дер-Ваальсу, критическую толщину пленки можно оценить в виде

$$h_0^3 = r_0^2 \cdot \rho_0.$$

Таким образом, получается оценка области толщин жидкой пленки, где учет расклинивающего давления целесообразен и возможен в рамках механики сплошной среды: $r_0^2 \cdot \rho_0 > h^3 \gg r_0^3$. Если, например, принять $r_0 = 10^{-10}$ м, $\rho_0 = 10^{-4}$ м, то критическая толщина пленки $h_0 = 10^{-8}$ м $\ll \rho_0$.

Экспериментальные данные свидетельствуют [2, 3], что молекулярная составляющая расклинивающего давления в некоторых случаях проявляется уже на толщинах порядка 10^{-7} м. Поэтому говорят, что молекулярная составляющая расклинивающего давления носит диффузный характер.

Пусть $\dot{x}_f(t) \equiv \frac{dx_f}{dt} \neq 0$, где $x_f(t)$ - функция, определяющая положение трехфазной границы (см. рис. 1), при этом $\dot{x}_f > 0$ соответствует натеканию жидкости на сухую твердую поверхность, а $\dot{x}_f < 0$ - стеканию жидкости (см. рис. 1). Найдем форму уравнения (5), асимптотически справедливую при $x \rightarrow x_f(t)$.

Для большей наглядности воспользуемся методом работы [9]. Дифференцируя первое из граничных условий по времени t , получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \dot{x}_f \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = x_f(t).$$

Предположим, что это соотношение, строго выполняющееся на линии трехфазного контакта, выполняется и в некоторой окрестности трехфазной границы жидкости $w \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_f(t)$. Заменим в нем производную по времени w'_t из уравнения (5) и проинтегрируем затем с учетом второго из условий (6). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее форму свободной поверхности жидкости в зависимости от скорости перемещения границы:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - \frac{\partial w}{\partial \eta} + R \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta^{-3} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^4 - \alpha_e^4 \right] \right\} + \frac{\dot{x}_f}{w^2} = 0. \quad (7)$$

Здесь координата $\eta = x_f(t) - x$ отсчитывается от границы внутрь жидкости (рис. 1). Важно отметить, что в случае бегущей волны, когда $\dot{x}_f = \text{const}$ и $w(x, t) = w(\eta)$, уравнение (7) является точным следствием соотношений (5), (6).

Учет расклинивающего давления в уравнении (7) является принципиально важным и полностью решает проблему с выполнением условия Юнга на движущейся линии трехфазного контакта [4].

Уравнение (7) достаточно полно может быть проанализировано только численно. Наибольший интерес представляет область вблизи линии трехфазного контакта, в которой роль расклинивающего давления существенна, то есть при $w \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow +0$. Для выяснения относительной роли слагаемых в уравнении (7) в указанной области перейдем к новым

переменным $w, \eta \rightarrow \xi = \frac{w}{\alpha_e \sqrt{R}}, \delta = \frac{\eta}{\sqrt{R}}$. Тогда уравнение (7), в пренебрежении величинами $O(R)$, преобразуется к виду

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial \delta^3} + \frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ \xi^{-3} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial \delta} \right)^4 - 1 \right] \right\} + \frac{\dot{\chi}_f^*}{\xi^2} = 0, \quad (8)$$

где обозначено $\dot{\chi}_f^* = \alpha_e^{-3} \dot{\chi}_f$. Следовательно, в рассматриваемой модели форма поверхности жидкой пленки вблизи линии трехфазного контакта описывается обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением (8), содержащим единственный параметр $\dot{\chi}_f^*$. Особенно укажем, что при этих толщинах роль силы тяжести пренебрежимо мала.

Уравнение (8) должно быть дополнено граничными условиями, одно из которых очевидно

$$\xi = 0, \delta = 0. \quad (9)$$

Второе является условием равновесия Юнга

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial \delta} \right| = 1, \delta = 0. \quad (10)$$

Порядок уравнения (8) можно понизить, вводя новую зависимую переменную $p = \left(\frac{d\xi}{d\delta} \right)^2 - 1$ и рассматривая толщину жидкой пленки ξ в качестве независимой переменной. В новых переменных уравнение (8) примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p(p+2)}{\xi^3} \right) + \dot{\chi}_f^* \left[\xi^2 \sqrt{1+p} \right]^{-1} = 0. \quad (11)$$

Из условий (9) и (10) следует граничное условие для уравнения (11)

$$p = 0, \xi = 0. \quad (12)$$

Достаточно полное исследование задачи (11), (12) можно провести только численно. Характер особой точки $p = \xi = 0$ уравнения (12) может быть исследован методом изоклин или аналитически методом соприкасающихся парабол [10]. Укажем лишь, что особая точка уравнения (11) $\xi = 0$ является седлом и существует единственная интегральная кривая входящая в эту точку, причем всегда $p = 0$ при $\xi = 0$, что гарантирует выполнение условие равновесия Юнга на линии трехфазного контакта.

Для натекания жидкости на твердую поверхность $\dot{\chi}_f > 0$ расчеты показали (подробности смотри, например, в [3], [11]), что функция $\xi(\delta)$ есть монотонно растущая функция, причем, если независимая переменная $\delta \rightarrow \infty$, то и зависимая переменная $\xi \rightarrow \infty$. При этом вблизи линии трехфазного контакта при растекании существует тонкий переходный слой, кривизна свободной поверхности жидкости в котором достигает значительной величины. Максимум кривизны приходится на $\xi \approx 1$. Соответственно, угол наклона поверхности пленки в пределах этого узкого переходного слоя испытывает

резкий скачек, величина которого зависит от скорости растекания $\dot{x}_f$. Для больших значений переменной ξ зависимость $p(\xi)$ близка к логарифмической.

Если скорость растекания $\dot{x}_f^* \rightarrow +0$, то на всем протяжении рассматриваемой области толщин жидкости $w \propto \sqrt{R}$, угол наклона ее свободной поверхности не отличается от равновесного угла смачивания α_e . То есть решение для движущейся линии трехфазного контакта, при ее остановке $\dot{x}_f \rightarrow 0$, переходит в решение для неподвижной линии трехфазного контакта $p \approx 0$.

Из-за наличия узкого переходного слоя вблизи линии трехфазного контакта при растекании жидкости $\dot{x}_f > 0$ значение угла наклона свободной поверхности при наблюдении может восприниматься как динамический, то есть зависящий от скорости растекания краевой угол. Этот угол можно также назвать «макроскопическим» углом смачивания α_d в отличие от реального «микроскопического» угла смачивания, который в рамках развиваемой теории всегда равен равновесному углу смачивания α_e . Для динамического угла смачивания в [3] получены оценки

$$\alpha_d^2 (\alpha_d^2 - \alpha_e^2) = \theta \cdot \dot{x}_f,$$

где неопределенная безразмерная величина $\theta = \text{const} > 0$ имеет порядок нескольких единиц. Из последнего соотношения следует, что если выполнено сильное неравенство $\alpha_d^2 \gg \alpha_e^2$, то $\alpha_d^3 \approx \theta \cdot \dot{x}_f$. Это соотношение совпадает с законом Таннера [4], хорошо подтвержденным экспериментально. Если же наоборот $\alpha_d^2 \rightarrow \alpha_e^2$, то получим $\alpha_d^2 = \alpha_e^2 + \dot{x}_f \frac{\theta}{2\alpha_e}$, что подтверждается и численным экспериментом [14] и общими физическими соображениями.

Основные результаты

Остановимся более подробно на случае стекания жидкости со смоченной твердой поверхности, то есть $\dot{x}_f < 0$. Полученные ранее оценки, справедливые для натекания жидкости на твердую поверхность $\dot{x}_f > 0$, здесь не имеют места. Поэтому удобнее вернуться к непосредственно уравнению (8). Зададим функцию, описывающую форму свободной поверхности вблизи линии трехфазного контакта, в виде асимптотического ряда

$$\xi \approx \sum_{i=1}^N a_i \delta^i. \quad (13)$$

После подстановки в уравнение (8), с учетом граничных условий (10), для нескольких первых коэффициентов ряда найдем

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{12} \dot{x}_f^*, a_5 = \frac{1}{40} \dot{x}_f^* \left(\frac{1}{12} \dot{x}_f^* - 1 \right), a_6 = - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \dot{x}_f^* \right) a_4, \quad (14)$$

Как видно, ряд (14) имеет единственный неопределенный коэффициент a_4 , каждому значению которого соответствует некоторый конкретный вид формы поверхности жидкой пленки вблизи линии трехфазного контакта. То есть при фиксированном значении скорости $\dot{\chi}_f^*$ асимптотическое представление (13), (14) определяет однопараметрическое семейство интегральных кривых для уравнения (8) с граничными условиями (9), (10). Указанное асимптотическое представление для заданной скорости $\dot{\chi}_f^* < 0$ и произвольно задаваемым коэффициентом a_4 использовалось для вычисления начального значения толщины жидкой пленки и всех необходимых производных при численном интегрировании уравнения (8).

Общие физические соображения о характере поведения интегральной кривой при больших значениях толщин жидкой пленки требуют ограничения на знак коэффициента $a_4 < 0$. Лишь при этом условии кривизна свободной поверхности жидкости оказывается в среднем по модулю убывающей по толщине жидкой пленки функцией.

На рис. 2 в качестве примера приведена форма свободной поверхности жидкости при фиксированном значении комплекса $\dot{\chi}_f^* < 0$. Как видно, форма отступающей жидкой пленки может быть достаточно сложной. Такие режимы движения жидкой пленки реально реализуются, по-видимому, при полном смачивании и отсутствии линии трехфазного контакта [12].

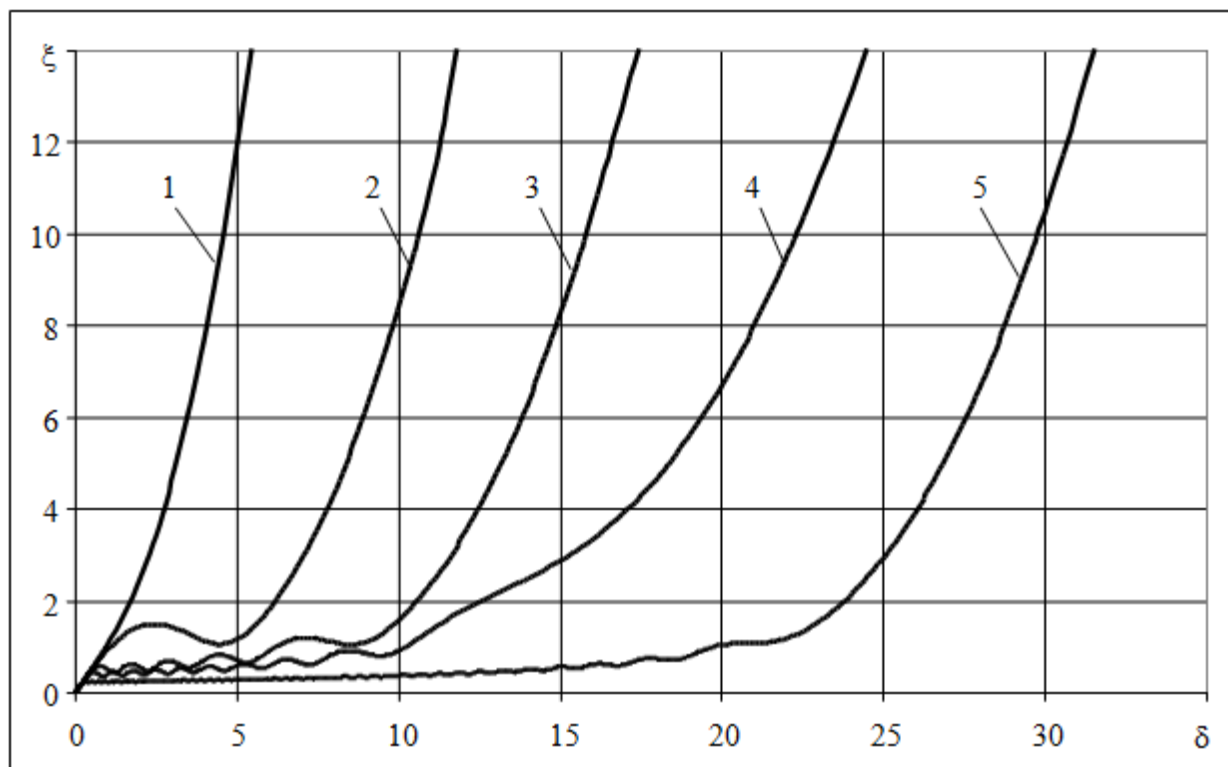


Рис. 2. Профили решений при $\dot{\chi}_f^* = -0,5$ для различных значений постоянной: 1 – $a_4=0.1$; 2 – $a_4= -0.05$;
3 – $a_4= -0.5$; 4 – $a_4= -1.0$; 5 – $a_4= -5.0$

Следуя общим принципам построения внутреннего асимптотического разложения [13], будем считать, что при удалении от линии трехфазного контакта кривизна поверхности должна стремиться к нулю. В частности, если комплекс $\dot{\chi}_f^* \rightarrow 0$, то решение уравнения должно переходить в стационарное решение: $\left| \frac{d\xi}{d\delta} \right| \rightarrow 1$ при всех значениях переменной ξ . Следовательно, в этом случае и постоянная $a_4 \rightarrow 0$. Иными словами, если считать неопределенную постоянную $a_4 = 0$, то это соответствует относительной малости кривизны свободной поверхности жидкой пленки на больших толщинах. Указанное предположение, безусловно, отвечает существу проблемы, если только не рассматриваются объекты экстремально малого размера. Несмотря на большое внимание к данной проблеме в литературе [14-25], в настоящее время она далека от окончательного решения.

В связи с этим, авторами было проведено большое количество вычислений формы свободной поверхности жидкости по уравнению (8) с граничными условиями (9), (10) явным методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. При малых значениях переменных независимой переменной $\delta \ll 1$ применялось асимптотическое представление (13), (14), где всегда считалось, что $a_4 = 0$. Расчеты были проведены в интервале изменения безразмерного комплекса $\dot{\chi}_f^* \in [-0,001, -100]$. Качественный вид формы свободной поверхности жидкости приведен на рис. 3.

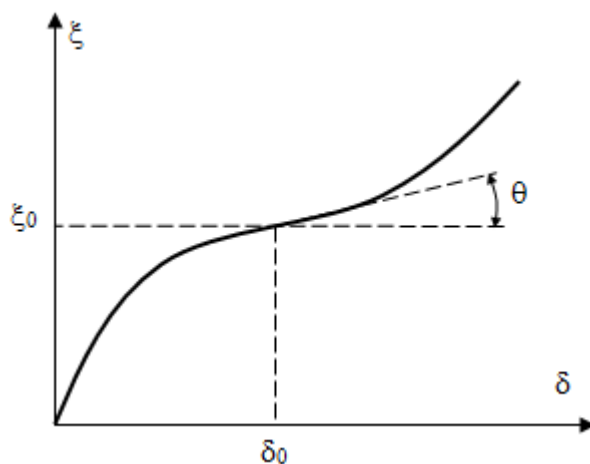


Рис. 3. Качественный вид формы свободной поверхности жидкости.

В этом случае толщина жидкой пленки всегда является монотонно растущей функцией расстояния от линии трехфазного контакта. Также всегда кривая формы поверхности содержит точку перегиба, где $\frac{d^2\xi}{d\delta^2} = 0$ и где, соответственно, $\left| \frac{d\xi}{d\delta} \right|$ достигает минимального значения. Значения переменных в точке перегиба на рис. 3 обозначены δ_0 и ξ_0 . При $\delta > \delta_0$ абсолютное значение кривизны поверхности монотонно убывает.

Естественно принять толщину жидкой пленки в точке перегиба ξ_0 за ее характерное значение при отступающей линии трехфазного контакта. Тогда угол наклона свободной поверхности (его минимальное значение) также следует считать характерным (см. рис. 3) и принять его в качестве «динамического» угла смачивания при стекании жидкости со смоченной поверхности.

По результатам численных расчетов были найдены приближенные формулы для зависимости характерных параметров жидкой пленки от единственного безразмерного параметра $\dot{x}_f^*$ во всей области его изменения. Для конкретных расчетов простым и удобным видом аппроксимации искомых зависимостей является степенная зависимость. Поэтому рассматривалась модель парной линейной регрессии, то есть предполагалась приближенная линейная связь между логарифмами безразмерных характерных величин и логарифмом безразмерного комплекса $\dot{x}_f^*$. Так было найдено

$$\ln \xi_0 = -0,8690 \ln |\dot{x}_f^*| + 0,7788, \quad \xi_0 = 0,9994 \cdot \delta_0 - 1,7292, \quad (15)$$

$$\ln(\operatorname{ctg} \theta - 1) = 0,5585 \ln(|\dot{x}_f^*|) - 1,0272. \quad (16)$$

Величина достоверности аппроксимации для формул (15) превосходит 0,99, а для формулы (16) превосходит 0,91.

Из общих соображений понятно, что формулы (15), (16) в реальной ситуации необходимо рассматривать лишь как достаточно грубые приближенные соотношения в силу грубости применяемой механической модели смачивания и большого количества факторов физико-химического происхождения, влияющих на движение жидкости вблизи линии трехфазного контакта. Поэтому для технических расчетов удобно переписать формулы (15) и (16) в степенном виде и разумно округлить входящие в формулы коэффициенты и показатели:

$$\xi_0 = 2,1789 |\dot{x}_f^*|^{-0,8690} \approx 2,2 |\dot{x}_f^*|^{-0,9}, \quad \delta_0 = \xi_0 + 1,7, \quad \operatorname{ctg} \theta = 1 + 0,3580 |\dot{x}_f^*|^{0,5585} \approx 1 + 0,36 |\dot{x}_f^*|^{0,56}. \quad (17)$$

Представляет интерес вернуться в формулах (17) к размерным переменным. Проводя соответствующие преобразования в формулах (17), для толщины слоя жидкости h_0 и

производной $\left| \frac{dh}{d(x_f - x)} \right|_0$ в точке перегиба получим формулы

$$h_0 = 0,82 \sqrt{RL} \alpha_e^{3,7} \left(\frac{\sigma}{\mu \dot{x}_f} \right)^{0,9}, \quad \left| \frac{dh}{d(x_f - x)} \right|_0 = \alpha_e \left[1 + 0,66 \left| \frac{\mu \dot{x}_f}{\alpha_e^3 \sigma} \right|^{0,56} \right]^{-1}. \quad (18)$$

Как видно, характерная толщина жидкой пленки $h_0 \sim \sqrt{R}, \sqrt{R} \ll 1$. Следовательно, h_0 имеет порядок расстояния действия расклинивающего давления 10^{-8} м . Этим размером во многих случаях можно пренебречь.

В отличие от h_0 , судя по второй формуле (18), зависимостью «динамического» угла смачивания от скорости стекания жидкости со смоченной поверхности можно пренебречь только при очень малых скоростях $\left| \frac{\mu \dot{x}_f}{\alpha_e^3 \sigma} \right|^{0,56} \ll 1$.

Заключение

В заключение отметим, что в рамках рассматриваемой парадигмы невозможно отказаться от выполнения условия Юнга на линии трехфазного контакта, так как это означало бы нарушение локального термодинамического равновесия. Несмотря на это, если пренебречь толщиной жидкой пленки, на которой определяется «динамический» угол смачивания, этот угол можно считать кажущимся углом смачивания, зависящим от скорости движения линии трехфазного контакта.

Таким образом, на основании проведенных численных экспериментов удалось получить асимптотические соотношения, позволяющие описать закон изменения кажущегося «динамического» угла смачивания от скорости стекания жидкости со смоченной поверхности в удобном для расчетов виде.

Список литературы

1. Пухначев В.В., Солонников В.А. К вопросу о динамическом краевом угле // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46, № 6. С. 961-971.
2. Дерягин Б.В., Чураев Н.В. Смачивающие пленки. М.: Наука, 1984. 160 с.
3. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Мулер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
4. Романов А.С. Об одном способе гидродинамического описания растекания частично смачивающей жидкости по плоской твердой поверхности // Коллоидный журнал. 1990. Т. 52, № 1. С. 93-99.
5. Романов А.С., Семиколенов А.В. Моделирование гидродинамики распада тонкой пленки частично смачивающей жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1995. Т. 35, № 5. С. 810-815.
6. Романов А.С., Семиколенов А.В. Моделирование гидродинамики растекания капли частично смачивающей жидкости под действием горизонтальной силы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39, № 7. С. 1205-1210.
7. Романов А.С., Семиколенов А.В. Безнапорное заполнение капилляра в асимптотической теории смачивания // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 4. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/699.htm> (дата обращения 01.10.2015).
8. Жен П.Ж. Смачивание: статика и динамика // Успехи физических наук. 1987. Т. 151, № 4. С. 619-681. DOI: [10.3367/UFNr.0151.198704c.0619](https://doi.org/10.3367/UFNr.0151.198704c.0619)

9. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 702-719. Samarskii A.A., Sobol' I.M. Examples of numerical calculation of temperature waves.
10. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // Успехи математических наук. 1941. Вып. 9. С. 212-253.
11. Павлов К.Б., Романов А.С., Шахорин А.П. Об одном способе феноменологического описания растекания частично смачивающей жидкости // Численные методы механики сплошной среды. 1986. Т. 17, № 3. С. 132 -138.
12. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Овчаренко Ф.Д. и др. Вода в дисперсных системах. М.: Химия, 1989. 288 с.
13. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с. [Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. New York: Academic Press, 1964.].
14. Radoev B., Stöckelhuber K.W., Tsekov R., Letocart P. Wetting film dynamics and stability // In: Colloid Stability and Application in Pharmacy. Vol. 3 / ed. by T.F. Tadros. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Germany, 2007. P. 151-172. DOI: [10.1002/9783527631117.ch6](https://doi.org/10.1002/9783527631117.ch6)
15. Dai B., Leal L.G., Redondo A. Disjoining pressure for nonuniform thin films // Physical Review E. 2008. Vol. 78. Art. no. 061602.
16. Saramago B. Thin liquid wetting films // Current Opinion in Colloid & Interface Science. 2010. Vol. 15, no. 5. P. 330-340. DOI: [10.1016/j.cocis.2010.05.005](https://doi.org/10.1016/j.cocis.2010.05.005)
17. Ren W., Hu D. Continuum models for the contact line problem // Physics of Fluids. 2010. Vol. 22, no. 10. Art. no. 102103. DOI: [10.1063/1.3501317](https://doi.org/10.1063/1.3501317)
18. Patra A., Bandyopadhyay D., Tomar G., Sharma A., Biswas G. Instability and dewetting of ultrathin solid viscoelastic films on homogeneous and heterogeneous substrates // Journal of Chemical Physics. 2011. Vol. 134, no. 6. Art. no. 064705. DOI: [10.1063/1.3554748](https://doi.org/10.1063/1.3554748)
19. Tsekov R., Toshev B.V. Capillary pressure of van der Waals liquid nanodrops // Коллоидный журнал. 2012. Т. 74, № 2. С. 286-288.
20. Colosqui C.E., Kavousanakis M.E., Papathanasiou A.G., Kevrekidis I.G. Mesoscopic model for microscale hydrodynamics and interfacial phenomena: slip, films, and contact-angle hysteresis // Physical Review E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2013. Vol. 87, no. 1. Art. no. 013302. DOI: [10.1103/PhysRevE.87.013302](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.013302)
21. Nikolov A., Wasan D. Wetting-dewetting films: the role of structural forces // Advances in Colloid and Interface Science. 2014. Vol. 206. P. 207-221. DOI: [10.1016/j.cis.2013.08.005](https://doi.org/10.1016/j.cis.2013.08.005)
22. Boinovich L., Emelyanko A. The prediction of wettability of curved surfaces on the basis of the isotherms of the disjoining pressure // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. 2011. Vol. 383, iss. 1-3. P. 10-16. DOI: [10.1016/j.colsurfa.2010.12.020](https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2010.12.020)

23. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving Contact Lines: Scales, Regimes, and Dynamical Transitions // Annual Review of Fluid Mechanics. 2013. Vol. 45. P. 269-292. DOI: [10.1146/annurev-fluid-011212-140734](https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-011212-140734)
24. Sibley D.N., Nold A., Savva N., Kalliadasis S. A comparison of slip, disjoining pressure, and interface formation models for contact line motion through asymptotic analysis of thin two-dimensional droplet spreading // Journal of Engineering Mathematics. 2014. Vol. 94, iss. 1. P. 19-41. DOI: [10.1007/s10665-014-9702-9](https://doi.org/10.1007/s10665-014-9702-9)
25. Chaudhury K., Acharya P.V., Chakraborty S. Influence of disjoining pressure on the dynamics of steadily moving long bubbles inside narrow cylindrical capillaries // Physical Review E. 2014. Vol. 89. Art. no. 053002. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.89.053002>

Asymptotic Law of the Falling Liquid Film Form in Partial Wetting

A.R. Polyanskii^{1,*}, A.S. Romanov¹,
A.V. Semikolenov¹

*korolev100-rd@mail.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: partially wetting liquid, the thin film, surface tension, disjoining pressure, contact of three phases, the contact angle

The paper considers a problem of falling the partially wetting liquid across solid surface taking into account the disjoining pressure for liquid particles in its thin layers close to the three phase contact line. Within the frame of dropping liquid hydrodynamics it is easy to take into consideration the surface tension. On the other hand, with available surface tension, the attempts to fulfill Yung condition for a contact angle encounter truly insurmountable difficulties. Generally speaking, this problem has no solution within the limits of standard hydrodynamic theory of viscous liquid if the surface tension occurs and, at the same time, it is necessary to fulfill Yung condition for partial wetting. These problems can be solved if, instead of Yung condition, which is specified on the three phase contact line, the task is reformulated taking into account an additional chemical potential (or, in other words, the disjoining pressure) of the liquid particles in thin liquid layers close to the three-phase contact line. This approach allows us to formulate the appropriate problem of mathematical physics in the consistent closed-form. The unique dependence of the disjoining pressure on the liquid film thickness and the decline angle of the free surface leads to degeneration of hydrodynamics equations on the three phase contact line, on the one hand, and to fulfilling the Yung condition, on the other one. The paper demonstrates application of the developed theory in the context of calculating liquid surface form at different movement velocities. The asymptotic relationships obtained from the results of numerical experiments allow us to describe the variation law of the apparent 'dynamic' contact angle versus rate of the falling liquid from the wetted surface in the way suitable for calculations.

References

1. Pukhnachev V.V., Solonnikov V.A. On the question of dynamic contact angle. *Prikladnaya matematika i mekhanika* = *Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, vol. 46, no. 6, pp. 961-971. (in Russian).

2. Deryagin B.V., Churaev N.V. *Smachivayushchie plenki* [Wetting films]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 160 p. (in Russian).
3. Deryagin B.V., Churaev N.V., Muler V.M. *Poverkhnostnye sily* [Surface forces]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 399 p. (in Russian).
4. Romanov A.S. Method of hydrodynamic description of the spreading of a partially wetting liquid over a flat solid surface. *Kolloidnyi zhurnal*, 1990, vol. 52, no. 1, pp. 93-99. (English version of journal: *Colloid Journal*, 1990, vol. 52, no. 1, pp. 72-78.).
5. Romanov A.S., Semikolenov A.V. A simulation of the hydrodynamics of the disintegration of a thin film of partially wetting liquid. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1995, vol. 35, no. 5, pp. 810-815. (English version of journal: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1995, vol. 35, no. 5, pp. 643-647.).
6. Romanov A.S., Semikolenov A.V. Simulation of spreading hydrodynamics for a droplet of an incompletely wetting liquid under a horizontal force. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1999, vol. 39, no. 7, pp. 1205-1210. (English version of journal: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1999, vol. 39, no. 7, pp. 1163-1167.).
7. Romanov A.S., Semikolenov A.V. Depressurized capillary filling in the asymptotic theory of wetting. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 4. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/699.htm> , accessed 01.10.2015. (in Russian).
8. De Gennes P.G. Wetting: Statics and Dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 1985, vol. 57, pp. 827-863. DOI: [10.1103/RevModPhys.57.827](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.57.827)
9. Samarskii A.A., Sobol' I.M. Examples of numerical calculation of temperature waves. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1963, vol. 3, no. 4, pp. 702-719. (English version of journal: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 4, pp. 945-970.)
10. Frommer M. Integral curves of an ordinary differential equation of first order in the neighbourhood of a singular point with a rational character. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1941, no. 9, pp. 212-253. (in Russian).
11. Pavlov K.B., Romanov A.S., Shakhov A.P. Method of phenomenological description of the spreading of partially wetting liquid. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoi sredy = Numerical methods in continuum mechanics*, 1986, vol. 17, no. 3, pp.132 -138. (in Russian).
12. Deryagin B.V., Churaev N.V., Ovcharenko F.D. et al. *Voda v dispersnykh sistemakh* [Water in disperse systems]. Moscow, Khimiya Publ., 1989. 288 p. (in Russian).
13. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. New York, Academic Press, 1964. (Russ. ed.: Van Dyke M. *Metody vozmushchenii v mekhanike zhidkosti*. Moscow, Mir Publ., 1967. 310 p.).
14. Radoev B., Stöckelhuber K.W., Tsekov R., Letocart P. Wetting film dynamics and stability. In: Tadros T.F., ed. *Colloid Stability and Application in Pharmacy*. Vol. 3. Wiley-VCH

Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Germany, 2007, pp. 151-172. DOI:

[10.1002/9783527631117.ch6](https://doi.org/10.1002/9783527631117.ch6)

15. Dai B., Leal L.G., Redondo A. Disjoining pressure for nonuniform thin films. *Physical Review E*, 2008, vol. 78, art. no. 061602.
16. Saramago B. Thin liquid wetting films. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 2010, vol. 15, no. 5, pp. 330-340. DOI: [10.1016/j.cocis.2010.05.005](https://doi.org/10.1016/j.cocis.2010.05.005)
17. Ren W., Hu D. Continuum models for the contact line problem. *Physics of Fluids*, 2010, vol. 22, no. 10, art. no. 102103. DOI: [10.1063/1.3501317](https://doi.org/10.1063/1.3501317)
18. Patra A., Bandyopadhyay D., Tomar G., Sharma A., Biswas G. Instability and dewetting of ultrathin solid viscoelastic films on homogeneous and heterogeneous substrates. *Journal of Chemical Physics*, 2011, vol. 134, no. 6, art. no. 064705. DOI: [10.1063/1.3554748](https://doi.org/10.1063/1.3554748)
19. Tsekov R., Toshev B.V. Capillary pressure of van der Waals liquid nanodrops. *Kolloidnyi zhurnal*, 2012, vol. 74, no. 2, pp. 286-288. (English version of journal: *Colloid Journal*, 2012, vol. 74, no. 2, pp. 266-268.).
20. Colosqui C.E., Kavousanakis M.E., Papathanasiou A.G., Kevrekidis I.G. Mesoscopic model for microscale hydrodynamics and interfacial phenomena: slip, films, and contact-angle hysteresis. *Physical Review E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2013, vol. 87, no. 1, art. no. 013302. DOI: [10.1103/PhysRevE.87.013302](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.013302)
21. Nikolov A., Wasan D. Wetting-dewetting films: the role of structural forces. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2014, vol. 206, pp. 207-221. DOI: [10.1016/j.cis.2013.08.005](https://doi.org/10.1016/j.cis.2013.08.005)
22. Boinovich L., Emelyanko A. The prediction of wettability of curved surfaces on the basis of the isotherms of the disjoining pressure. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2011, vol. 383, iss. 1-3, pp. 10-16. DOI: [10.1016/j.colsurfa.2010.12.020](https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2010.12.020)
23. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving Contact Lines: Scales, Regimes, and Dynamical Transitions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2013, vol. 45, pp. 269-292. DOI: [10.1146/annurev-fluid-011212-140734](https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-011212-140734)
24. Sibley D.N., Nold A., Savva N., Kalliadas S. A comparison of slip, disjoining pressure, and interface formation models for contact line motion through asymptotic analysis of thin two-dimensional droplet spreading. *Journal of Engineering Mathematics*, 2014, vol. 94, iss. 1, pp. 19-41. DOI: [10.1007/s10665-014-9702-9](https://doi.org/10.1007/s10665-014-9702-9)
25. Chaudhury K., Acharya P.V., Chakraborty S. Influence of disjoining pressure on the dynamics of steadily moving long bubbles inside narrow cylindrical capillaries. *Physical Review E*, 2014, vol. 89, art. no. 053002. DOI: [10.1103/PhysRevE.89.053002](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.053002)