

12, декабрь 2015

УДК 532.51+536.24

Математическое моделирование локальных газодинамических процессов в пористых периодических средах

***Богданов И.О.**, студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»*

*Научный руководитель: **Димитриенко Ю.И.**, д. ф.-м. н., профессор*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»*

bauman@bmstu.com

Введение

Вопросы фильтрации занимают важное место в различных областях науки и техники: проектирование летательных аппаратов (в частности конструирование внутрибаковых капиллярных заборных устройств отбора топлива на основе пористо-сетчатых материалов); разработка различных фильтрующих устройств, теплоизоляторов, строительных материалов и т.д. При этом возникает необходимость в специализированных математических моделях, которые могли бы описывать как локальные процессы переноса в отдельно взятой поре, так и процессы в пористой системе в целом. В данной работе исследуются локальные процессы фильтрации на пористо-сетчатых структурах.

Геометрическая модель расчетной области

На практике микроструктура пористых систем, как правило, обладает сложной трехмерной конфигурацией. По этой причине введем следующие допущения:

1. Будем рассматривать пористо-сетчатую среду, обладающую свойством периодичности (см. рис. 1).
2. В пористой системе отсутствуют тупиковые поры.
3. Ячейка периодичности (ЯП), приведенная на рис. 2, а, представляет собой область между волокнами (пору), заполненную газом, и сами волокна.

4. ЯП имеют геометрическую и физическую симметрию относительно координатных плоскостей местной декартовой системы координат, что дает возможность рассматривать далее $1/8$ ЯП, пора которой приведена на рис. 2, б.

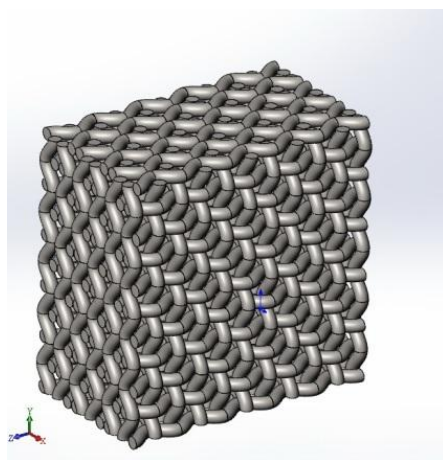
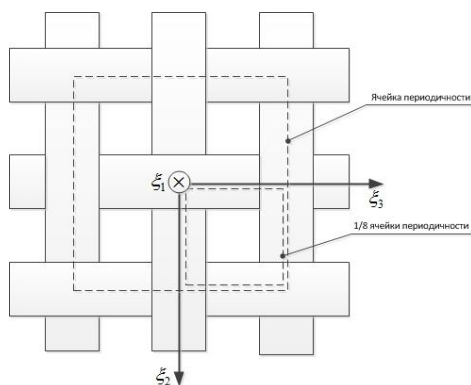
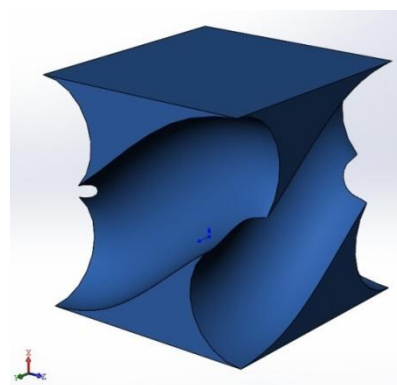


Рис. 1. Трехмерная модель пористо-сетчатой структуры

Всю область, занятую порами, будем обозначать V , а ее границу (поверхность раздела с твердым телом) – Σ_s . Введем также следующие обозначения: V_ξ – ячейка периодичности, $V_{\xi p}$ – область, занятая порой, $\Sigma_{\xi sp}$ – граница поры с твердым телом.



а)



б)

Рис. 2. Геометрическая модель ячейки периодичности: а) вид сверху; б) трехмерная модель поры $1/8$ ячейки периодичности

Система уравнений Навье-Стокса для изотермического движения линейно-вязкого газа

Движение газа в пористо-сетчатой структуре описывается системой уравнений Навье-Стокса[4]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где ρ – плотность, $\mathbf{v}$ – скорость, $\mathbf{T}$ – тензор напряжений, $\otimes$ – тензорное произведение. Примем следующие допущения:

1. Поры заполнены совершенным газом.
2. Газ является изотропной линейно-вязкой средой.
3. Движение газа является изотермическим и баротропным.
4. Плотность массовых сил равна нулю.
5. Газ является объемно невязким, т.е. коэффициент объемной вязкости [3] равен нулю:

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0.\tag{2}$$

где λ , μ – коэффициенты вязкости.

Дополним систему (1) определяющими соотношениями. В МСС показывается [4], что для изотропной линейно-вязкой среды тензор напряжений имеет вид

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \mathbf{T}_v(\mathbf{D}),\tag{3}$$

где p – давление; $\mathbf{T}_v(\mathbf{D}) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}$ – тензор вязких напряжений; λ , μ – коэффициенты вязкости; $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T)$ – тензор скоростей деформации.

В систему (1) также необходимо включить уравнение состояния. Для случая газа используется уравнение состояния Менделеева-Клапейрона

$$p = \rho R \theta_0,\tag{4}$$

где R – газовая постоянная; $\theta_0 = \text{const}$ – температура.

На поверхностях раздела «твердое тело – газ» Σ ставится граничное условие прилипания

$$\mathbf{v}|_{\Sigma} = 0.\tag{5}$$

В начальный момент времени $t = t_0$ считаются заданным давление

$$p|_{t=t_0} = p_0. \quad (6)$$

Запишем уравнения в безразмерной форме. Для этого введем безразмерные функции:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\hat{\rho}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\hat{p}}, \quad \tilde{v}_i = \frac{v_i}{\hat{v}}, \quad (7)$$

где $\hat{\rho}$ – характерная плотность, $\hat{p}$ – характерное давление, $\hat{v}$ – модуль вектора характерной скорости. Введем также характерный размер $\hat{L}$ всей области среды. Это дает возможность определить характерное время $\hat{t} = \frac{\hat{L}}{\hat{v}}$. Тогда безразмерное время определим следующим образом:

$$\tilde{t} = \frac{t}{\hat{t}}. \quad (8)$$

Тогда с учетом соотношений (2) – (8), получаем искомую постановку задачи изотермического течения линейно-вязкого сжимаемого газа в пористой среде (символ $\sim$ далее опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i (\rho v_i) &= 0, \\ \frac{1}{\text{Eu}} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla_j (\rho v_i v_j) \right) &= -\nabla_i p + \frac{1}{\text{EuRe}} \left(\nabla_j \nabla_j v_i + \frac{1}{3} \nabla_i \nabla_j v_j \right), \\ p &= A \rho, \\ v_i|_{\Sigma} &= 0, \quad p|_{t=t_0} = p_0, \\ i &= \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $A = R\hat{\rho}\theta_0/\hat{p}$ – безразмерная константа; $\text{Eu} = \hat{p}/\hat{\rho}\hat{v}^2$ – число Эйлера; $\text{Re} = \hat{\rho}\hat{v}\hat{L}/\mu$ – число Рейнольдса.

Применение метода асимптотического осреднения (МАО) для постановки задачи на ячейке периодичности

Применение метода асимптотического осреднения для системы уравнений Навье-Стокса рассмотрено, например, в работах [1], [2], [7]. В нашем случае суть метода состоит в следующем. Пусть $\hat{l}$ – линейный размер ячейки периодичности V_{ξ} среды. В рамках МАО вводится малый параметр $\kappa = \hat{l}/\hat{L} \ll 1$ и два типа безразмерных координат: глобальные $\tilde{x}_i = x_i/\hat{L}$ и локальные $\xi_i = x_i/\hat{l} = \tilde{x}_i/\kappa$. В этом случае все функции, описывающие течение

газа в порах, можно считать квазипериодическими, а дифференцирование этих функций осуществлять с помощью следующего правила:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}_i} \rightarrow \frac{1}{\kappa} \Theta_{/i} + \Theta_{,i} \quad (10)$$

где $\Theta_{,i} = \partial \Theta / \partial \tilde{x}_i$ и $\Theta_{/i} = \partial \Theta / \partial \xi_i$. Кроме того, вводится операция осреднения функций по области $V_{\xi p}$:

$$\langle \Theta \rangle = \frac{1}{\varphi_p} \int_{V_{\xi p}} \Theta dV,$$

где $\varphi_p = \int_{V_{\xi p}} dV$ – пористость среды. Тогда, осредняя функции p , ρ , v_i , получим

$$\langle \rho v_i \rangle = \overline{\rho v_i}; \quad \langle \rho \rangle = \bar{\rho}; \quad \langle p \rangle = \bar{p}. \quad (11)$$

где $\bar{p}$, $\bar{\rho}$, $\bar{v}_i$ – средние значения функций. Соотношения (11) следует понимать, как дополнительные условия, предъявляемые к локальным параметрам течения в $V_{\xi p}$, либо как обозначения для вычисленных осредненных функций.

Введем соотношения между безразмерными параметрами κ , Eu и Re :

$$Eu \kappa^k = Eu^0 = O(1), \quad Re \kappa^n = Re^0 = O(1), \quad (12)$$

где $k, n \in \mathbb{Z}$ – некоторые целые числа, которые соответствуют различным режимам течения газа. С учетом (10) и (12) система (9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \rho_t + \frac{1}{\kappa} (\rho v_i)_{/i} + (\rho v_i)_{,i} &= 0, \\ \frac{\kappa^k}{Eu^0} \left((\rho v_i)_t + \frac{1}{\kappa} (\rho v_i v_j)_{/j} + (\rho v_i v_j)_{,j} \right) &= \\ = -\frac{1}{\kappa} p_{/i} - p_{,i} + \frac{\kappa^{k+n}}{Eu^0 Re^0} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\kappa^2} v_{j/ij} + \frac{1}{\kappa} (v_{j/i,i} + v_{j/i,j}) + v_{j,ij} \right) + \left(\frac{1}{\kappa^2} v_{i/jj} + \frac{2}{\kappa} v_{i/j,j} + v_{i,jj} \right) \right], \quad (13) \\ p &= A \rho, \\ v_i|_{\Sigma} &= 0, \quad p|_{t=t_0} = p_0, \\ i &= \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

В соответствии с общей концепцией МАО решение задачи (13) ищется в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра κ :

$$\begin{aligned} v_i(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) &= v_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) + \kappa v_i^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) + O(\kappa^2), \\ \rho(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) &= \rho^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) + \kappa \rho^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) + O(\kappa^2), \\ p(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) &= p^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) + \kappa p^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) + O(\kappa^2). \end{aligned} \quad (14)$$

После подстановки (14) в систему (13) и группировки слагаемых при одинаковых степенях параметра κ можно показать [5, 6], что возможно семь вариантов значений целочисленных параметров k и n :

$$\begin{aligned} k=0, \quad n=1; \quad k=0, \quad n=2; \\ k=1, \quad n=0; \quad k=1, \quad n=1; \quad k=1, \quad n=2; \\ k=2, \quad n=0; \quad k=2, \quad n=1; \end{aligned} \quad (15)$$

Другие сочетания значений чисел k и n приводят к повтору уравнений для одного из уже перечисленных сочетаний значений чисел k и n . Рассмотрим случай $k=2$ и $n=0$, т.е. $Eu \gg O(1)$, $Re = O(1)$. Тогда давление $p^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) = \bar{p}(\tilde{\mathbf{x}})$ и плотность $\rho^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi, t) = \bar{\rho}(\tilde{\mathbf{x}})$ не зависят от локальных координат ξ_j .

Локальная задача «на ячейке периодичности» для вычисления функций $v_i^{(0)}$, $p^{(1)}$ и $\rho^{(1)}$ для рассматриваемого случая формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} v_{i/i}^{(0)} = 0, \\ -p_{/i}^{(1)} + \mu^0 v_{i/jj}^{(0)} = p_{,i}^{(0)}, \\ p^{(1)} = A \rho^{(1)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ v_i^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \\ \langle p^{(1)} \rangle = 0, \quad \llbracket v_i^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket p^{(1)} \rrbracket = 0; \\ i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases} \quad (16)$$

где $\mu^0 = 1/(Eu^0 Re^0)$, а символом $\cdot$ обозначены условия периодичности, причем $-1/2 \leq \xi_i \leq 1/2$ – область ячейки периодичности $V_{\xi p}$. Градиент давления $p_{,i}^{(0)}$ в системе (16) зависит только от глобальных координат $\tilde{x}_i$ и рассматривается как «входные данные» локальной задачи переноса.

Будем рассматривать далее трехмерную пористую структуру, в которой движение газа может происходить вдоль координатных осей $O\xi_i$ (см. рис. 2, б). В силу линейности локальной задачи (16) ее решение можно представить в виде линейной функции от входных данных, т.е. $p_{,i}^{(0)}$:

$$p^{(1)} = -\sum_{\alpha=1}^3 P^{(\alpha)}(\xi) p_{,\alpha}^{(0)}, \quad v_i^{(0)} = -\sum_{\alpha=1}^3 W_i^{(\alpha)}(\xi) p_{,\alpha}^{(0)}, \quad (17)$$

где функции $P^{(\alpha)}(\xi)$ и $W_i^{(\alpha)}(\xi)$ зависят от ξ .

Подставив выражения(17) в локальную задачу(16), после исключения градиента $p_{,i}^{(0)}$ получим набор локальных задач для определения функций $P^{(\alpha)}(\xi)$, $W_i^{(\alpha)}(\xi)$, которые не содержат констант, описывающих физические свойства газов, и не зависят от входных данных:

$$\begin{cases} W_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ P_{/i}^{(\alpha)} - \mu^0 W_{i/jj}^{(\alpha)} = h_i^{(\alpha)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ W_i^{(\alpha)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \\ \langle P^{(\alpha)} \rangle = 0, \quad \llbracket W_i^{(\alpha)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket P^{(\alpha)} \rrbracket = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь введены функции, позволяющие учитывать вырожденный случай пористой структуры, когда сквозные каналы пор по одному из координатных направлений отсутствуют:

$$h_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq \alpha \text{ или при } i = \alpha \text{ } P_{,\alpha}^{(0)} = 0, \\ 1 & \text{при } i = \alpha \text{ и } P_{,\alpha}^{(0)} \neq 0. \end{cases}$$

Физическая интерпретация локальной задачи

Из анализа системы (18) можно сделать следующий вывод. На локальном уровне для каждого фиксированного значения α задача (18) представляет собой стационарную задачу течения некоторой фиктивной линейно-вязкой несжимаемой жидкости. Решение задач(18) определяется только внутренней геометрией пор, поэтому их решение применимо для расчетов фильтрации любых газов и жидкостей в рамках сделанных выше допущений. Данная задача имеет ряд специфических свойств. Во-первых, поскольку функция $p^{(1)}$ в выражении (14) представляет собой пульсацию давления p по отношению к среднему значению $\bar{p}$:

$$\kappa p^{(1)} = p - p^{(0)} + O(\kappa^2), \quad \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}, \quad \langle p^{(1)} \rangle = 0,$$

то функция $p^{(1)}$ может быть как положительной, так и отрицательной. Во-вторых, наличие условия $\langle p^{(1)} \rangle = 0$ делает задачу (18) интегрально-дифференциальной, что вместе с условиями периодичности принципиально отличает ее от классической задачи Стокса.

Постановка локальной задачи на 1/8 ячейки периодичности

Упростить решение задачи (18) позволяет следующая теорема о продолжении решения [5, 6].

Пусть ячейка периодичности $V_{\xi p}$ 3D-структуры имеет зеркальную симметрию относительно координатных плоскостей $O\xi_1\xi_2$, $O\xi_1\xi_3$, $O\xi_2\xi_3$. Тогда решение $P^{(\alpha)}$, $W_i^{(\alpha)}$ задачи (18) получается с помощью симметричного или антисимметричного продолжения функций $\tilde{P}^{(\alpha)}$, $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, определенных в $1/8$ ячейки периодичности (в первом квадранте $\{\xi_i : 0 \leq \xi_i \leq 1/2\}$) (см. рис. 1, б) и являющихся решениями следующих задач:

$$\begin{cases} \tilde{W}_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ \tilde{P}_{/i}^{(\alpha)} - \mu^0 \tilde{W}_{i/jj}^{(\alpha)} = h_i^{(\alpha)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \tilde{W}_i^{(\alpha)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}. \end{cases} \quad (19)$$

Изменение знаков функций $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, $\tilde{P}^{(\alpha)}$ для $\alpha=1$ при их симметричном или антисимметричном продолжении во всю ЯП может осуществляться так, как представлено на рис. 2. Для $\alpha=2,3$ продолжение осуществляется аналогичным образом с циклической перестановкой индексов и функций. Знак «+» на рис. 2 означает, что при переходе из первого квадранта функция не изменяет знак (симметричное продолжение), а знак «-» – изменяет (антисимметричное продолжение).

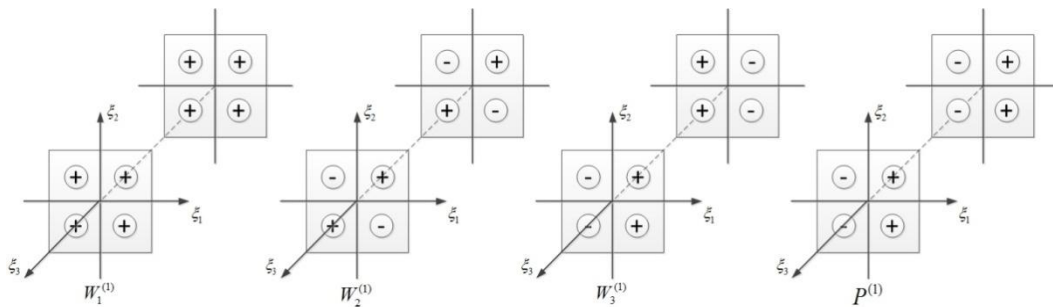


Рис. 3. Изменение знаков функций при симметричном или антисимметричном продолжении

Используя симметричное и антисимметричное продолжение решения системы (19), можно записать граничные условия на граничных плоскостях $1/8$ ячейки периодичности $\tilde{V}_{\xi p}$ [6]:

$$\begin{aligned}
\xi_1 = 0 \text{ и } \xi_1 = \frac{1}{2} : \quad & \frac{\partial \tilde{W}_1^{(1)}}{\partial \xi_1} = 0; \quad \tilde{W}_2^{(1)} = 0; \quad \tilde{W}_3^{(1)} = 0; \quad \tilde{P}^{(1)} = 0; \\
\xi_2 = 0 \text{ и } \xi_2 = \frac{1}{2} : \quad & \frac{\partial \tilde{W}_1^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0; \quad \tilde{W}_2^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_3^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0; \\
\xi_3 = 0 \text{ и } \xi_3 = \frac{1}{2} : \quad & \frac{\partial \tilde{W}_1^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_2^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0; \quad \tilde{W}_3^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Вариационная формулировка локальной задачи

Вводя обозначения для компонент тензора напряжений $T_{ij}^{(\alpha)}$ и тензора скоростей деформаций $D_{ij}^{(\alpha)}$:

$$T_{ij}^{(\alpha)} = -\tilde{P}^{(\alpha)} \delta_{ij} + 2\mu^0 D_{ij}^{(\alpha)}, \quad D_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} + \tilde{W}_{j/i}^{(\alpha)}), \tag{21}$$

а также кинематически возможное поле скоростей $\delta \tilde{W}_i^{(\alpha)}$, как векторное поле, удовлетворяющее граничным условиям 1-го рода на части поверхности ячейки периодичности $W_i^{(\alpha)} = 0$, $\xi_i \in \Sigma_{\xi sp}$, и вариацию давления $\delta \tilde{P}^{(\alpha)}$, то с учетом формулы преобразования произведения векторов

$$T_{ij/j}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} = (T_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)})_{/j} - T_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} \tag{22}$$

и формулы Остроградского-Гаусса, можно записать вариационную постановку задачи(19)[6]:

$$\begin{aligned}
\int_{V^{(e)}} D_{ii}^{(\alpha)} \delta \tilde{P}^{(\alpha)} dV &= 0, \\
\int_{V^{(e)}} T_{ij}^{(\alpha)} \delta D_{ij}^{(\alpha)} dV &= \int_{\Sigma^{(e)}} S_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} d\Sigma + \int_{V^{(e)}} h_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} dV, \quad \xi_i \in V_{\xi p}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $S_i^{(\alpha)} = n_j T_{ij}^{(\alpha)}$ – компоненты вектора усилий на поверхности $\Sigma^{(e)}$ области $V^{(e)} \subset \tilde{V}_{\xi p}$, где n_j – компоненты вектора нормали к поверхности $\Sigma^{(e)}$. Отметим, что на всей границе области течения $\tilde{V}_{\xi p}$ в соответствии с граничными условиями из задачи(19) работа вектора поверхностных усилий обращается в ноль.

Метод конечных элементов для решения вариационной задачи

Для решения системы вариационных уравнений(23) был применен метод конечных элементов (МКЭ) [8]десяти узловым конечным элементом (КЭ) в форме тетраэдра (см. рис. 2), который отличается от классического 10-узлового КЭ тем, что имеет 34 степени свободы:

по 3 компоненты скорости $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$ в каждом узле и по одному значению давления $\tilde{P}^{(\alpha)}$ в каждой вершине тетраэдра.

В каждом КЭ будем использовать квадратичную аппроксимацию функций по скоростям и линейную по давлению:

$$\begin{matrix} \{W\} \\ 3 \end{matrix} = \begin{matrix} [N_W] \\ 3 \times 30 \end{matrix} \begin{matrix} \{w\} \\ 30 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} p \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \{N_P\} \\ 4 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{p\} \\ 4 \end{matrix}, \quad (24)$$

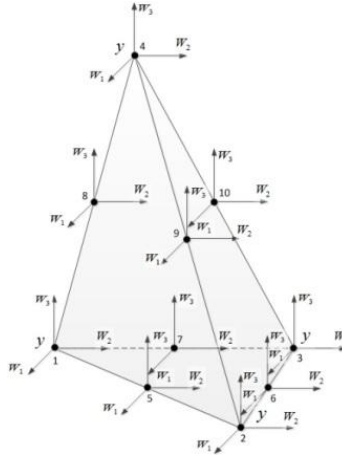


Рис. 4. Вид десяти узловотетраэдральногоКЭ с 34 степенями свободы

где $\{W\} = (\tilde{W}_1^{(\alpha)}, \tilde{W}_2^{(\alpha)}, \tilde{W}_3^{(\alpha)})^T$ – координатный столбец скоростей в КЭ, $\{w\}$ – координатный столбец скоростей в узлах, $\{p\}$ – координатный столбец давлений $p = \tilde{P}^{(\alpha)}$ в вершинах КЭ.

Матрицы функций формы $[N_W]$ и $\{N_P\}$ имеют следующий вид:

$$[N_W]_{3 \times 30} = \begin{bmatrix} N_{W1} & 0 & 0 & N_{W2} & 0 & 0 & \dots & N_{W10} & 0 & 0 \\ 0 & N_{W1} & 0 & 0 & N_{W2} & 0 & \dots & 0 & N_{W10} & 0 \\ 0 & 0 & N_{W1} & 0 & 0 & N_{W2} & \dots & 0 & 0 & N_{W10} \end{bmatrix},$$

$$\{N_P\}^T = (L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4),$$

где

$$\begin{aligned} N_{W1} &= (2L_1 - 1)L_1, & N_{W2} &= (2L_2 - 1)L_2, & N_{W3} &= (2L_3 - 1)L_3, & N_{W4} &= (2L_4 - 1)L_4, & N_{W5} &= 4L_1L_2, \\ N_{W6} &= 4L_2L_3, & N_{W7} &= 4L_1L_3, & N_{W8} &= 4L_1L_4, & N_{W9} &= 4L_2L_4, & N_{W10} &= 4L_3L_4. \end{aligned}$$

В последней формуле L_i , $i = \overline{1, 4}$ – L -координаты.

Введем координатный столбец скоростей деформаций:

$$\{D\}^T = (D_{11}^{(\alpha)} \quad D_{22}^{(\alpha)} \quad D_{33}^{(\alpha)} \quad D_{12}^{(\alpha)} \quad D_{13}^{(\alpha)} \quad D_{23}^{(\alpha)}).$$

Тогда $\{D\} = [L]\{W\} = [L][N_w]\{w\} = [B]\{w\}$, где матрица $[L]$ выписывается в виде:

$$[L]^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}.$$

Вариации компонент вектора скоростей и тензора скоростей деформаций, а также давления p представляются в виде:

$$\begin{aligned} \delta\{W\} &= [N_w] \delta\{w\}, \\ \delta p &= \{N_p\}^T \delta\{p\}, \\ \delta\{D\} &= [B] \delta\{w\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Введем координатный столбец напряжений:

$$\{T\}^T = (T_{11}^{(\alpha)} \quad T_{22}^{(\alpha)} \quad T_{33}^{(\alpha)} \quad T_{12}^{(\alpha)} \quad T_{13}^{(\alpha)} \quad T_{23}^{(\alpha)}),$$

который на основании определяющих соотношений (21) связан с координатным столбцом скоростей деформаций линейным соотношением:

$$\{T\}_{6 \times 1} = -[N_p]_{6 \times 4} \{p\}_4 + 2\mu^0 \{D\}_{6 \times 1}, \quad (26)$$

где $[N_p]$ – матрица, образованная диадным умножением столбцов:

$$[N_p]_{6 \times 4} = \{I_0\}_{6 \times 1} \{N_p\}_4^T,$$

где $\{I_0\}^T = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

Введем, наконец, координатный столбец внешних усилий $\{S\}^T = (S_1^{(\alpha)} \quad S_2^{(\alpha)} \quad S_3^{(\alpha)})$ на поверхности тела.

Тогда, подставляя (24), (25) и (26) в систему (23), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для каждого отдельного КЭ:

$$\begin{cases} [K]_{30 \times 30} \{w\}_{30} - [R]_{30 \times 4} \{p\}_4 = \{f\}_{30}, \\ [R]_{4 \times 30}^T \{w\}_{30} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь обозначены следующие локальные матрицы жесткости и векторы правой части:

$$\begin{aligned} [K] &= 2\mu^0 \int_{V^{(e)}} ([B]^T [B]) dV, \quad [R] = \int_{V^{(e)}} ([B]^T [N_p]) dV, \\ \{f_\Sigma\} &= \int_{\Sigma^{(e)}} ([N_w]^T \{S\}) d\Sigma, \quad \{f_v\} = \int_{V^{(e)}} ([N_w]^T \{h\}) dV, \\ \{f\} &= \{f_\Sigma\} + \{f_v\}. \end{aligned} \quad (28)$$

При формировании глобальной СЛАУ суммарные векторы правых частей $\{f_\Sigma\}$, соответствующие вектору поверхностных усилий $\{S\}$, обращаются в ноль, поскольку все внутренние стороны КЭ при суммировании перечисляются дважды, но знак у вектора $\{S\}$ при этом меняется из-за изменения знака вектора нормали на этих сторонах. На тех же сторонах КЭ, которые принадлежат внешней границе области $\tilde{V}_{\xi p}$, работа вектора $\{S\}$ обращается в ноль в силу граничных условий задачи, поэтому в глобальной СЛАУ $\{f_\Sigma\} = 0$.

В результате применения МКЭ к задаче моделирования локальных процессов фильтрации возникает несимметричная и сильно разреженная глобальная СЛАУ. По этой причине для ее решения был выбран стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiconjugateGradientStabilized, BICGSTAB) [9].

Результаты

Порядок интегрирования при составлении локальных матриц был принят равным 3. Решение глобальной СЛАУ производилось на основе стабилизированного метода бисопряженных градиентов (BiCGStab) с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Параметры расчета приведены в таблице 1, а результаты – на рис.5 и в таблице 2.

Таблица 1

Параметры расчета		
Параметр	Значение в задаче для $\alpha = 1$	Значение в задаче для $\alpha = 3$
Радиус волокна	0,125	0,125
Кол-во вершинных узлов КЭ сетки / Общее кол-во узлов КЭ сетки	6588/45035	4798/31457
Кол-во КЭ	28460	18780
Кол-во поверхностных КЭ	6800	6164

Результаты расчета

Параметр	Значение в задаче для $\alpha = 1$		Значение в задаче для $\alpha = 3$	
	минимальное	максимальное	минимальное	максимальное
Давления $\tilde{P}^{(\alpha)}$	-0,191	0,191	-0,225	0,214
Компонента скорости $\tilde{W}_1^{(\alpha)}$	$-2,285 \cdot 10^{-5}$	$1,425 \cdot 10^{-2}$	$-1,137 \cdot 10^{-3}$	$1,115 \cdot 10^{-3}$
Компонента скорости $\tilde{W}_2^{(\alpha)}$	$-1,366 \cdot 10^{-3}$	$1,355 \cdot 10^{-3}$	$-1,853 \cdot 10^{-3}$	$1,845 \cdot 10^{-3}$
Компонента скорости $\tilde{W}_3^{(\alpha)}$	$-1,372 \cdot 10^{-3}$	$1,364 \cdot 10^{-3}$	$-4,397 \cdot 10^{-5}$	$1,181 \cdot 10^{-2}$

Из рис. 5 следует, что максимумы и минимумы давлений $\tilde{P}^{(1)}$ и $\tilde{P}^{(3)}$ приходятся на области переплетения волокон, максимум компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$ находится на оси 1/8 ЯП, вдоль которой происходит течение газа, максимум компоненты скорости $\tilde{W}_3^{(3)}$ приходится на области переплетения волокон. При этом компоненты скорости $\tilde{W}_2^{(1)}$, $\tilde{W}_3^{(1)}$ и $\tilde{W}_1^{(3)}$ различных минимумов и максимумов на поверхностях 1/8 ЯП не имеют и достигаются во внутренней области, компонента $\tilde{W}_2^{(3)}$ достигает локальных минимумов и максимумов на противоположенных гранях 1/8 ЯП.

Заключение

Разработана математическая модель локальных газодинамических процессов в трехмерных пористо-сетчатых структурах, основанная на методе асимптотического осреднения. Получена вариационная формулировка задачи, и разработан метод конечных элементов для ее решения. Получены результаты, показывающие характер распределения давления и компонент скоростей для случаев течения среды в нормальном и тангенциальном направлениях относительно плоскости волокон в пористо-сетчатой среде.

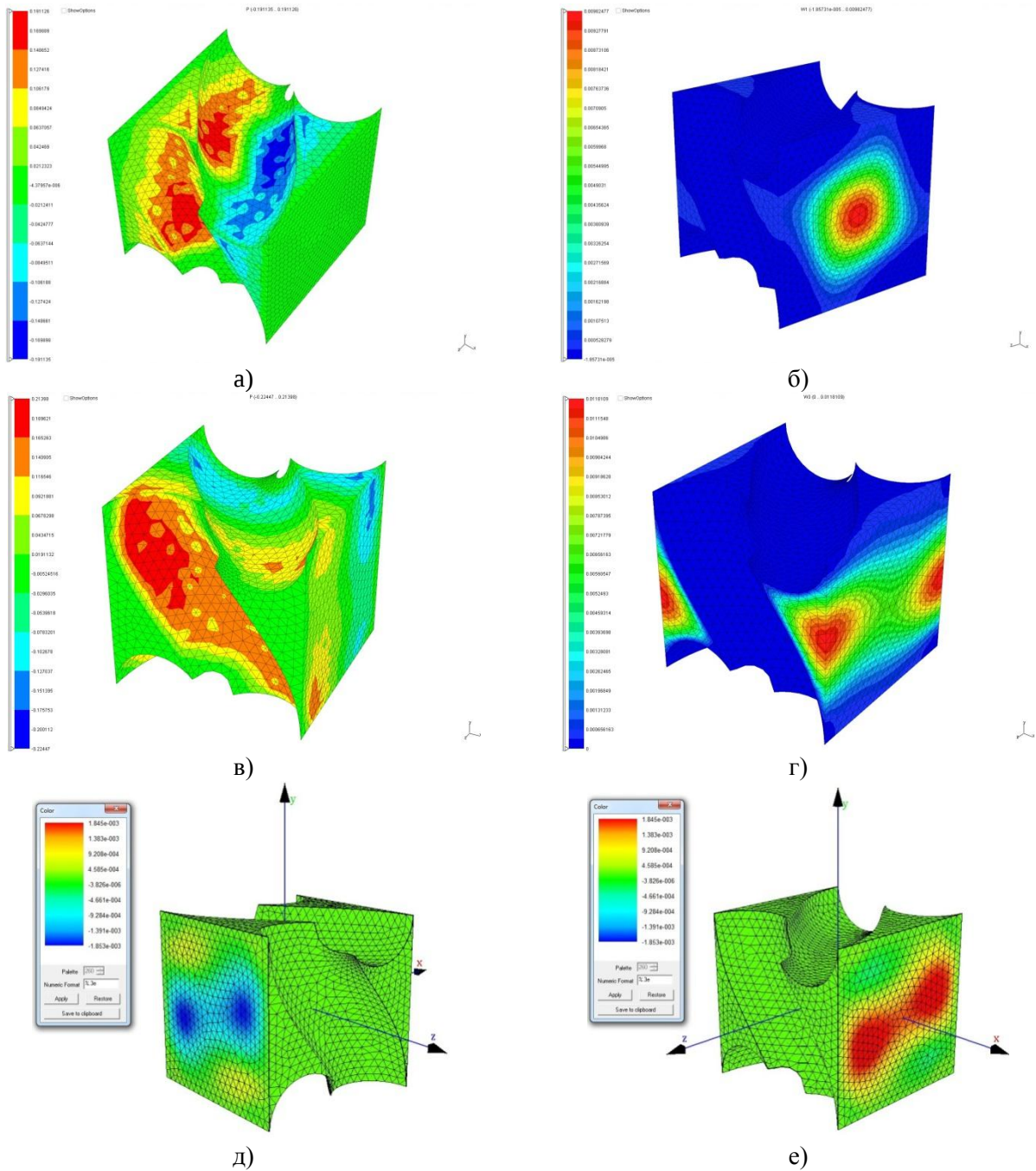


Рис. 5. Результаты расчета: а) распределение давления $\tilde{P}^{(1)}$; б) распределение компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$; в) распределение давления $\tilde{P}^{(3)}$; г) распределение компоненты скорости $\tilde{W}_3^{(3)}$; д) распределение компоненты скорости $\tilde{W}_2^{(3)}$ (вид слева); е) распределение компоненты скорости $\tilde{W}_2^{(3)}$ (вид справа).

Список литературы

1. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС, 2003. 376 с.
2. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 352 с.
3. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике: учеб.пособие / под ред. Н.Н. Поляхова. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 296 с.
4. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды : учеб.пособие. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. 559 с.
5. Димитриенко Ю.И., Глазиков М.Л. Моделирование процессов фильтрации в периодических пористых средах // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2003. № 1. С. 59–71.
6. Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Галицын А.А. Конечно-элементное моделирование локальных газодинамических процессов в трехмерных пористых структурах // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. «Математическое моделирование». С. 50–65.
7. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: пер. с англ. / под ред. О.А. Олейника. М.: Мир, 1984. 472 с. [Enrique Sanchez-Palencia. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. New York :Springer-Verlag, 1980.].
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. / под ред. Б.Е. Победри. М.: Мир, 1979. 392 с. [Larry J. Segerlind. Applied Finite Element Analysis. New York : John Wiley and Sons, Inc., 1976.].
9. Горбаченко В.И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB : учеб.пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 320 с.