

УДК 531.39

Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость с вытекающей жидкостью

Нгуен Х. З.^{1,*}, Темнов А. Н.¹

[*freedom_dh@yahoo.com.vn](mailto:freedom_dh@yahoo.com.vn)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Задачи о малых колебаниях несжимаемой идеальной жидкости, частично заполняющей неподвижную и подвижную полости произвольной формы при условии непротекания на смачиваемых поверхностях, рассматривалась многими авторами. В настоящей статье представлена постановка краевой задачи о собственных колебаниях жидкости в полости подвижного физического маятника, вращающего относительно произвольной точки, с граничными условиями на свободной поверхности, условиями непротекания на смачиваемых поверхностях и дополнительными динамическими условиями на поверхности с сопротивлением – поверхности слива. Особое внимание уделено нахождению собственных частот уравнений колебаний возмущенного движения осесимметричного маятника с жидкостью, частично заполняющей в его сферической полости, с наличием диссипации на граничных поверхностях.

Ключевые слова: малые колебания, возмущенное движение, диссипация, физический маятник

В течение длительного времени изучались задачи о колебаниях жидкости в полости произвольной формы. Наиболее полную библиографию работ по этому вопросу можно найти в книгах [1-6]. В предыдущих работах авторов [7,8] приведена постановка модельной задачи о малых движениях несжимаемой жидкости, вытекающей из неподвижного бака с заборными устройствами (ЗУ). В статьях [9,10] рассматривались примеры рассматриваемых задач о движении несжимаемой жидкости, вытекающей из наиболее распространенных на практике топливных полостей в виде цилиндра, конуса и сферы.

В настоящей статье представлена постановка краевой задачи о малых движениях несжимаемой жидкости, вытекающей из полости произвольной формы подвижного физического маятника (тела), приведено решение задачи о нахождении собственных частот колебаний возмущенного движения осесимметричного маятника с жидкостью, частично заполняющей в его сферической полости, с наличием диссипации на граничных поверхностях.

Постановка задачи

Пусть идеальная несжимаемая жидкость, частично заполняющая полость произвольной формы подвижного физического маятника, вытекает через ЗУ и может совершать малые движения. Проблема малых движений жидкости может быть описана уравнениями гидродинамики, линеаризованными вблизи невозмущённого состояния. Рассмотрим случай вращательного движения маятника относительно произвольной точки O_1 .

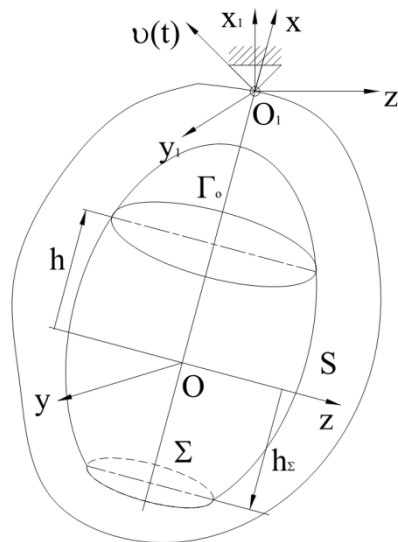


Рис.1. Основные обозначения и системы координаты.

Введем следующие системы координат:

-инерциальную систему координат $O_1x_1y_1z_1$;

-связанную, неинерциальную $Oxyz$ с осями, ориентированными некоторым определенным образом относительно маятника. В начальном состоянии оси O_1x_1 и Ox совпадают и противоположны вектору силы тяжести $\vec{g}$.

Обозначим смоченную жидкостью поверхность, свободную поверхность жидкости, поверхность слива и область, занятую жидкостью - S , Γ_0 , Σ и τ , соответственно.

Возмущенное движение маятника будем характеризовать вектором малого поворота $\vec{\theta}(t)$ СК $Oxyz$ относительно СК $O_1x_1y_1z_1$.

За невозмущённое состояние примем состояние покоя физического маятника и установившееся движение жидкости, характеризующееся средней скоростью опускания $V_{0\Gamma}$ невозмущённой свободной поверхности Γ_0 и средней скоростью $V_{0\Sigma}$ на поверхности слива Σ . Полагаем, что в невозмущенном движении свободная поверхность Γ_0 и

поверхность слива Σ перпендикулярны вектору $\vec{g}_0$ интенсивности внешнего поля массовых сил.

Примем, что высота $3Y - \delta$ гораздо меньше характерного размера полости маятника - r_0 , $\delta \ll r_0$. Тогда основной закон гидростатики и уравнение Бернулли для перепада давления на поверхности слива Σ в системе координат $Oxyz$ в невозмущенном состоянии запишутся в виде:

$$p^0(x, t) = p_a - g\rho(x - h), \quad (1)$$

$$p_1^0(h_\Sigma) - p_2^0(h_\Sigma) = \xi\rho \frac{(V_{r\Sigma}^0)^2}{2}, \quad (2)$$

где ξ - приведённый коэффициент гидравлического сопротивления полости маятника, отнесённый к скорости V_Σ^0 , $h(t), h_\Sigma$ - расстояния от точки O до свободной поверхности и поверхности слива, $p_a = \text{const}$ - давление над свободной поверхностью Γ_0 , $p_1^0(h_\Sigma), p_2^0(h_\Sigma)$ - соответственно давление жидкости перед поверхностью слива и за поверхностью.

Рассмотрим малые колебания жидкости и маятника, близкие к состоянию невозмущённого движения. Предположим, что в возмущённом движении поля абсолютного и относительного смещений, поля абсолютного и относительного скоростей частиц жидкости приобретает малые отклонения $\vec{w}, \vec{w}_r, \vec{V}, \vec{V}_r$ от их невозмущённых значений. Их будем считать величинами первого порядка малости. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше, имеем $\vec{V} = \vec{w}, \vec{V}_r = \vec{w}_r$. Тогда перепад давления на $3Y$ в возмущенном движении принимает вид:

$$p_1^0(h_\Sigma, t) + p(h_\Sigma, t) - p_2^0(h_\Sigma, t) = \xi\rho \frac{(V_{r\Sigma}^0 + V_{r\Sigma})^2}{2} \text{ при } x = h_\Sigma. \quad (3)$$

Линеаризуя условия (3), получаем:

$$p = [p_a - g\rho(h_{1\Sigma} - h_1)] + \gamma\rho \cdot \vec{V}_{r\Sigma} \cdot \vec{n}_\Sigma \text{ при } x = h_\Sigma, \quad (4)$$

где $\vec{n}_\Sigma$ - внешние нормали к поверхности Σ , γ - обобщённый коэффициент сопротивления поверхности слива $\gamma = \xi V_{r\Sigma}^0$.

Уравнение движения жидкости в подвижной системе координат:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left[\frac{1}{2} \vec{V}^2 - \vec{V} \cdot \vec{V}_e \right] + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Pi = 0 \quad (5)$$

Представляем:

$$\vec{V} = \vec{V}_a^0 + \vec{V}_a; \quad \vec{V}_a^0 = \vec{V}_r^0; \quad \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{\mathcal{G}} \times \vec{r} + \vec{V}_r. \quad (6)$$

Здесь $\vec{V}_a^0, \vec{V}_r^0$ - абсолютная и относительная скорости жидкости в невозмущённом состоянии; $\vec{V}_a, \vec{V}_r, \vec{V}_e$ - отклонения абсолютной, относительной и переносной скорости жидкости от невозмущённого состояния.

Поставив соотношение (6) в уравнение (5), получим для возмущённого состояния уравнение движения жидкости:

$$\frac{\partial \vec{V}_a}{\partial t} + \nabla \left[\vec{V}_r^0 \cdot (\vec{V}_a - \vec{V}_e) + \frac{1}{2} \vec{V}_a^2 - \vec{V}_a \cdot \vec{V}_e \right] + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Pi = 0. \quad (7)$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше, будем иметь уравнение движения жидкости в линеаризованном виде:

$$\frac{\partial \vec{V}_a}{\partial t} + \nabla \left[\vec{V}_r^0 \cdot (\vec{V}_a - \vec{V}_e) \right] + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Pi = 0. \quad (8)$$

Возмущенное движение жидкости необходимо дополнить уравнением неразрывности $\nabla \cdot \vec{V}_a = 0$, условием непротекания через смачиваемую поверхность S в виде $\vec{V}_a \cdot \vec{n} = \vec{V}_e \cdot \vec{n}$ и начальными условиями $\vec{w}(x, y, x, 0) = \vec{w}^0(x, y, z)$, $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(x, y, x, 0) = \vec{V}^0(x, y, z)$.

Проинтегрировав уравнение неразрывности по объёму, занимаемому жидкостью, для любого момента времени t , получим дополнительное интегральное условие $\int_{\Gamma} \vec{V}_r \cdot \vec{n}_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{V}_r \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma$, которому должны подчиняться поле скоростей в рассматриваемой задаче.

Постановка краевой задачи для потенциала абсолютных скоростей

Предполагаем возмущенное движение жидкости потенциальным ($\nabla \times \vec{V}_a = 0$) и введем потенциал абсолютной скорости – функцию $\Phi(x, y, z, t)$, который при малых движениях связан с полем смещений $\vec{w}(x, y, z, t)$ и полем скоростей $\vec{V}_a(x, y, z, t)$ очевидными формулами:

$$\vec{w}(x, y, z, t) = \int \nabla \Phi(x, y, z, t) dt, \quad \vec{V}_a(x, y, z, t) = \nabla \Phi(x, y, z, t). \quad (9)$$

Подставив выражения (9) в уравнение (8), получим линеаризованный интеграл Коши-Лагранжа, выраженный через потенциал скоростей:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_r^0 \cdot \nabla \Phi + \frac{p - p_a}{\rho} + g(x - h) - \vec{V}_r^0 \cdot \vec{V}_e = c(t), \quad (10)$$

где $c(t)$ - произвольная функция времени.

Уравнение возмущённой свободной поверхности жидкости при малых колебаниях запишется в виде:

$$x = h + f(y, z, t), \quad h(t) = h_0 - V_r^0 t, \quad (11)$$

где $f(y, z, t) = \vec{w}_{\Gamma}(h, y, z, t) \cdot \vec{n}_{\Gamma}$ - проекция вектора смещений частиц свободной поверхности на ось $O_1 x_1$; h_0 - глубина жидкости в начальный момент времени.

Из уравнения (10), используя выражения (11) со вниманием что, давление на свободной поверхности: $p = p_a$, получим граничное условие на поверхности Γ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_r^0 \cdot \nabla \Phi + g \vec{w} \cdot \vec{n}_\Gamma - \vec{V}_r^0 \cdot \vec{V}_e = c(t). \quad (12)$$

Аналогично, подставляя (4) в (10), получаем граничное условие на поверхности слива Σ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_r^0 \cdot \nabla \Phi + \gamma \frac{\partial \vec{w}_r}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma - \vec{V}_r^0 \cdot \vec{V}_e = c(t). \quad (13)$$

С учетом отношений $\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r$, $\vec{V}_e = \partial \vec{w}_e / \partial t$, перепишем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_r^0 \cdot \nabla \Phi + \gamma \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{V}_e \right) \cdot \vec{n}_\Sigma - \vec{V}_r^0 \cdot \vec{V}_e = c(t). \quad (14)$$

Используя уравнение неразрывности, условие протекания, начальные условия и учитывая, что на Γ : $\vec{V}_r^0(h) = -\vec{V}_{0\Gamma}$ и на Σ : $\vec{V}_r^0(h_\Sigma) = -\vec{V}_{0\Sigma}$, получаем постановку краевой задачи для полости произвольной формы:

$$\Delta \Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = (\vec{g} \times \vec{r}) \cdot \vec{n} \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \vec{V}_{0\Gamma} \cdot \nabla \Phi + g \vec{w} \cdot \vec{n}_\Gamma + \vec{V}_{0\Gamma} \cdot \vec{V}_e = c(t) \text{ на } \Gamma, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \vec{V}_{0\Sigma} \cdot \nabla \Phi + \gamma \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma + (\vec{V}_{0\Sigma} - \gamma \cdot \vec{n}_\Sigma) \cdot \vec{V}_e = c(t) \text{ на } \Sigma,$$

$$\vec{w}_\Gamma = \vec{w}_\Gamma^{(0)}(y, z), \quad \vec{w}_\Sigma = \vec{w}_\Sigma^{(0)}(y, z), \quad \frac{\partial \vec{w}_\Gamma}{\partial t} = \vec{V}_\Gamma^{(0)}(y, z), \quad \frac{\partial \vec{w}_\Sigma}{\partial t} = \vec{V}_\Sigma^{(0)}(y, z),$$

где $\vec{w}_\Gamma = \int_t \frac{\partial \Phi}{\partial x}(h, y, z, t) dt$, $\vec{w}_\Sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(h_\Sigma, y, z, t)$ - смещение и скорость частиц жидкости на поверхностях Γ_0 и Σ соответственно, $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к поверхности S .

Колебания сферической ёмкости с полостью, частично заполненной жидкостью

Рассмотрим задачу о колебаниях сферического бака, вращающегося вокруг оси $O_1 y_1$, с полостью, частично заполненной жидкостью, вытекающей через заборные устройства из бака. В этом случае угол малого поворота $\vec{\mathcal{G}}(t) = \mathcal{G}(t) \cdot \vec{e}_2$.

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \dot{\vartheta} \cdot L \cdot \sin\theta \sin\eta \text{ на } S \text{ (} R=1\text{)}, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \int \frac{\partial\Phi}{\partial x} dt + V_{0\Gamma} \cdot V_{ex} &= 0 \text{ на } \Gamma_0 \text{ (} x=h\text{)}, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Sigma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x} + (\gamma + V_{0\Sigma}) \cdot V_{ex} &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ (} x=h_\Sigma\text{)}, \\
\Phi(x, r, \eta, t) &= \Phi^{(0)} \text{ при } t=0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Чтобы легче отыскать потенциал Φ , представим его в виде суммы трех функций:

$$\Phi(x, r, \eta, t) = \psi(x, r, \eta) \cdot \dot{\vartheta}(t) + \varphi_1(x, r, \eta) \cdot \dot{s}(t) + \varphi_2(x, r, \eta) \cdot \dot{p}(t). \tag{19}$$

Выберем выражение для функций $F = \psi \cdot \dot{\vartheta}$ и $\Phi_1 = \varphi_1 \cdot \dot{s}$, $\Phi_2 = \varphi_2 \cdot \dot{p}$ таким образом, чтобы 1-е граничное условие удовлетворялось с помощью функции F , а 2-е и 3-е условие – с помощью суммы функций F и Φ_1 , Φ_2 .

Перепишем систему (18) в виде:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \dot{\vartheta} \cdot L \cdot \sin\theta \sin\eta \text{ на } S \text{ (} R=1\text{)}, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \int \frac{\partial\Phi}{\partial x} dt + V_{0\Gamma} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \text{ на } \Gamma_0 \text{ (} x=h\text{)}, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Sigma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x} + (\gamma + V_{0\Sigma}) \cdot \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \text{ на } \Sigma \text{ (} x=h_\Sigma\text{)}, \\
\Phi(x, r, \eta, t) &= \Phi^{(0)} \text{ при } t=0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Тогда задача для функции $\psi(x, r, \eta)$, по идее Н.Е. Жуковского, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\psi}{\partial R} = L \sin\theta \sin\eta \text{ на } S \text{ (} R=1\text{)}, \\
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= r \sin\eta \text{ на } \Gamma_0 \text{ (} x=h\text{)}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = r \sin\eta \text{ на } \Sigma \text{ (} x=h_\Sigma\text{)},
\end{aligned} \tag{21}$$

а функции $\varphi_1(x, r, \eta)$ и $\varphi_2(x, r, \eta)$ отвечают условиям:

$$\Delta\varphi_1 = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial R} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \omega_1^2 \cdot \varphi_1 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial\varphi_1(x, r_0, \frac{\pi}{2})}{\partial x} = 1 \text{ на } \Gamma_0 \tag{22}$$

$$\Delta\varphi_2 = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial R} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \omega_2^2 \cdot \varphi_2 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi_2(x, r_0, \frac{\pi}{2})}{\partial x} = 1 \text{ на } \Sigma \tag{23}$$

Здесь последние условия в (22) и (23) – условия нормировки.

Решаем задачу (21) вариационным методом. Вариационная формулировка: найти минимум функционала [11]:

$$J(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\nabla \psi)^2 d\tau - \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial\psi}{\partial x} d\Gamma - \int_S \psi \frac{\partial\psi}{\partial R} dS + \int_{\Sigma} \psi \frac{\partial\psi}{\partial x} d\Sigma. \tag{24}$$

Пусть

$$\psi(x, r, \eta) = \psi^*(x, r) \sin \eta = \sum_{k=1}^N c_k U_k(x, r) \sin \eta, \quad (25)$$

где

$U_k(x, r) = R^k P_k^{(1)}(\cos \theta)$ - координатные функции,

$P_k^{(1)}(\cos \theta) = \sin \theta \frac{d}{d(\cos \theta)} P_k(\cos \theta)$ - присоединенные функции Лежандра первой степени,

$P_k(\cos \theta) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{d(\cos \theta)^k} (\cos^2 \theta - 1)^k$ - полином Лежандра степени k ,

N - порядок приближения решений вариационных задач (24).

Поставив (25) в (24), из условия минимума функции $J(\psi)$ получаем систему уравнений для определения коэффициентов c_k [11]:

$$\sum_{k=1}^N D_{mk} c_k = d_m, \quad m = 1, \dots, N \quad (26)$$

или в матричном виде: $D \cdot c = d$, здесь

$$D_{mk} = \pi \left(\int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} U_{mS} \left(\frac{\partial U_k}{\partial r} \right)_S \sin \theta d\theta + \int_0^{r_0} U_{m\Gamma} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x} \right)_\Gamma r dr - \int_0^{r_\Sigma} U_{m\Sigma} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x} \right)_\Sigma r dr \right) \quad (27)$$

$$d_m = \pi \left(L \int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} U_{mS} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{r_0} U_{m\Gamma} r^2 dr - \int_0^{r_\Sigma} U_{m\Sigma} r^2 dr \right)$$

Из уравнения (26) получаем:

$$c = D^{-1} \cdot d. \quad (28)$$

В таблице №1 представлены решения вариационной задачи (24) при $r_\Sigma = 0, 2$, $N = 10$ для различных значений L и h .

Таблица №1 – Коэффициенты c_k , полученные при решении вариационной задачи (24).

	$L = 1, h = -0, 2$	$L = 1, h = 0, 4$	$L = 1, 5, h = -0, 3$	$L = 1, 5, h = 0, 2$
c_1	2,06452	1,28824	2,74316	1,99747
c_2	0,48177	0,16430	0,57898	0,25221
c_3	0,24358	0,07848	0,36832	0,09890
c_4	0,23326	0,02116	0,42683	0,02013
c_5	0,28403	-0,00855	0,50638	-0,00034
c_6	0,27157	-0,01531	0,45550	0,00811
c_7	0,18685	-0,01119	0,29868	0,01677
c_8	0,09134	-0,00424	0,14093	0,01630
c_9	0,02967	-0,00056	0,04470	0,00900
c_{10}	0,00545	0,00068	0,00787	0,00293

Перейдем теперь к определению функций $\varphi_1(x, r, \eta)$ и $\varphi_2(x, r, \eta)$. Функции $\varphi_1(x, r, \eta)$ и $\varphi_2(x, r, \eta)$ представляют решения вариационных задач: найти минимум функционалов [12]:

$$\begin{aligned} J_1(\varphi_1) &= \int_{\tau} (\nabla \varphi_1)^2 d\tau - \omega_1^2 \int_{\Gamma_0} (\varphi_1)^2 d\Gamma, \\ J_2(\varphi_2) &= \int_{\tau} (\nabla \varphi_2)^2 d\tau - \omega_2^2 \int_{\Sigma} (\varphi_2)^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (29)$$

Предполагаем функций $\varphi_1(x, r, \eta)$ и $\varphi_2(x, r, \eta)$ в видах:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, r, \eta) &= \varphi_1^*(x, r) \cdot \sin \eta, \\ \varphi_2(x, r, \eta) &= \varphi_2^*(x, r) \cdot \sin \eta. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя метод Третьяка, находим решения поставленных вариационных задач (29):

$$\varphi_1(x, r, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}(x, r, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N a_{nk} U_k(x, r) \right) \cdot \sin \eta, \quad (31)$$

$$\varphi_2(x, r, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n}(x, r, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N b_{nk} U_k(x, r) \right) \cdot \sin \eta. \quad (32)$$

Для удовлетворения условиям нормировки перепишем функций $\varphi_1(x, r, \eta)$ и $\varphi_2(x, r, \eta)$ в видах:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, r, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^N a_{nk} U_k(x, r)}{\sum_{k=1}^N a_{nk} \left. \frac{\partial U_k(x, r)}{\partial x} \right|_{(x=h_1, r=r_0)}} \right) \cdot \sin \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}^*(x, r) \cdot \sin \eta, \\ \varphi_2(x, r, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^N b_{nk} U_k(x, r)}{\sum_{k=1}^N b_{nk} \left. \frac{\partial U_k(x, r)}{\partial x} \right|_{(x=h_2, r=r_2)}} \right) \cdot \sin \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n}^*(x, r) \cdot \sin \eta. \end{aligned} \quad (33)$$

В таблице №2 представлены решения вариационных задач (29) при $r_2 = 0,2$, $n = 1$, $N = 10$, $h = 0,1$.

Таблица №2 – Коэффициенты a_{nk} , b_{nk} и собственные частоты первого и второго тона колебаний жидкости $\omega_1^{(0)}$ в сферической емкости, полученные при решении вариационных задач (29).

a_{11}	0,81602	b_{11}	0,01469	a_{21}	-0,91530	b_{21}	0,20185
a_{12}	0,44365	b_{12}	0,07193	a_{22}	-1,60699	b_{22}	0,41963
a_{13}	0,21012	b_{13}	0,13618	a_{23}	-2,09595	b_{23}	0,91046
a_{14}	0,07703	b_{14}	0,23365	a_{24}	-2,14245	b_{24}	1,39487
a_{15}	0,02442	b_{15}	0,29316	a_{25}	-1,77138	b_{25}	1,81710
a_{16}	0,01403	b_{16}	0,31604	a_{26}	-1,19383	b_{26}	1,85151
a_{17}	0,01382	b_{17}	0,25991	a_{27}	-0,64801	b_{27}	1,55360
a_{18}	0,01026	b_{18}	0,17867	a_{28}	-0,27310	b_{28}	1,00441
a_{19}	0,00479	b_{19}	0,08324	a_{29}	-0,08211	b_{29}	0,48072
a_{110}	0,00104	b_{110}	0,03022	a_{210}	-0,01391	b_{210}	0,15151
$\omega_1^{(0)} = 1,29012$				$\omega_2^{(0)} = 2,31517$			

Теперь разложим функцию ψ в ряды по функциям φ_{1n} на свободной поверхности Γ и φ_{2n} на поверхности слива Σ :

$$\Psi(x, r, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} \varphi_{1n} \text{ на } \Gamma_0, \quad \Psi(x, r, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \varphi_{2n} \text{ на } \Sigma. \quad (34)$$

В формулах (34) коэффициенты B_{1n} и B_{2n} определяются так:

$$B_{1n} = \frac{\int_0^{r_0} (\Psi^* \varphi_{1n})_{\Gamma_0} r dr}{\int_0^{r_0} (\varphi_{1n}^* \varphi_{1n})_{\Gamma_0} r dr}, \quad B_{2n} = \frac{\int_0^{r_\Sigma} (\Psi^* \varphi_{2n})_{\Sigma} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} (\varphi_{2n}^* \varphi_{2n})_{\Sigma} r dr}. \quad (35)$$

Подставив выражение (19) с учетом (25), (33) и (34) во 2-е и 3-е граничные условия задачи (20), получим:

$$\left[\varphi_{1n}^* \ddot{S}_n - V_{0\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial h} + \frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \right) \dot{S}_n + \varphi_{2n}^* \ddot{p}_n - V_{0\Gamma} \frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial h} \dot{p}_n + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} S_n + B_{1n} \varphi_{1n}^* \ddot{g} + B_{1n} \frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} g \right] \cdot \sin \eta = 0, \quad (36)$$

$$\left[\varphi_{2n}^* \ddot{p}_n - \left(V_{0\Gamma} \frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial h} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \right) \dot{p}_n + \varphi_{1n}^* \ddot{S}_n - V_{0\Gamma} \frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial h} \dot{S}_n + B_{2n} \varphi_{2n}^* \ddot{g} \right] \cdot \sin \eta = 0. \quad (37)$$

Умножив уравнения (36) на $\partial\varphi_{n1}/\partial x$, (37) на $\partial\varphi_{n2}/\partial x$ и проинтегрировав по поверхностям Γ_0 и Σ соответственно, имеем:

$$\begin{aligned}\ddot{s}_n + \alpha_n^{(1)} \ddot{p}_n + V_{0\Gamma} \varepsilon_n^{(1)} \dot{p}_n + V_{0\Gamma} \delta_n^{(1)} \dot{s}_n + \omega_n^2 s_n + \alpha_{n\psi}^{(1)} \ddot{g} + e_{n\psi}^{(1)} g &= 0, \\ \ddot{p}_n + \alpha_n^{(2)} \ddot{s}_n + V_{0\Gamma} \varepsilon_n^{(2)} \dot{s}_n + [V_{0\Gamma} \delta_n^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_n] \dot{p}_n + \alpha_{n\psi}^{(2)} \ddot{g} &= 0, \quad (n=1, 2, 3...),\end{aligned}\quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(1)} &= \frac{\int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \varphi_{2n}^* \right)_{\Gamma_0} r dr}{\int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \varphi_{1n}^* r \right)_{\Gamma_0} dr}, \quad \varepsilon_n^{(1)} = \frac{-\int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial h} \right)_{\Gamma_0} r ddr}{\int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \varphi_{1n}^* \right)_{\Gamma_0} r dr}, \quad \omega_n^2 = \frac{\int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \right)_{\Gamma_0} r dr}{\int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \varphi_{1n}^* \right)_{\Gamma_0} r dr}, \\ \delta_n^{(1)} &= \frac{-\int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial h} \right)_{\Gamma_0} r dr - \int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \right)_{\Gamma_0} r dr}{\int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \varphi_{1n}^* \right)_{\Gamma_0} r dr}, \quad \alpha_{n\psi}^{(1)} = B_{1n}, \quad e_{1\psi}^{(1)} = B_{1n} \omega_n^2,\end{aligned}\quad (39)$$

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(2)} &= \frac{\int_0^{r_\Sigma} \left(\varphi_{1n}^* \frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \right)_{\Sigma} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \varphi_{2n}^* \right)_{\Sigma} r dr}, \quad \varepsilon_n^{(2)} = \frac{-\int_0^{r_\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial h} \right)_{\Sigma} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \varphi_{2n}^* \right)_{\Sigma} r dr}, \\ \delta_n^{(2)} &= \frac{-\int_0^{r_\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial h} \right)_{\Sigma} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \varphi_{2n}^* \right)_{\Sigma} r dr}, \quad \sigma_n = \frac{-\int_0^{r_\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \right)_{\Sigma} r dr}{\int_0^{r_\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \varphi_{2n}^* \right)_{\Sigma} r dr}, \quad \alpha_{n\psi}^{(2)} = B_{2n}.\end{aligned}\quad (40)$$

Теперь напомним уравнение возмущенного вращения бака относительно оси $O_1 y_1$. Предположим, что за время одного периода колебаний жидкости и бака глубина жидкости меняется мало. Тогда уравнение движения бака может быть записать в виде [11]:

$$J_{01} \ddot{g} - mg x_c g + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)} s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)} p_n = M_{o_1 y_1}, \quad (41)$$

где $J_{01} = J_{01}^{(0)} + J_{01}^{(1)}$, $J_{01}^{(0)}$ и $J_{01}^{(1)}$ - момент инерции сухого бака и момент инерции присоединенной массы жидкости относительно оси $O_1 y_1$, $\lambda_{0n}^{(1)}, \lambda_{0n}^{(2)}, \lambda_{1n}^{(1)}, \lambda_{1n}^{(2)}$ -

коэффициенты при $\ddot{s}_n, \ddot{p}_n, s_n, p_n$, соответственно, x_c, m - координата центра массы жидкости относительно точки O_1 и масса жидкости.

Введем безразмерные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \bar{J}_{01} &= \frac{J_{01}}{\rho R_0^5}, \quad \bar{\lambda}_{0n}^{(1)} = \frac{\lambda_{0n}^{(1)}}{\rho R_0^5}, \quad \bar{\lambda}_{0n}^{(2)} = \frac{\lambda_{0n}^{(2)}}{\rho R_0^5}, \quad \bar{\lambda}_{1n}^{(1)} = \frac{\lambda_{1n}^{(1)}}{\rho g R_0^4}, \\ \bar{\lambda}_{1n}^{(2)} &= \frac{\lambda_{1n}^{(2)}}{\rho g R_0^4}, \quad \bar{m} = \frac{m}{\rho R_0^3}, \quad \bar{x}_c = \frac{x_c}{R_0}, \quad \bar{M}_{o_1 y_1} = \frac{M_{o_1 y_1}}{\rho g R_0^4}. \end{aligned} \quad (42)$$

Дальше знак «-» над безразмерными коэффициентами также будем опускать.

Перепишем уравнение движения бака в безразмерной форме:

$$J_{01} \ddot{\vartheta} - m x_c \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)} s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)} p_n = M_{o_1 y_1}. \quad (43)$$

Все гидродинамические коэффициенты определяются по формулам:

$$\begin{aligned} J_{01}^{(1)} &= \iint_{\Gamma \cup S \cup \Sigma} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \pi \left[\int_0^{r_0} (\psi^*)_{\Gamma_0} r^2 dr + L \int_{\theta_0}^{\theta_{\Sigma}} (\psi^*)_S \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_{\Sigma}} (\psi^*)_{\Sigma} r^2 dr \right], \\ \lambda_{0n}^{(1)} &= \iint_{\Gamma \cup S \cup \Sigma} \varphi_{1n} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \pi \left[\int_0^{r_0} (\varphi_{1n}^*)_{\Gamma_0} r^2 dr + L \int_{\theta_0}^{\theta_{\Sigma}} (\varphi_{1n}^*)_S \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_{\Sigma}} (\varphi_{1n}^*)_{\Sigma} r^2 dr \right], \\ \lambda_{0n}^{(2)} &= \iint_{\Gamma \cup S \cup \Sigma} \varphi_{2n} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \pi \left[\int_0^{r_0} (\varphi_{2n}^*)_{\Gamma_0} r^2 dr + L \int_{\theta_0}^{\theta_{\Sigma}} (\varphi_{2n}^*)_S \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_{\Sigma}} (\varphi_{2n}^*)_{\Sigma} r^2 dr \right], \\ \lambda_{1n}^{(1)} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \pi \int_0^{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_{1n}^*}{\partial x} \right)_{\Gamma_0} r^2 dr, \quad \lambda_{1n}^{(2)} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \left(\frac{\partial \varphi_{2n}^*}{\partial x} \right)_{\Sigma} r^2 dr, \\ x_{co} &= \frac{3(h+h_{\Sigma})(2-h^2-h_{\Sigma}^2)}{4(3-h^2-hh_{\Sigma}-h_{\Sigma}^2)}, \quad x_c = x_{co} - L, \quad m = \frac{2}{3} \pi (h-h_{\Sigma}), \\ J_{01}^{(TB)} &= m(x_c^2 - x_{co}^2) + \pi \left(\frac{h-h_{\Sigma}}{4} + \frac{h^3-h_{\Sigma}^3}{6} - \frac{3(h^5-h_{\Sigma}^5)}{20} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Зависимости величин $J_{01}^{(1)}, \lambda_{01}^{(1)}, \lambda_{01}^{(2)}, \lambda_{11}^{(1)}, \lambda_{11}^{(2)}$ от глубины жидкости h иллюстрированы рис.3,4 и 5.

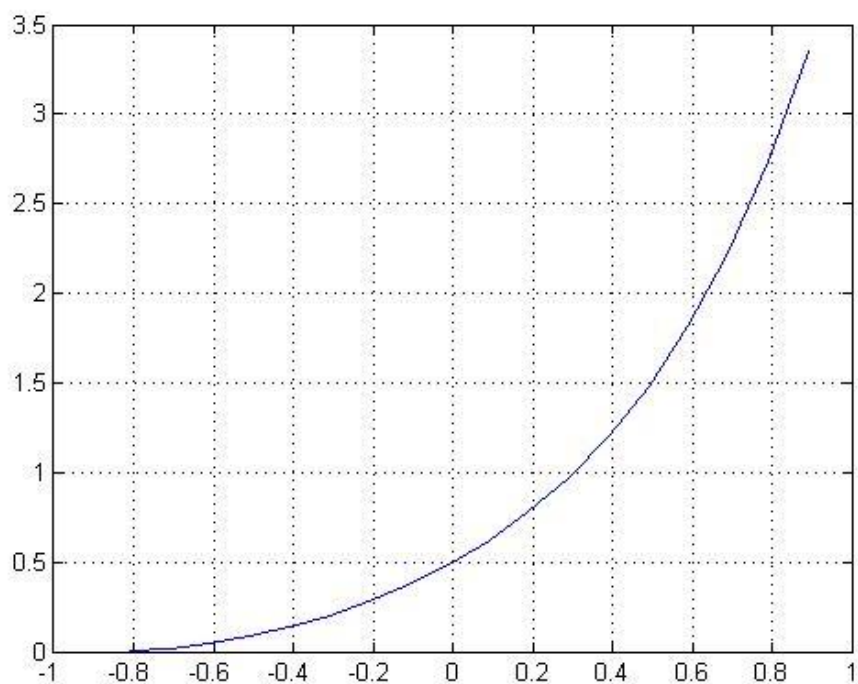


Рис.3 – Зависимость момента инерции $J_{01}^{(1)}$ от глубины жидкости.

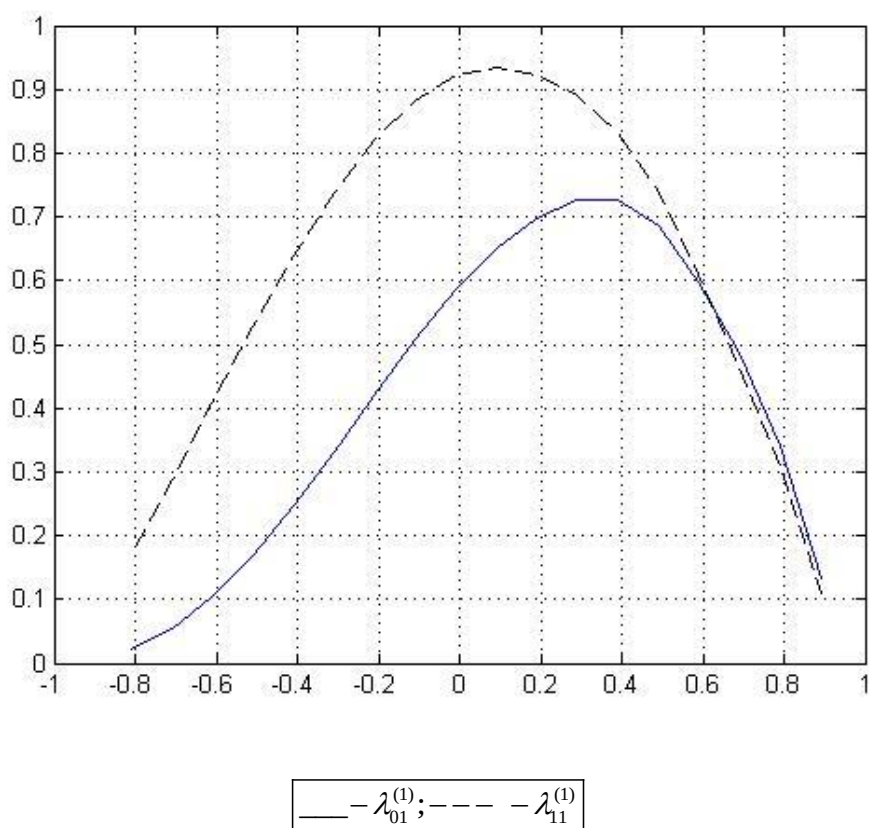


Рис.4 – Зависимости коэффициентов $\lambda_{01}^{(1)}$, $\lambda_{11}^{(1)}$ от глубины жидкости.

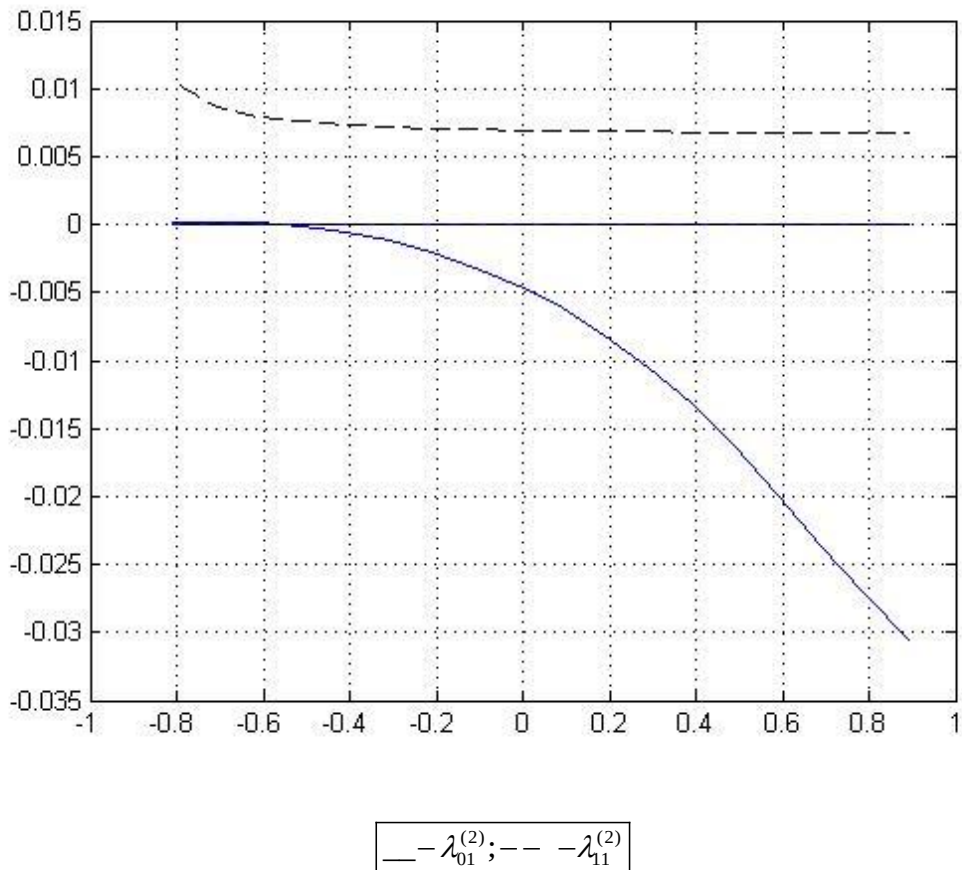


Рис.5 – Зависимости коэффициентов $\lambda_{01}^{(2)}$, $\lambda_{11}^{(2)}$ от глубины жидкости.

Итого, получим систему уравнений поперечных колебаний системы бака - жидкости:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_n + V_{0\Gamma} \delta_n^{(1)} \dot{s}_n + \omega_n^2 s_n + \alpha_n^{(1)} \ddot{p}_n + V_{0\Gamma} \varepsilon_n^{(1)} \dot{p}_n + \alpha_{n\gamma}^{(1)} \ddot{\mathcal{G}} + e_{n\gamma}^{(1)} \mathcal{G} &= 0, \\ \alpha_n^{(2)} \ddot{s}_n + V_{0\Gamma} \varepsilon_n^{(2)} \dot{s}_n + \ddot{p}_n + [V_{0\Gamma} \delta_n^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_n] \dot{p}_n + \alpha_{n\gamma}^{(2)} \ddot{\mathcal{G}} &= 0, \quad (n=1, 2, 3...), \quad (45) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)} s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)} p_n + J_{0_1} \ddot{\mathcal{G}} - m \chi_c \mathcal{G} &= M_{o_1 y_1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим собственное движение рассматриваемой механической системы т.е. $M_{o_1 y_1} = 0$. Для сравнения результатов расчета системы (45) рассмотрим два случая:

1. Определение собственных частот колебаний системы при учете только главного тона ($n=1$).

Положим $s_1 = s_1^0 e^{\Omega t}$, $p_1 = p_1^0 e^{\Omega t}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 e^{\Omega t}$. Из системы уравнений (45), получим:

$$\begin{bmatrix} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \delta_1^{(1)} \Omega + \omega_1^2 & \alpha_1^{(1)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_1^{(1)} \Omega & \alpha_{1\psi}^{(1)} \Omega^2 + e_{1\psi}^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_1^{(2)} \Omega & \Omega^2 + [V_{0\Gamma} \delta_1^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_1] \Omega & \alpha_{1\psi}^{(2)} \Omega^2 \\ \lambda_{01}^{(1)} \Omega^2 + \lambda_{11}^{(1)} & \lambda_{01}^{(2)} \Omega^2 + \lambda_{11}^{(2)} & J_{01} \Omega^2 - m x_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^0 \\ p_1^0 \\ \mathcal{G}^0 \end{bmatrix} = 0, \quad (46)$$

$\begin{bmatrix} s_1^0 & p_1^0 & \mathcal{G}^0 \end{bmatrix}^T$ - собственный вектор амплитуд.

Из уравнения (46) следуем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \delta_1^{(1)} \Omega + \omega_1^2 & \alpha_1^{(1)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_1^{(1)} \Omega & \alpha_{1\psi}^{(1)} \Omega^2 + e_{1\psi}^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_1^{(2)} \Omega & \Omega^2 + [V_{0\Gamma} \delta_1^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_1] \Omega & \alpha_{1\psi}^{(2)} \Omega^2 \\ \lambda_{01}^{(1)} \Omega^2 + \lambda_{11}^{(1)} & \lambda_{01}^{(2)} \Omega^2 + \lambda_{11}^{(2)} & J_{01} \Omega^2 - m x_c \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

2.Определение собственных частот колебаний системы при учете двух первых тонов ($n=1, 2$).

Аналогично, положив $s_1 = s_1^0 e^{\Omega t}$, $p_1 = p_1^0 e^{\Omega t}$, $s_2 = s_2^0 e^{\Omega t}$, $p_2 = p_2^0 e^{\Omega t}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 e^{\Omega t}$, получим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \delta_1^{(1)} \Omega + \omega_1^2 & 0 & \alpha_1^{(1)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_1^{(1)} \Omega & 0 & \alpha_{1\psi}^{(1)} \Omega^2 + e_{1\psi}^{(1)} \\ 0 & \Omega^2 + V_{0\Gamma} \delta_2^{(1)} \Omega + \omega_2^2 & 0 & \alpha_2^{(1)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_2^{(1)} \Omega & \alpha_{2\psi}^{(1)} \Omega^2 + e_{2\psi}^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_1^{(2)} \Omega & 0 & \Omega^2 + [V_{0\Gamma} \delta_1^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_1] \Omega & 0 & \alpha_{1\psi}^{(2)} \Omega^2 \\ 0 & \alpha_2^{(2)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_2^{(2)} \Omega & 0 & \Omega^2 + [V_{0\Gamma} \delta_2^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_2] \Omega & \alpha_{2\psi}^{(2)} \Omega^2 \\ \lambda_{01}^{(1)} \Omega^2 + \lambda_{11}^{(1)} & \lambda_{02}^{(1)} \Omega^2 + \lambda_{12}^{(1)} & \lambda_{01}^{(2)} \Omega^2 + \lambda_{11}^{(2)} & \lambda_{02}^{(2)} \Omega^2 + \lambda_{12}^{(2)} & J_{01} \Omega^2 - m x_c \end{vmatrix} = 0 \quad (48)$$

При численном решении считаем бак – тонкостенный и его масса и момент инерции могут пренебречь ($J_{01}^{(0)} \approx 0$). Результаты вычислений корней уравнений (47) и (48) при $r_\Sigma = 0,2$, $N=10$, $L=1$ для различных значений $V_{0\Gamma}$, γ , h приведены в таблицах №3,4,5 и 6.

Таблица №3 – Собственные частоты колебаний бака с жидкостью, полученные при решении уравнения (47) с учетом $h = 0,4$, $V_{0\Gamma} = 0,04$.

γ	$\omega_{1,2}$	$\omega_{3,4}$	ω_5
4	-0,00201±0,88835i	-0,04758±1,45098i	-58,302
6	-0.00204±0.88835i	-0,04759±1,45098i	-72,412
10	-0,00207±0,88834i	-0,04761±1,45099i	-100,63
30	-0,00212±0,88834i	-0,04763±1,45099i	-241,74
50	-0,00213±0,88834i	-0,04764 - 1,45100i	-382,85
100	-0,00214±0,88834i	-0,04764±1,45100i	-735,62
	$\omega_0^{(0)}=0,81829$	$\omega_1^{(0)}=1,45716$	

Таблица №4 – Собственные частоты колебаний бака с жидкостью, полученные при решении уравнения (48)
с учетом $h = 0,4$, $V_{0\Gamma} = 0,04$.

γ	$\omega_{1,2}$	$\omega_{3,4}$	$\omega_{5,6}$	ω_7	ω_8
4	$-0,00194 \pm 0,88599i$	$-0,04759 \pm 1,45108i$	$-0,06233 \pm 2,56147i$	-58,393	-16794
6	$-0,00197 \pm 0,88599i$	$-0,04760 \pm 1,45108i$	$-0,06222 \pm 2,56147i$	-72,526	-20890
10	$-0,00200 \pm 0,88599i$	$-0,04761 \pm 1,45109i$	$-0,06209 \pm 2,56146i$	-100,79	-29083
30	$-0,00205 \pm 0,88598i$	$-0,04763 \pm 1,45110i$	$-0,06190 \pm 2,56146i$	-242,11	-70044
50	$-0,00207 \pm 0,88598i$	$-0,04764 \pm 1,45110i$	$-0,06185 \pm 2,56145i$	-383,44	-111006
100	$-0,00208 \pm 0,88598i$	$-0,04764 \pm 1,45110i$	$-0,06181 \pm 2,56145i$	-736,76	-213411
	$\omega_0^{(0)} = 0,81829$	$\omega_1^{(0)} = 1,45716$	$\omega_2^{(0)} = 2,44876$		

Таблица №5 – Собственные частоты колебаний бака с жидкостью, полученные при решении уравнения (48)
с учетом $h = 0,4$, $\gamma = 5$.

$V_{0\Gamma}$	$\omega_{1,2}$	$\omega_{3,4}$	$\omega_{5,6}$	ω_7	ω_8
0	$-0,00025 \pm 0,88613i$	$-0,00008 \pm 1,45155i$	$-0,00091 \pm 2,56239i$	-35,331	-10240
0,01	$-0,00031 \pm 0,88612i$	$-0,01183 \pm 1,45152i$	$-0,01620 \pm 2,56234i$	-42,863	-12391
0,02	$-0,00087 \pm 0,88609i$	$-0,02376 \pm 1,45143i$	$-0,03153 \pm 2,56216i$	-50,395	-14541
0,04	$-0,00195 \pm 0,88599i$	$-0,04760 \pm 1,45108i$	$-0,06227 \pm 2,56147i$	-65,459	-18842
0,06	$-0,00301 \pm 0,88582i$	$-0,07142 \pm 1,45051i$	$-0,09305 \pm 2,56031i$	-80,523	-23143
0,08	$-0,00403 \pm 0,88558i$	$-0,09523 \pm 1,44971i$	$-0,12385 \pm 2,55868i$	-95,587	-27444
0,1	$-0,00503 \pm 0,88528i$	$-0,11903 \pm 1,44867i$	$-0,15465 \pm 2,55659i$	-110,65	-31745

Таблица №6 – Собственные частоты колебаний бака с жидкостью, полученные при решении уравнения (48)
с учетом $V_{0\Gamma} = 0,02$, $\gamma = 10$.

h	$\omega_{1,2}$	$\omega_{3,4}$	$\omega_{5,6}$	ω_7	ω_8
-0,5	$-0,01193 \pm 1,09804i$	$-0,04975 \pm 1,96929i$	$-0,16919 \pm 3,68225i$	-118,39	-216,51
-0,3	$-0,04618 \pm 1,13414i$	$-0,10561 \pm 1,45052i$	$-0,03049 \pm 2,88914i$	-107,53	-728,73
-0,1	$-0,04720 \pm 1,04016i$	$-0,09879 \pm 1,23812i$	$-0,01453 \pm 2,66130i$	-100,45	-2431,0
0,01	$-0,01757 \pm 0,95734i$	$-0,06416 \pm 1,25507i$	$-0,01733 \pm 2,60258i$	-96,780	-5010,9
0,1	$-0,00782 \pm 0,91108i$	$-0,04926 \pm 1,28934i$	$-0,02135 \pm 2,57148i$	-91,425	-9756,6
0,3	$-0,00169 \pm 0,88003i$	$-0,02930 \pm 1,38776i$	$-0,03038 \pm 2,54548i$	-88,878	-66914
0,5	$-0,00059 \pm 0,89929i$	$-0,02115 \pm 1,53003i$	$-0,02633 \pm 2,60596i$	-82,562	-18072

Замечание: В таблицах №3 и №4 $\omega_0^{(0)} = \sqrt{\frac{m \cdot \chi_c}{J_{01}^{(TB)}}}$ – безразмерная собственная частота

«затвердевшей» жидкости ($J_{01}^{(TB)}$ – безразмерный момент инерции «затвердевшей»

жидкости относительно оси O_1y_1 , определенный по формулам (44)) а $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$ - безразмерные собственные частоты первого и второго тона колебаний жидкости в неподвижном баке [13].

Заключение

В заключение можно отметить, что полученные результаты подтверждают выводы, что спектр колебаний бака с жидкостью обладает двумя ветвями собственных значений: дискретного множества комплексно-сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси и дискретного множества вещественных чисел. Случай отрицательных вещественных составляющих решений является колебательная составляющая устойчивости. Случае отрицательных вещественных корней является аperiодическая устойчивость собственных колебаний.

Список литературы

1. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 500 с.
2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела. Киев: Наукова думка, 1990. 296 с.
3. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
4. Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наукова думка, 1984. 212 с.
5. Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 7. DOI: [10.18698/2308-6033-2012-7-285](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-7-285)
6. Лимарченко О.С., Матараццо Д., Ясинский В.В. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. Киев: ГНОЗИС, 2002. 304 с.
7. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Проблемы динамики перераспределения топлива в крупногабаритных ракетно-космических объектах // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 8. DOI: [10.18698/2308-6033-2012-8-457](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-8-457)
8. Степанова М.И., Темнов А.Н. Малые движения жидкости с поверхностной диссипацией энергии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 4. С. 99-110.
9. Дьяченко М.И., Орлов В.В., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических ёмкостях // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С.175-192. DOI: [10.7463/1113.0623923](https://doi.org/10.7463/1113.0623923)

10. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива непостоянного объёма в сферической ёмкости // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 12. С. 426-439. DOI: [10.7463/1214.0744115](https://doi.org/10.7463/1214.0744115)
11. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 540 с.
12. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчёта собственных частот колебаний ограниченного объёма жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 270 с.
13. Нгуен З.Х. Собственные колебания жидкости в сферических ёмкостях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2015. № 2. С. 84-90. DOI: [10.18698/0236-3941-2015-2-84-90](https://doi.org/10.18698/0236-3941-2015-2-84-90)

Oscillations of the Physical Pendulum Having a Spherical Cavity with Effluent

H.D. Nguyen^{1,*}, A.N. Temnov¹

[*freedom_dh@yahoo.com.vn](mailto:freedom_dh@yahoo.com.vn)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: small fluctuations, the fluid draining surface, the dissipation, the physical pendulum

Many authors have considered a problem of small fluctuations of an incompressible ideal fluid, partially filled a movable arbitrarily shaped tank. Long list of references in the field concerned proves it. The article presents a solution to the problem of natural oscillations of the axisymmetric pendulum with a spherical cavity, partially filled with fluid, with the boundary conditions at the free surface and resistance surface - fluid draining surface. The relevance of the problems is stipulated by finding the eigenvalues and frequency of oscillation equations of perturbed motion of axisymmetric pendulum and fluid with dissipation available on the boundary surfaces.

The paper also considers a variational adjustment of the auxiliary boundary value problems. Associated Legendre functions are used in solving the variational problems, as the coordinate functions. Next, after substituting solutions of variational problems in the boundary conditions and upon the following mathematical operations based on the equations of the pendulum motion was obtained a characteristic equation. The validity of numerical results is confirmed by proximity when comparing with the result of calculating frequencies of natural fluctuations of the "solidified" fluid and frequencies obtained from the solution to the problem of natural fluid fluctuations in a spherical tank with the constant depth of fluid. All numerical calculations were performed using the Matlab computing environment.

References

1. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Dynamics of missiles]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 500 p. (in Russian).
2. Lukovskiy I.A. *Vvedenie v nelineynuyu dinamiku tverdogo tela* [Introduction to nonlinear rigid body dynamics]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1990. 296 p. (in Russian).
3. Moiseev N.N. Rumyantsev V.V. *Dinamika tel s polostyami, sodержashchimi zhidkost'* [Dynamics of bodies with cavities containing liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 440 p. (in Russian).

4. Lukovskiy I.A., Barnyak M.Ya., Komarenko A.N. *Priblizhennyye metody resheniya zadach dinamiki ograniченного ob'ema zhidkosti* [Approximate methods for solving problems of dynamics of limited liquid volume]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1984. 212 p. (in Russian).
5. Kolesnikov K.S., Pozhalostin A.A., Shkapov P.M. Problems of Hydromechanical Systems Dynamics in Proceedings of the Zhukovsky Theoretical Mechanics Department. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, no. 7. DOI: [10.18698/2308-6033-2012-7-285](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-7-285) (in Russian).
6. Limarchenko O.S., Mataratstso D., Yasinskiy V.V. *Dinamika vrashchayushchikhsya konstruktsiy s zhidkost'yu* [Dynamics of rotating structures with liquid]. Kiev, GNOZIS Publ., 2002. 304 p. (in Russian).
7. D'yachenko M.I., Temnov A.N. Problems of Fuel Redistribution Dynamics in Large-Sized Rocket and Space Objects. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, no. 8. DOI: [10.18698/2308-6033-2012-8-457](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-8-457) (in Russian).
8. Stepanova M.I., Temnov A.N. Small motions of liquid with surface energy dissipation. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2011, no. 4, pp. 99-110. (in Russian).
9. D'yachenko M.I., Orlov V.V., Temnov A.N. A problem of propellant oscillations in cylindrical and conical tanks. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 11, pp. 175-192. DOI: [10.7463/1113.0623923](https://doi.org/10.7463/1113.0623923) (in Russian).
10. Nguyen H.D., Temnov A.N. Fluid Fuel Fluctuations in the Spherical Tank. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 12, pp. 426-439. DOI: [10.7463/1113.0623923](https://doi.org/10.7463/1113.0623923) (in Russian)
11. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost'yu* [Dynamics of rigid body with cavities partially filled with liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. 540 p. (in Russian).
12. Moiseev N.N., Petrov A.A. *Chislennyye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ograniченного ob'ema zhidkosti* [Numerical methods of calculation of natural frequencies of oscillations of limited volume of fluid]. Moscow, Publ. of Computing Centre of AS of USSR, 1966. 270 p. (in Russian).
13. Nguyen D.H. The Liquid's Self-Oscillations in a Spherical Vessel. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering*, 2015, no. 2, pp. 84-90. DOI: [10.18698/0236-3941-2015-2-84-90](https://doi.org/10.18698/0236-3941-2015-2-84-90) (in Russian).