

УДК 539.3

Двусторонние оценки термоупругих характеристик композита с дисперсными включениями

Зарубин В. С.^{1,*}, Кувыркин Г. Н.¹, Пугачев О. В.¹

* fn2@bmstu.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

С применением двойственной вариационной формулировки задачи термоупругости в неоднородном твердом теле построены двусторонние границы возможных значений объемного модуля упругости, модуля сдвига и температурного коэффициента линейного расширения композита с дисперсными включениями, имеющими различные термоупругие свойства. Эти границы позволяют оценить наибольшую возможную погрешность, если в качестве термоупругих характеристик композита принять полусуммы граничных значений указанных параметров. Количественный анализ погрешностей, проведенный при различных сочетаниях термоупругих свойств матрицы композита и включений, выявил существенное возрастание величины погрешности при увеличении разницы между модулями упругости матрицы и включений. Показано, что при использовании уточненного варианта двусторонних оценок модулей упругости композита существенное уменьшение наибольшей возможной погрешности происходит лишь при малом различии упругих свойств матрицы и включений. Представленные расчетные зависимости дают возможность оценивать степень достоверности значений термоупругих характеристик композита, армированного дисперсными включениями (в том числе в виде наноструктурных элементов), получаемых с использованием различных математических моделей.

Ключевые слова: композит; двусторонние оценки; дисперсные включения; термоупругие характеристики

Введение

Композиты, армированные включениями различной формы, находят широкое применение в конструкциях, подверженных как механическим, так и тепловым воздействиям [1, 2, 3]. Возможность использования композитов в таких конструкциях в значительной степени зависит от комплекса термомеханических характеристик, в том числе от значений модулей упругости и температурного коэффициента линейного расширения. Однако основное внимание в большинстве работ, посвященных количественному анализу свойств гетерогенных тел, к которым следует отнести композиты, и проанализированных, например, в [4, 5, 6, 7], уделено исследованию лишь упругих характеристик композитов, причем, в основ-

ном, с волокнистой структурой, а связь модулей упругости с температурным коэффициентом линейного расширения рассмотрена менее подробно.

В технике наряду с использованием волокнистых композитов широко применяют дисперсно упрочненные композиты, в которых включениями являются частицы из высокопрочных и высокомодульных материалов, в том числе наноструктурные элементы [8, 9, 10, 11]. Поскольку обычно дисперсные частицы имеют близкие размеры во всех направлениях, это позволяет форму таких частиц в первом приближении рассматривать как шаровую [12, 13, 14]. Следует отметить, что достаточно широкое распространение получили композиты, называемые сферопластиками [15], которые содержат дисперсные частицы строго шаровой формы, например полые стеклосферы [16, 17, 18].

Значительное число публикуемых работ по оценке свойств композитов с дисперсными включениями подтверждает актуальность исследований в этом направлении. Такие исследования требуют комплексного подхода и применения методов математического моделирования температурного и напряженно-деформированного состояний композита [19, 20, 21]. Вместе с тем наряду с разработкой и использованием различных математических моделей, описывающих свойства композитов, целесообразно располагать расчетными зависимостями, позволяющими получить гарантированные двусторонние оценки, охватывающие интервалы возможных истинных значений объемного модулей упругости и температурного коэффициента линейного расширения конкретного композита. Если в качестве его термоупругих характеристик выбрать полусуммы граничных значений указанных параметров, то несложно установить наибольшую возможную погрешность, возникающую при таком выборе. В данной работе указанные зависимости построены на основе двойственной вариационной формулировки задачи термоупругости в неоднородном твердом теле [22].

1. Основные соотношения

Пусть композит состоит из изотропной линейно упругой матрицы, термоупругие свойства которой характеризуют объемный модуль K° , модуль сдвига G° и температурный коэффициент α° линейного расширения, и линейно упругих изотропных дисперсных шаровых включений N видов. Каждый вид включений с номером $\varsigma \in \overline{1, N}$ и объемной концентрацией C_ς имеет объемный модуль K_ς , модуль сдвига G_ς и температурный коэффициент α_ς линейного расширения. Объемная концентрация всех включений в композите равна

$$C_V = \sum_{\varsigma=1}^N C_\varsigma.$$

При хаотическом расположении включений в композите он не обладает текстурой и его допустимо считать изотропным [4, 23]. Искомые термоупругими характеристиками композита являются объемный модуль K , модуль сдвига G и температурный коэффициент α

линейного расширения. Эти характеристики представим в тензорной форме соотношениями [24]

$$\widehat{\mathbf{C}} = 3K\widehat{\mathbf{V}} + 2G\widehat{\mathbf{D}}, \quad \widehat{\mathbf{S}} = \frac{\widehat{\mathbf{V}}}{3K} + \frac{\widehat{\mathbf{D}}}{2G}, \quad \alpha = \alpha\widehat{\mathbf{I}}_2, \quad (1)$$

где $\widehat{\mathbf{C}}$ и $\widehat{\mathbf{S}}$ — тензоры четвертого ранга соответственно коэффициентов упругости и податливости композита; $\widehat{\mathbf{V}}$ и $\widehat{\mathbf{D}}$ — тензоры четвертого ранга, являющиеся соответственно объемной и девиаторной составляющими единичного тензора четвертого ранга $\widehat{\mathbf{I}} = \widehat{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{D}}$; α — тензор второго ранга коэффициентов температурной деформации; $\widehat{\mathbf{I}}_2$ — единичный тензор второго ранга с компонентами $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3$) в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Компоненты тензоров $\widehat{\mathbf{V}}$ и $\widehat{\mathbf{D}}$ имеют вид [1]

$$V_{ijmn} = \frac{\delta_{ij}\delta_{mn}}{3}, \quad D_{ijmn} = \frac{\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}}{2} - V_{ijmn}, \quad m, n = 1, 2, 3.$$

Из этих формул и равенства $\delta_{ii} = 3$ (с учетом правила суммирования слагаемых по повторяющимся в сомножителях латинским индексам [20], используемого и в дальнейшем) следует $V_{ijmn}V_{mnkl} = V_{ijkl}$ ($k, l = 1, 2, 3$), $D_{ijmn}D_{mnkl} = D_{ijkl}$ и $V_{ijmn}D_{mnkl} = 0$, т. е.

$$\widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{V}} = \widehat{\mathbf{V}}, \quad \widehat{\mathbf{D}} \cdot \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{D}}, \quad \widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{O}}_4, \quad (2)$$

где $\widehat{\mathbf{O}}_4$ — тензор четвертого ранга с нулевыми компонентами, а каждая из точек между сомножителями в произведении тензоров означает свертывание по индексу, одинаковому в обоих сомножителях [20].

Тензоры $\widehat{\mathbf{V}}$, $\widehat{\mathbf{D}}$ и TI_2 являются изотропными, т. е. их компоненты не зависят от ориентации выбранной системы координат. Формулы (1) сохраняют свой вид применительно к матрице и пластинчатым включениям при замене модулей упругости K и G и температурного коэффициента α линейного расширения композита соответственно на K° , G° , α° для матрицы и на K_ς , G_ς , α_ς для включений.

Тензор четвертого ранга имеет два линейных инварианта. Для тензоров $\widehat{\mathbf{V}}$ и $\widehat{\mathbf{D}}$ с учетом формул (2) эти инварианты имеют вид $V_{iimm} = 3$, $V_{imim} = 1$, $D_{iimm} = 0$ и $D_{imim} = 5$, а инварианты тензоров $\widehat{\mathbf{C}}$ и $\widehat{\mathbf{S}}$ с компонентами соответственно C_{ijmn} и S_{ijmn} , согласно формулам (1), можно представить соотношениями

$$\widehat{\mathbf{C}} \cdots \widehat{\mathbf{V}} = C_{iimm} = 9K, \quad \widehat{\mathbf{C}} \cdots \widehat{\mathbf{D}} = C_{imim} - \frac{C_{iimm}}{3} = 10G, \quad (3)$$

$$\widehat{\mathbf{S}} \cdots \widehat{\mathbf{V}} = S_{iimm} = \frac{1}{K}, \quad \widehat{\mathbf{S}} \cdots \widehat{\mathbf{D}} = S_{imim} - \frac{S_{iimm}}{3} = \frac{5}{2G}. \quad (4)$$

Таким образом, линейные инварианты тензора четвертого ранга являются внутренними произведениями этого тензора и тензоров $\widehat{\mathbf{V}}$ и $\widehat{\mathbf{D}}$ соответственно при свертывании по всем четырем индексам [20]. Тензор второго ранга имеет единственный линейный инвариант, который для тензора коэффициентов температурной деформации имеет вид $\alpha \cdot \widehat{\mathbf{I}}_2 = 3\alpha$.

Модули упругости композита, связывающие между собой осредненные по представительному объему V композита тензоры второго ранга напряжений и деформации соответственно

$$\langle \hat{s} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \hat{s}(M) dV(M) \quad \text{и} \quad \langle \hat{e} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \hat{e}(M) dV(M),$$

где $\hat{s}(M)$ и $\hat{e}(M)$ — тензоры, определяющие напряженно-деформированное состояние в окрестности точки $M \in V$, принято называть эффективными. При отсутствии теплового воздействия ($\Delta T \equiv 0$) эту связь можно представить в виде $\langle \hat{s} \rangle = \hat{C}_* \langle \hat{e} \rangle$ или $\langle \hat{e} \rangle = \hat{S}_* \langle \hat{s} \rangle$, где с учетом формул (1) $\hat{C}_* = 3K_* \hat{V} + 2G_* \hat{D}$ и $\hat{S}_* = 1/(3K_*) \hat{V} + 1/(2G_*) \hat{D}$ — называемые эффективными тензоры коэффициентов соответственно упругости и податливости композита, представленные через эффективные значения объемного модуля K_* и модуля сдвига G_* композита, вводимые из условия равенства объемной плотности потенциальной энергии деформации в изотропной среде и в реальном композите [20]:

$$\frac{1}{2} \langle \hat{e} \rangle \cdot \hat{C}_* \cdot \langle \hat{e} \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{s} \rangle \cdot \hat{S}_* \cdot \langle \hat{s} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V \hat{e}^*(M) \cdot \hat{s}^*(M) dV(M). \quad (5)$$

Здесь $\hat{s}^*$ и $\hat{e}^*$ — тензоры напряжений и деформации, описывающие истинное напряженно-деформированное состояние в представительном объеме композита, удовлетворяющее условиям равновесия и совместности деформаций.

Аналогичным путем можно ввести понятие эффективного температурного коэффициента α_* линейного расширения композита. Значения K_* , $\hat{S}_*$ и α_* подлежат оценке на основе того или иного подхода. Один из возможных подходов связан с применением двойственной вариационной формулировки линейной задачи термоупругости в неоднородном твердом теле [22].

2. Построение двусторонних оценок

При отсутствии тепловых воздействий в двойственную вариационную формулировку линейной задачи упругости входят два альтернативных функционала (минимизируемый функционал Лагранжа и максимизируемый функционал Кастилиано). Если отсутствуют объемные силы, а на поверхности S , ограничивающей объем V , заданы кинематические граничные условия, то функционал Лагранжа, достигающий минимума на истинном распределении перемещений в замкнутой области $\bar{V} = V \cup S$, имеет вид [22]

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_V \hat{e}(M) \cdot \hat{C}^*(M) \cdot \hat{e}(M) dV(M), \quad M \in V, \quad (6)$$

где $\hat{C}^*$ — тензор, соответствующий локальным значениям коэффициентов упругости матрицы и включений в объеме V . Этот функционал допустимо рассматривать на непрерывных и кусочно дифференцируемых по пространственным координатам распределениях перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Тогда при допустимом

однородном деформированном состоянии, определяемом тензором $\hat{\mathbf{e}}_0 = \langle \hat{\mathbf{e}} \rangle$ с компонентами $\varepsilon_{ij} = \text{const}$, с учетом формул (5) и (6) и равенства $\hat{\mathbf{s}}^* = \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \cdot \hat{\mathbf{e}}^*$, опустив обозначение точки $M \in V$, можно записать

$$\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \cdot \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \cdot \hat{\mathbf{e}}_0 dV \geq \frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{e}}^* \cdot \cdot \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \cdot \hat{\mathbf{e}}^* dV = \frac{V}{2} \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \cdot \hat{\mathbf{C}}_* \cdot \cdot \hat{\mathbf{e}}_0.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{V} \int_V \hat{\mathbf{C}}^*(M) dV(M) \geq \hat{\mathbf{C}}_*, \quad M \in V,$$

которое после полной свертки с тензорами $\widehat{\mathbf{V}}$ и $\widehat{\mathbf{D}}$ с учетом формул (2) будет эквивалентно двум неравенствам, содержащим линейные инварианты тензоров $\hat{\mathbf{C}}^*$ и $\hat{\mathbf{C}}_*$:

$$\frac{1}{V} \int_V \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \cdot \cdot \widehat{\mathbf{V}} dV \geq 9K_*, \quad \frac{1}{V} \int_V \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \cdot \cdot \widehat{\mathbf{D}} dV \geq 10G.$$

Подынтегральные функции в этих неравенствах кусочно постоянны в пределах матрицы и отдельно взятых включений, что позволяет для эффективных значений модулей упругости K_* и G_* композита представить верхние оценки K_+ и G_+ с учетом формул (3) и (4) в виде

$$\widetilde{K}_+ = \frac{K_+}{K^\circ} = 1 - C_V + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{K_\varsigma}{K^\circ} C_\varsigma, \quad \widetilde{G}_+ = \frac{G_+}{G^\circ} = 1 - C_V + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{G_\varsigma}{G^\circ} C_\varsigma. \quad (7)$$

При отсутствии объемных сил и задании силовых граничных условий на поверхности, ограничивающей объем V , функционал Кастилиано, максимизируемый на истинном распределении напряжений в замкнутой области $\overline{V}$, имеет вид [22]

$$J_2 = -\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{s}}(M) \cdot \cdot \hat{\mathbf{S}}^*(M) \cdot \cdot \hat{\mathbf{s}}(M) dV(M), \quad M \in V, \quad (8)$$

где $\hat{\mathbf{S}}^*$ — тензор, соответствующий локальным значениям коэффициентов податливости матрицы и сферодальных включений в объеме V . Этот функционал допустимо рассматривать на статически возможных распределениях напряжений. При допустимом однородном напряженном состоянии, определяемом тензором $\hat{\mathbf{s}}_0 = \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle$ с компонентами $\sigma_{ij} = \text{const}$, с учетом формул (5) и (8) и равенства $\hat{\mathbf{e}}^* = \hat{\mathbf{S}}^* \cdot \cdot \hat{\mathbf{s}}^*$, опустив обозначение точки $M \in V$, можно записать

$$-\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \cdot \hat{\mathbf{S}}^* \cdot \cdot \hat{\mathbf{s}}_0 dV \leq -\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{s}}^* \cdot \cdot \hat{\mathbf{S}}^* \cdot \cdot \hat{\mathbf{s}}^* dV = -\frac{V}{2} \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \cdot \hat{\mathbf{S}}_* \cdot \cdot \hat{\mathbf{s}}_0.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{V} \int_V \hat{\mathbf{S}}^*(M) dV(M) \geq \hat{\mathbf{S}}_*, \quad M \in V,$$

которое после полной свертки с тензорами $\widehat{\mathbf{V}}$ и $\widehat{\mathbf{D}}$ с учетом формул (2) будет равносильно двум неравенствам, включающим линейные инварианты тензоров $\widehat{\mathbf{S}}^*$ и $\widehat{\mathbf{S}}_*$:

$$\frac{1}{V} \int_V \widehat{\mathbf{S}}^* \dots \widehat{\mathbf{V}} dV \geq \frac{1}{K}, \quad \frac{1}{V} \int_V \widehat{\mathbf{S}}^* \dots \widehat{\mathbf{D}} dV \geq \frac{5}{2G}.$$

Подынтегральные функции в этих неравенствах кусочно постоянны в пределах отдельно взятых включений и в матрице, что дает возможность для эффективных значений модулей упругости K_* и G_* композита представить нижние оценки K_- и G_- с учетом формул (3) и (4) в виде

$$\frac{1}{\widetilde{K}_-} = \frac{K^\circ}{K_-} = 1 - C_V + K^\circ \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_\varsigma}{K_\varsigma}, \quad \frac{1}{\widetilde{G}_-} = \frac{G^\circ}{G_-} = 1 - C_V + G^\circ \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_\varsigma}{G_\varsigma}. \quad (9)$$

Оценки (7) и (9) можно также получить с привлечением теории смесей [25], но из этой теории не следует, что эти оценки являются двусторонними по отношению к истинным значениям модулей упругости композита. Построенные двусторонние оценки объемного модуля и модуля сдвига композита позволяют получить верхнюю и нижнюю оценки его продольного модуля упругости (модуля Юнга) E :

$$E_+ = \frac{9K_+G_+}{3K_+ + G_+}, \quad E_- = \frac{9K_-G_-}{3K_- + G_-}, \quad (10)$$

а также оценки коэффициента Пуассона ν композита:

$$\nu_1 = \frac{3K_+/2 - G_+}{3K_+ + G_+}, \quad \nu_2 = \frac{3K_-/2 - G_-}{3K_- + G_-}, \quad (11)$$

причем разность значений ν_1 и ν_2 может быть как положительной, так и отрицательной.

Для построения двусторонних оценок температурного коэффициента линейного расширения рассматриваемого композита можно использовать двойственную вариационную формулировку линейной задачи термоупругости для неоднородного твердого тела [22, 26]. Эта формулировка включает два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), которые на истинных распределениях перемещений и напряжений достигают равных по значению экстремумов.

Если представительный объем V композита поместить в абсолютно жесткую оболочку, обеспечивающую при однородном приращении ΔT температуры композита отсутствие перемещений на ограничивающей этот объем поверхности S , то на допустимом для минимизируемого функционала однородном распределении $u(M) = 0$ ($M \in V$) перемещений он примет вид

$$J_1^* = \frac{(\Delta T)^2}{2} \int_V \alpha^*(M) \cdot \widehat{\mathbf{C}}^*(M) \cdot \alpha^*(M) dV = \frac{B_\alpha V}{2} (\Delta T)^2, \quad (12)$$

где α^* — зависящий от положения точки $M \in V$ тензор коэффициентов температурной деформации, а

$$B_\alpha = 9K^\circ(\alpha^\circ)^2(1 - C_V) + 9 \sum_{\varsigma=1}^N K_\varsigma \alpha_\varsigma^2 C_\varsigma.$$

Для максимизируемого функционала одним из допустимых распределений напряжений является однородное по объему V , определяемое шаровым тензором $\hat{s} = \sigma \hat{\mathbf{I}}_2$, $\sigma = \text{const}$. На таком распределении этот функционал с учетом первой формулы (9) имеет вид [26]

$$J_2^* = -\frac{\sigma^2 V}{2K_-} - \sigma \Delta T \int_V \alpha^*(M) \cdot \hat{\mathbf{I}}_2 dV(M).$$

Значение σ можно найти из необходимого условия существования экстремума этого функционала

$$\frac{dJ_2^*}{d\sigma} = -\frac{\sigma}{K_-} - \Delta T \int_V \alpha^*(M) \cdot \hat{\mathbf{I}}_2 dV(M) = 0.$$

Отсюда следует $\sigma = -3K_- \alpha_* \Delta T$, где

$$\alpha_* = (1 - C_V) \alpha^\circ + \sum_{\varsigma=1}^N \alpha_\varsigma C_\varsigma, \quad (13)$$

причем эта формула совпадает с оценкой температурного коэффициента линейного расширения, которая следует из теории смесей [25]. После подстановки σ в максимизируемый функционал он примет вид

$$J_2^\circ = \frac{9}{2} V K_- (\alpha_* \Delta T)^2. \quad (14)$$

Для однородной среды, имеющей объемный модуль упругости K и искомый температурный коэффициент α линейного расширения рассматриваемого композита, минимизируемый функционал при условии $u(M) = 0$ ($M \in V$) равен $J_1^\circ = \frac{9}{2} V K (\alpha \Delta T)^2$, что совпадает со значением J_2^* максимизируемого функционала на допустимом однородном распределении напряжения, равного $\sigma^* = -3K \alpha \Delta T$. Для альтернативных функционалов справедливо неравенство [22] $J_1^* \geq J_1^\circ \geq J_2^*$. Отсюда с учетом формул (12) и (14) следуют двусторонние оценки

$$\alpha_+^2 = \frac{B_\alpha}{9K} \geq \alpha^2 \geq \frac{K_-}{K} \alpha_*^2 = \alpha_-^2. \quad (15)$$

В соотношении (14) вместо K можно использовать его двусторонние оценки, определяемые первыми формулами (8) и (10), что приводит к гарантированным двусторонним оценкам

$$\bar{\alpha}_+^2 = \frac{B_\alpha}{9K_-} \geq \alpha^2 \geq \frac{K_-}{K_+} \alpha_*^2 = \bar{\alpha}_-^2. \quad (16)$$

Использование в соотношении (15) значения объемного модуля упругости $K = (K_+ + K_-)/2$ должно привести к сближению двусторонних оценок по сравнению с неравенствами (16).

Следует отметить, что при существенном различии упругих характеристик матрицы и включений представленные двусторонние оценки могут привести к значительному отличию значений, соответствующих верхней и нижней границам. Эти границы можно сбить, если использовать уточненный вариант двусторонних оценок как объемного модуля, так и

модуля сдвига в виде [6, 27]

$$\begin{aligned}
 K_+^* &= \left(\frac{1 - C_V}{K^\circ + 4G_{\max}/3} + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_\varsigma}{K_\varsigma + 4G_{\max}/3} \right)^{-1} - \frac{4}{3}G_{\max}, \\
 K_-^* &= \left(\frac{1 - C_V}{K^\circ + 4G_{\max}/3} + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_\varsigma}{K_\varsigma + 4G_{\min}/3} \right)^{-1} - \frac{4}{3}G_{\min}, \\
 G_+^* &= \left(\frac{1 - C_V}{G^\circ + 4G_{\max}/3} + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_\varsigma}{G_\varsigma + G_{\max}^*/3} \right)^{-1} - G_{\max}^*, \\
 G_-^* &= \left(\frac{1 - C_V}{G^\circ + 4G_{\max}/3} + \sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_\varsigma}{G_\varsigma + G_{\min}^*/3} \right)^{-1} - G_{\min}^*,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $G_{\max} = \max\{G^\circ, G_1, \dots, G_N\}$ и $G_{\min} = \min\{G^\circ, G_1, \dots, G_N\}$,

$$G_{\max}^* = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{G_{\max}} + \frac{10}{9K_{\max} + 6G_{\max}} \right)^{-1}, \quad G_{\min}^* = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{G_{\min}} + \frac{10}{9K_{\min} + 6G_{\min}} \right)^{-1},$$

$K_{\max} = \max\{K^\circ, K_1, \dots, K_N\}$ и $G_{\min} = \min\{K^\circ, K_1, \dots, K_N\}$. Выбор в качестве модулей упругости композита полусумм этих оценок должен привести к снижению наибольшей возможной погрешности такого выбора.

3. Оценки наибольших возможных погрешностей

Если в качестве искоемых термоупругих характеристик композита использовать полусуммы установленных выше верхних и нижних оценок, определяемых формулами (7), (9)–(11) и (16), то наибольшие возможные относительные погрешности таких характеристик будут равны

$$\eta_K = \frac{K_+ - K_-}{K_+ + K_-}, \quad \eta_G = \frac{G_+ - G_-}{G_+ + G_-}, \quad \eta_E = \frac{E_+ - E_-}{E_+ + E_-}, \quad \eta_\nu = \frac{\nu_+ - \nu_-}{\nu_+ + \nu_-}, \quad \eta_\alpha = \frac{\bar{\alpha}_+ - \bar{\alpha}_-}{\bar{\alpha}_+ + \bar{\alpha}_-}.$$

На рис. 1 в полулогарифмических координатах для композита с одним видом включений ($N = 1$) представлены построенные с использованием первых формул (7) и (9) графики зависимости η_K от объемной концентрации $C_1 = C_V$ этого вида включений при различных значениях параметра $\bar{K} = K_1/K^\circ > 1$. Эти графики симметричны относительно абсциссы $C_V = 0,5$ и соответствуют также зависимости η_G от C_1 , если вместо $\bar{K}$ использовать параметр $\bar{G} = G_1/G^\circ$. При армировании композитов высокопрочными и высокомодульными включениями обычно $\bar{K} > 1$ и $\bar{G} > 1$. Но каждый из представленных графиков применим как при фиксированном значении $\bar{K} > 1$, так и при обратном ему значении $1/\bar{K} > 1$. Из рисунка, например, следует, что $\eta_K < 0,06$ при $\bar{K} = 2$, но при $\bar{K} \geq 10$ и $C_V = 0,5$ наибольшая возможная относительная погрешность уже превышает 50 %.

Графики зависимости η_E от C_V для рассматриваемого композита сохраняют симметрию относительно абсциссы $C_V = 0,5$ лишь при условии $\bar{G} = \bar{K}$ и в этом случае совпадают для взаимно обратных величин. На рис. 2 графики этой зависимости приведены также в

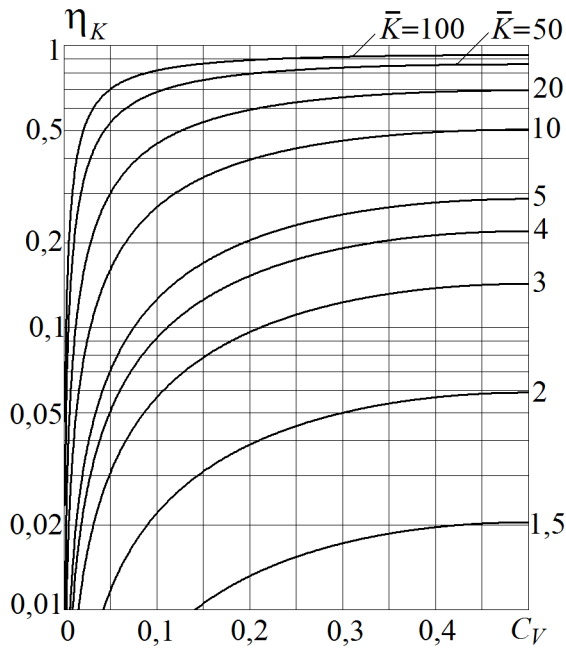


Рис. 1. Зависимость η_K от C_V при различных значениях параметра $\bar{K}$

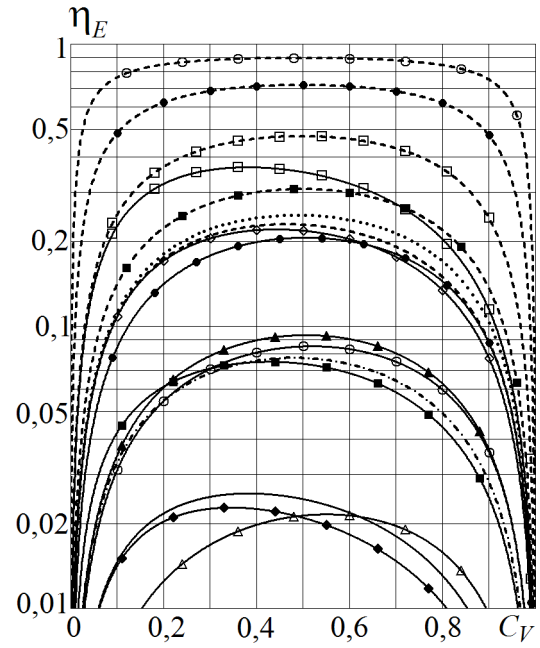


Рис. 2. Зависимость η_E от C_V при $G^\circ = 0,4$ и различных сочетаниях значений параметров $\bar{K}$ и $\bar{G}$

полулогарифмических координатах для значения $\bar{G}^\circ = G^\circ/K^\circ = 0,4$ и сочетаний параметров $\bar{K}$ и $\bar{G}$ соответственно 5 и 1,25 (сплошная кривая), 1,25 и 5 (штриховая линия), 5 и 2 (штрихпунктирная линия), 2 и 5 (пунктирная линия), 10 и 5 (штриховая линия с темными квадратами), 5 и 10 (штриховая линия со светлыми квадратами), 100 и 20 (штриховая линия с темными кружками), 20 и 100 (штриховая линия со светлыми кружками), сплошные кривые при сочетании параметров 5 и 0,8 (с темными ромбами), 0,8 и 5 (светлыми ромбами), 10 и 0,5 (с темными квадратами), 0,5 и 10 (со светлыми квадратами), 0,5 и 0,125 (с темными кружками), 0,125 и 0,5 (со светлыми кружками), 0,8 и 0,4 (с темными треугольниками), 0,4 и 0,8 (со светлыми треугольниками).

Используем для сравнения уточненный вариант (17) двусторонних оценок значений модулей упругости. Для рассматриваемого композита с одним видом включений этот вариант можно представить соотношениями [24]

$$\begin{aligned}\bar{K}_+^* &= \bar{K}_+ - \min\{\Delta\bar{K}', \Delta\bar{K}''\}, & \bar{K}_-^* &= \bar{K}_+ - \max\{\Delta\bar{K}', \Delta\bar{K}''\}, \\ \bar{G}_+^* &= \bar{G}_+ - \min\{\Delta\bar{G}', \Delta\bar{G}''\}, & \bar{G}_-^* &= \bar{G}_+ - \max\{\Delta\bar{G}', \Delta\bar{G}''\},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta\bar{K}' &= \frac{(\bar{K} - 1)^2 C_V (1 - C_V)}{\bar{K}(1 - C_V) + C_V + 4\bar{G}^\circ/3}, & \Delta\bar{K}'' &= \frac{(\bar{K} - 1)^2 C_V (1 - C_V)}{\bar{K}(1 - C_V) + C_V + 4\bar{G}\bar{G}^\circ/3}, \\ \Delta\bar{G}' &= \frac{(\bar{G} - 1)^2 C_V (1 - C_V)}{\bar{G}(1 - C_V) + C_V + \bar{G}'}, & \Delta\bar{G}'' &= \frac{(\bar{G} - 1)^2 C_V (1 - C_V)}{\bar{G}(1 - C_V) + C_V + \bar{G}''}, \\ \bar{G}^\circ &= \frac{G^\circ}{K^\circ}, & \bar{G}' &= \frac{9 + 8\bar{G}^\circ}{6 + 12\bar{G}^\circ}, & \bar{G}'' &= \frac{\bar{G}(9\bar{K} + 8\bar{G}\bar{G}^\circ)}{6\bar{K} + 12\bar{G}\bar{G}^\circ}.\end{aligned}$$

На рис. 3 приведены графики зависимости $\eta_K^* = (K_+^* - K_-^*) / (K_+^* + K_-^*)$ от C_V для тех же значений параметров и при тех же обозначениях кривых, что и на рис. 2. Из сравнения рис. 1 с рис. 3 видно, что уточненный вариант двусторонних оценок позволяет существенно снизить наибольшую возможную погрешность при сравнительно малых отклонениях параметров $\bar{K}$ и $\bar{G}$ от единицы. Однако по мере увеличения этих параметров различие в значениях погрешностей на рис. 1 и 3 убывает. Такой же вывод следует из сопоставления рис. 1 с рис. 4, на котором представлены графики зависимости $\eta_G^* = (G_+^* - G_-^*) / (G_+^* + G_-^*)$ от C_V также для прежних значений параметров и при прежних обозначениях обозначениях кривых. Уточненный вариант двусторонних оценок модулей упругости K_+^* и G_-^* рассматриваемого композита использован для получения оценок E_+^* и E_-^* его продольного модуля упругости. На рис. 5 приведены графики зависимости $\eta_E^* = (E_+^* - E_-^*) / (E_+^* + E_-^*)$ от C_V с сохранением значений всех параметров и обозначений кривых, принятых на рис. 2–рис. 4. Сравнение этого рисунка с рис. 2 подтверждает сделанный выше вывод.

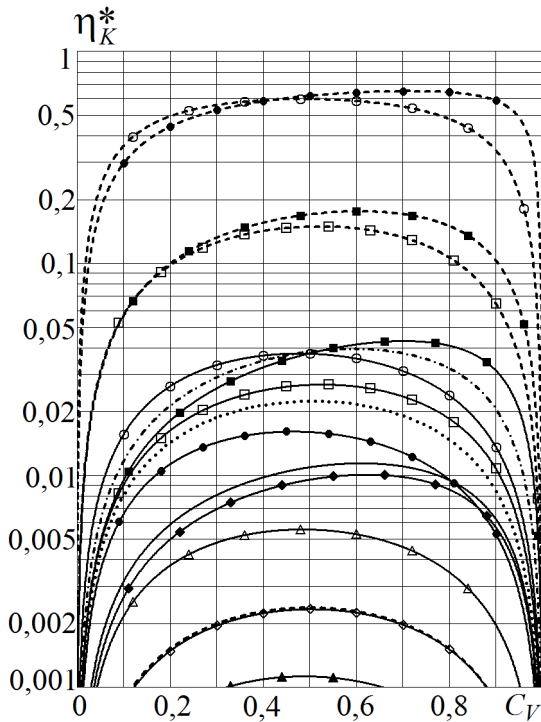


Рис. 3. Зависимость η_K^* от C_V при $G^\circ = 0, 4$ и различных сочетаниях значений параметров $\bar{K}$ и $\bar{G}$

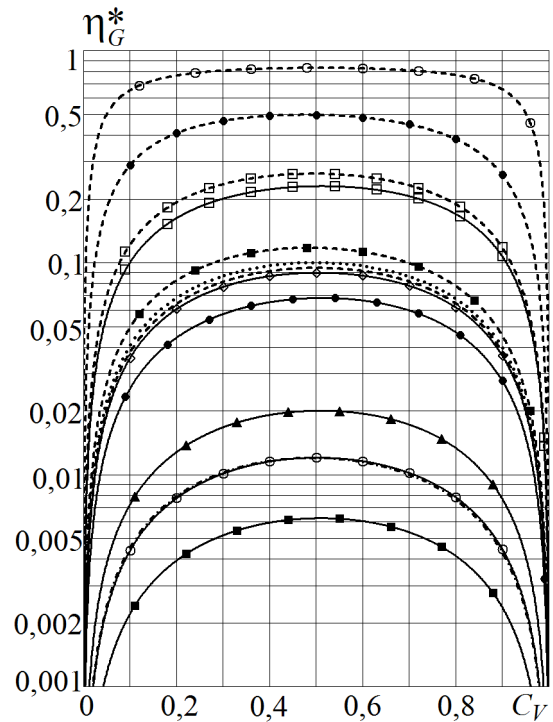


Рис. 4. Зависимость η_G^* от C_V при $G^\circ = 0, 4$ и различных сочетаниях значений параметров $\bar{K}$ и $\bar{G}$

Построенные с использованием соотношения (16) графики зависимости η_α от C_V представлены на рис. 6 при различных сочетаниях параметров $\bar{K}$ и $\bar{\alpha} = \alpha_1 / \alpha^\circ$ соответственно 5 и 1,25 (сплошная кривая), 5 и 0,8 (штриховая линия), 5 и 2 (штрихпунктирная линия), 5 и 0,5 (пунктирная линия), 5 и 10 (штриховая линия с темными квадратами), 5 и 0,1 (штриховая линия со светлыми квадратами), 100 и 10 (штриховая линия с темными кружками), 100 и 0,1 (штриховая линия со светлыми кружками), сплошные кривые при сочетании параметров 2 и 2 (с темными ромбами), 2 и 0,5 (со светлыми ромбами), 10 и 2 (с темными квадратами),

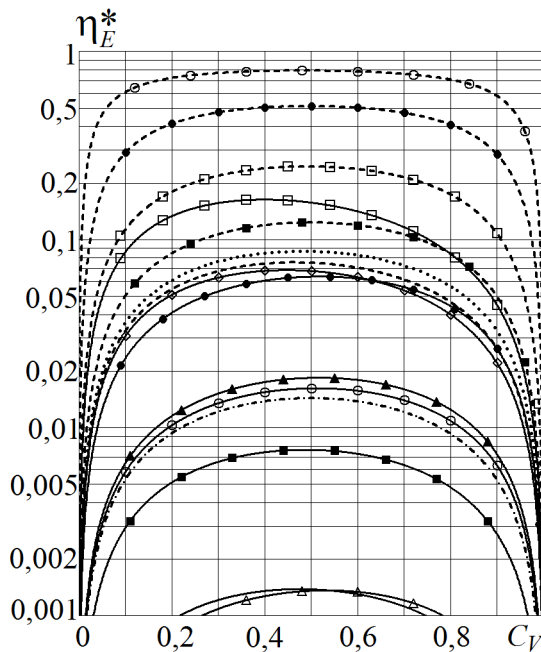


Рис. 5. Зависимость η_E^* от C_V при $G^\circ = 0,4$ и различных сочетаниях значений параметров $\bar{K}$ и $\bar{G}$

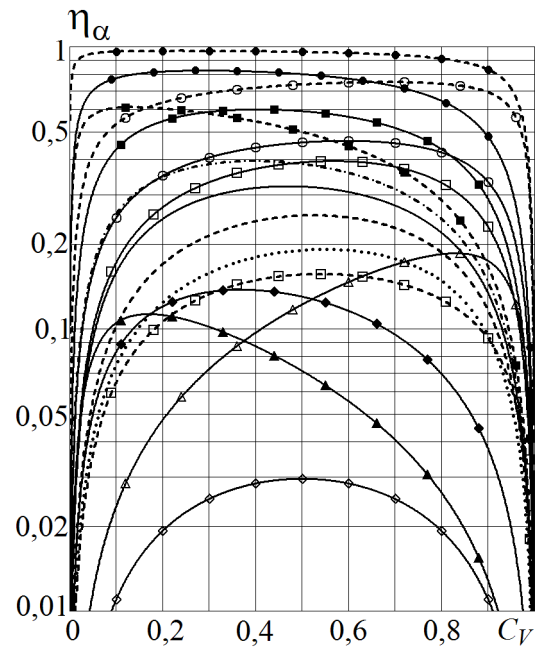


Рис. 6. Зависимость η_α от C_V при $G^\circ = 0,4$ и различных сочетаниях значений параметров $\bar{K}$ и $\bar{\alpha}$

10 и 0,5 (со светлыми квадратами), 20 и 5 (с темными кружками), 20 и 0,2 (со светлыми кружками), 0,8 и 5 (с темными треугольниками), 0,8 и 0,2 (со светлыми треугольниками). Если в соотношение (16) подставить уточненные двусторонние оценки, то получим

$$\bar{\alpha}_+^* = \sqrt{\frac{1 - C_V + \bar{K}_1 \bar{\alpha}^2 C_V}{\bar{K}_-^*}}, \quad \bar{\alpha}_-^* = \sqrt{\frac{\bar{K}_-^*}{\bar{K}_+^*}} (1 - C_V + \bar{\alpha} C_V).$$

На рис. 7 приведены графики зависимости $\eta_\alpha^* = \frac{\bar{\alpha}_+^* - \bar{\alpha}_-^*}{\bar{\alpha}_+^* + \bar{\alpha}_-^*}$ от C_V при $\bar{G}^\circ = 0,4$ и сочетаниях параметров $\bar{K}$, $\bar{\alpha}$ и $\bar{G}$ соответственно 5, 1,25 и 3 (сплошная кривая), 5, 0,8 и 3 (штриховая линия), 5, 2 и 3 (штрихпунктирная линия), 5, 0,5 и 3 (пунктирная линия), 5, 10 и 3 (штриховая линия с темными квадратами), 5, 0,1 и 3 (штриховая линия со светлыми квадратами), 100, 10 и 50 (штриховая линия с темными кружками), 100, 0,1 и 50 (штриховая линия со светлыми кружками), сплошные кривые при сочетании параметров 2, 2 и 1,5 (с темными ромбами), 2, 0,5 и 1,5 (со светлыми ромбами), 10, 2 и 6 (с темными квадратами), 10, 0,5 и 6 (со светлыми квадратами), 20, 5 и 13 (с темными кружками), 20, 0,2 и 13 (со светлыми кружками), 0,8, 5 и 0,5 (с темными треугольниками), 0,8, 0,2 и 0,5 (со светлыми треугольниками).

Из сопоставления рис. 6 и 7 следует, что использование уточненного варианта двусторонних оценок модулей упругости композита несколько уменьшает наибольшую возможную погрешность температурного коэффициента линейного расширения рассматриваемого композита, если выбрать значение этого коэффициента равным полусумме его двусторонних оценок, но в основном сохраняет взаимное расположение кривых, представляющих зависимость такой погрешности от концентрации включений.

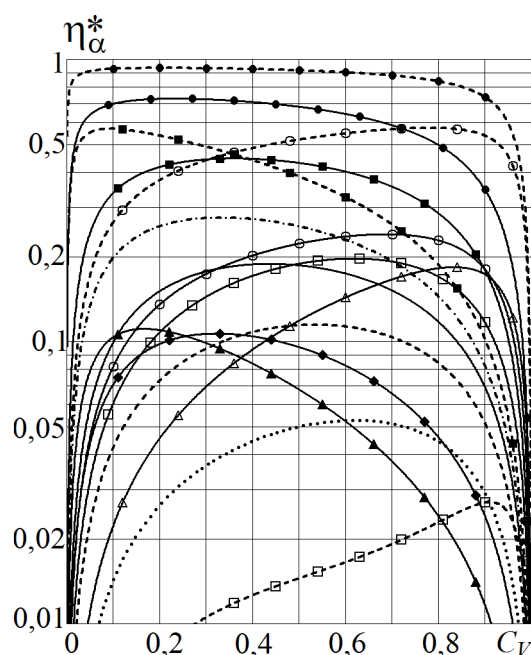


Рис. 7. Зависимость η_α^* от C_V при $G^\circ = 0,4$ и различных сочетаниях значений параметров $\bar{K}$, $\bar{\alpha}$ и $\bar{G}$

Закключение

Применение математической модели взаимодействия сфероидальных включений и частиц матрицы со изотропной средой, искомые свойства которой соответствуют рассматриваемому композиту, позволило оценить влияние на его термоупругие характеристики соотношения полуосей сфероида, моделирующего форму пластинчатых включений. Установлено, что при малой объемной концентрации включений это влияние несущественно, но и с увеличением концентрации относительное изменение модулей упругости и температурного коэффициента линейного расширения композита при изменении формы пластинчатых включений не превосходит нескольких процентов.

Представленные расчетные зависимости дают возможность прогнозировать термоупругие характеристики композита по заданным свойствам матрицы и включений, их концентрации и форме.

Работа выполнена по гранту НШ–1432.2014.8 программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ и в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности по государственному заданию № 2014/104 Минобрнауки РФ, а также в рамках государственного задания по проекту № 1.2640.2014.

Список литературы

1. Применение композиционных материалов: Пер. с англ. / Ред. Б. Нотон М.: Машиностроение, 1978. 511 с. [Engineering applications of composites / ed. by B.R. Noton. New York: Academic Press, 1974. 538 p.]

2. Калинин В.А., Ягодников Д.А. Технология производства ракетных двигателей твердого топлива. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
3. Комков М.А., Тарасов В.А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.
4. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
5. Механика композиционных материалов: Пер. с англ. / Ред. Дж. Сендецки М.: Мир, 1978. 564 с. [Mechanics of composite materials / ed. by G.P. Sendeckyj. New York: Academic Press, 1974. 520 p.]
6. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с. [Cristensen R.M. Mechanics of composite materials. New York: Wiley-Interscience publication, 1979. 348 p.]
7. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 302 с.
8. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Оценка эффективных упругих характеристик материалов, модифицированных фуллереном // Композиты и наноструктуры. 2011. № 4. С. 21–31.
9. Лурье С.А., Миронов Ю.М., Нелюб В.А., Бородулин А.С., Чуднов И.В., Буянов И.А., Соляев Ю.О. Моделирование зависимостей физико-механических характеристик от параметров микро- и наноструктуры полимерных композиционных материалов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 6. С. 37–60. DOI: [10.7463/0612.0431339](https://doi.org/10.7463/0612.0431339)
10. Lehmann B., Schlarb A.K., Friedrich K., Zhang M.Q., Rong M.Z. Modelling of Mechanical Properties of Nanoparticle-Filled Polyethylene // International Journal of Polymeric Materials. 2008. Vol. 57, no. 1. P. 81–100. DOI: [10.1080/00914030701337232](https://doi.org/10.1080/00914030701337232)
11. Ivanisenko Y., Darbandi A., Dasgupta S., Kruk R., Hahn H. Bulk Nanostructured Materials: Non-Mechanical Synthesis // Advanced Engineering Materials. 2010. Vol. 12, no. 8. P. 666–676. DOI: [10.1002/adem.201000131](https://doi.org/10.1002/adem.201000131)
12. Лурье С.А., Соляев Ю.О. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро-и нановключениями // Вестник ПГТУ. Механика. 2010. № 1. С. 80–90.
13. Зайцев А.В., Фукалов А.А. Эффективные модули объемного сжатия дисперсно-упрочненных композитов со сплошными и полыми анизотропными сферическими включениями // Вестник ПГТУ. Механика. 2010. № 4. С. 46–54.
14. Prüger S., Mehlhorn L., Mühlich U., Kuna M. Study of Reinforcing Mechanisms in TRIP-Matrix Composites under Compressive Loading by Means of Micromechanical Simulations // Advanced Engineering Materials. 2013. Vol. 15. № 7. P. 542–549. DOI: [10.1002/adem.201200323](https://doi.org/10.1002/adem.201200323)

15. Соколов И.И., Долматовский М.Г. Сферопластики // Полимерные материалы. 2005. № 9. С. 20–21.
16. Соколов И.И., Долматовский М.Г., Деев И.С., Стеценко В.Я. Влияние физико-механических характеристик полых стеклянных микросфер на свойства сферопластиков // Пластические массы. 2005. № 7. С. 16–18.
17. Weise J., Salk N., Jehring U., Baumeister J., Lehmhus D., Bayoumi M.A. Influence of Powder Size on Production Parameters and Properties of Syntactic Invar Foams Produced by Means of Metal Powder Injection Moulding // Advanced Engineering Materials. 2013. Vol. 15. № 3. P. 118–122. DOI: [10.1002/adem.201200129](https://doi.org/10.1002/adem.201200129)
18. Cunha S., Aguiar J.B., Ferreira V.M., Tadeu A. Influence of the Type of Phase Change Materials Microcapsules on the Properties of Lime-Gypsum Thermal Mortars // Advanced Engineering Materials. 2014. Vol. 16. № 4. P. 433–441. DOI: [10.1002/adem.201300278](https://doi.org/10.1002/adem.201300278)
19. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. № 10. С. 470–474.
20. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Матвеева А.А. Моделирование термоупругих характеристик композитов на основе алюмо-хромофосфатных связующих // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. 497–518. DOI: [10.7463/1113.0623564](https://doi.org/10.7463/1113.0623564)
21. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 5–17.
22. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
23. Вишняков Я.Д., Бабарэко А.А., Владимиров С.А., Эгиз И.В. Теория образования текстур в металлах и сплавах / отв. ред. Н.В. Агеев. М.: Наука, 1979. 344 с.
24. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Изотропные шаровые включения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2014. № 5. С. 53–69.
25. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.
26. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
27. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1963. Vol. 11, no. 2. P. 127–140. DOI: [10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7)

Two-Sided Estimates of Thermo-elastic Characteristics of Dispersed Inclusion Composites

Zarubin V.S.^{1,*}, Kuvyrkin G.N.¹, Pugachev O.V.¹

[*fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)

¹Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: composite, two-sided estimates, dispersed inclusions, thermal elastic characteristics

The composites, dispersion-reinforced with inclusions from high-strength and high-modulus materials are widely used in technology. Nanostructure elements can perform the role of such inclusions as well. Possible applications of such composites in heat-stressed structures under heavy mechanical and thermal influences significantly depend on a complex of thermo-mechanical characteristics including the values of the moduli of elasticity and coefficient of linear thermal expansion. There are different approaches to construction of mathematical models that allow calculating dependences to estimate elastic characteristics of composites. Relation between thermo-elastic properties of matrix and inclusions of the composite with its temperature coefficient of linear expansion is studied in less detail. Thus, attention has been insufficient in estimating a degree of reliability and a possible error of derived dependencies.

A dual variation formulation of the problem of thermo-elasticity in a non-uniform solids simulating the properties and structure of the composite with dispersed inclusions, makes it possible to define two-sided limits of possible values of the volume elasticity modulus, shear modulus, and coefficient of linear thermal expansion of such composite. These limits allow us to estimate the maximum possible error, if to take a half-sum of the limit values of these parameters as the thermo-elastic characteristics of the composite. Implementing this approach to find possible errors, arising when using one or another calculating dependency, improves reliability of predicted thermo-elastic characteristics as applied to existing and promising composites.

References

1. Noton B.R., ed. *Engineering applications of composites*. New York, Academic Press, 1974. 538 p. (Russ. ed.: Noton B.R., ed. *Primenenie kompozitsionnykh materialov v tekhnike*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978. 511 p.).

2. Kalinchev V.A., Yagodnikov D.A. *Tekhnologia proizvodstva raketnykh dvigatelei tverdogo topliva* [Technology of production of rigid fuel rocket engines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 688 p. (in Russian).
3. Komkov M.A., Tarasov V.A. *Tekhnologia namotki kompozitnykh konstruksii raket i sredstv porajenia* [Technology of winding of composite constructions of rockets and defeat facilities]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 432 p. (in Russian).
4. Shermergor T.D. *Teoria uprugisti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microun-homogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p. (in Russian).
5. Sendekyj G.P., ed. *Mechanics of Composite Materials*. New York, Academic Press, 1974. 520 p. (Russ. ed.: Sendekyj G.P., ed. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov*. Moscow, Mir Publ., 1978. 564 p.).
6. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley-Interscience publication, 1979. 348 p. (Russ. ed.: Christensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov*. Moscow, Mir Publ., 1982. 336 p.).
7. Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov* [Micromechanics of composites]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 302 p. (in Russian).
8. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Estimate of effective elastic characteristics of materials modified of fullerene. *Kompozity i nanostruktury = Composites and nanostructures*, 2011, no. 4, pp. 21–31. (in Russian).
9. Lur'e S.A., Mironov Yu.M., Nelyub V.A., Borodulin A.S., Chudnov I.V., Buianov I.A., Soliaev Yu.O. Modeling of dependences of physical-mechanical properties on parameters of micro- and nanostructure polymer composite materials. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 6, pp. 37–60. DOI: [10.7463/0612.0431339](https://doi.org/10.7463/0612.0431339) (in Russian).
10. Lehmann B., Schlarb A.K., Friedrich K., Zhang M.Q., Rong M.Z. Modelling of Mechanical Properties of Nanoparticle-Filled Polyethylene. *International Journal of Polymeric Materials*, 2008, vol. 57, no. 1, pp. 81–100. DOI: [10.1080/00914030701337232](https://doi.org/10.1080/00914030701337232)
11. Ivanisenko Y., Darbandi A., Dasgupta S., Kruk R., Hahn H. Bulk Nanostructured Materials: Non-Mechanical Synthesis. *Advanced Engineering Materials*, 2010, vol. 12, no. 8, pp. 666–676. DOI: [10.1002/adem.201000131](https://doi.org/10.1002/adem.201000131)
12. Lur'e S.A., Soliaev Iu.O. Modified Eshelby method in the problem of definition of effective properties with spherical micro- and nanoincludes. *Vestnik PGTU. Mekhanika = PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no. 1, pp. 80–90. (in Russian).
13. Zaitsev A.V., Fukalov A.A. Effective Bulk Modules of 3D Matrix-Inclusion Composites with Continuous and Hollow Anisotropic Spherical Particles. *Vestnik PGTU. Mekhanika = PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no. 4, pp. 46–54. (in Russian).

14. Prüger S., Mehlhorn L., Mühlich U., Kuna M. Study of Reinforcing Mechanisms in TRIP-Matrix Composites under Compressive Loading by Means of Micromechanical Simulations. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 7, pp. 542–549. DOI: [10.1002/adem.201200323](https://doi.org/10.1002/adem.201200323)
15. Sokolov I.I., Dolmatovskii M.G. Spheroplasts. *Polimernye materialy = Polymeric materials*, 2005, no. 9, pp. 20–21. (in Russian).
16. Sokolov I.I., Dolmatovskii M.G., Deev I.S., Stetsenko V.Ia. Influence of the physicomachanical characteristics of hollow glass microspheres on the properties of sphere-filled plastics. *Plasticheskie massy*, 2005, no. 7, pp. 16–18. (English version of journal: *International Polymer Science and Technology*, 2006, vol. 33, no. 3, pp. 31–35.).
17. Weise J., Salk N., Jehring U., Baumeister J., Lehmhus D., Bayoumi M.A. Influence of Powder Size on Production Parameters and Properties of Syntactic Invar Foams Produced by Means of Metal Powder Injection Moulding. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 118–122. DOI: [10.1002/adem.201200129](https://doi.org/10.1002/adem.201200129)
18. Cunha S., Aguiar J.B., Ferreira V.M., Tadeu A. Influence of the Type of Phase Change Materials Microcapsules on the Properties of Lime-Gypsum Thermal Mortars. *Advanced Engineering Materials*, 2014, vol. 16, no. 4, pp. 433–441. DOI: [10.1002/adem.201300278](https://doi.org/10.1002/adem.201300278)
19. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. The Effective Coefficients of Thermal Conductivity of Composites with Spherical Inclusions. *Teplovyie protsessy v tekhnike = Thermal Processes in Engineering*, 2012, no. 10, pp. 470–474. (in Russian).
20. Dimitrienko Yu.I., Sbornshikov S.V., Egoleva E.S., Matveeva A.A. Modeling of thermo-elastic properties of composites with alumino-chromic phosphate matrices. *Nauka I obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 11, pp. 497–518. DOI: [10.7463/1113.0623564](https://doi.org/10.7463/1113.0623564) (in Russian).
21. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Special features of mathematical modeling of technical instruments. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody = Mathematical modeling and numerical method*, 2014, no. 1, pp. 5–17. (in Russian).
22. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p. (in Russian).
23. Ageev N.V., ed. *Teoria obrazovaniya tekstur in metallakh i splavakh* [Theory of forming textures in metals and alloys]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 344 p. (in Russian).
24. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Comparative Analysis Estimates of Elastic Moduli for Composite. Isotropic Spherical Inclusions. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering*, 2014, no. 5, pp. 53–69. (in Russian).

25. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mixture Models of Composite Mechanics. P. 1. Thermal Mechanics and Thermoelasticity of Multicomponent Mixture. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2009, no. 3, pp. 36–49. (in Russian).
26. Zarubin V.S., Stankevich I.V. *Raschet teplonapriajennykh konstruksii* [Calculation of heat strained constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 352 p. (in Russian).
27. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1963., vol. 11, no. 2, pp. 127–140. DOI: [10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7)