Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 09. С. 279–297.

DOI: **10.7463/0915.0812703**

Представлена в редакцию: 18.07.2015
Исправлена: 30.08.2015



**УДК 539.3;539.374**

# О разрыхлении пластичного композита при активной нагрузке и влияние его на деформационные и прочностные свойства

**Комков К. Ф.**[1,*], **Еремичев А. Н.**[1]

[*]06kfk38@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Новые перспективные технологии массового безотходного производства деталей, с минимальной механической обработкой поверхностей, потребовали более глубокого изучения деформативные и прочностных свойств смесевых материалов. Для обработки результатов механических испытаний конкретного композита привлечена математическая модель, ранее применяемая к описанию поведения металлов, серых чугунов и других сред, склонных к разрыхлению (дилатансии) в процессе деформации. Используя результаты экспериментальных исследований композита, модель позволяет описать механизм общей деформации, существенно зависящий от вида напряженного состояния, определить характеристики в направлении главных напряжений по характеристикам формоизменения и выявить влияние дилатансии на деформационные и прочностные свойства. Показано, что сведения о предельных значениях дилатансии дают возможность оценки прочности смесевых материалов.

**Ключевые слова**: деформация, разрыхление (дилатансия), математическая модель, прочность, вид напряженного состояния, тензорная нелинейность

## Введение

Данная работа использует результаты экспериментальных исследований высоконаполненного полимерного материала (ВНПМ), представленные в работе [1]. В этой же работе дано описание оборудования и методик испытаний. Исследуемый композит отличается видом наполнителя. Им являются не минеральные, а металлические зерна с содержанием пластичного связующего существенно менее 40%, поэтому, как и другие ВНПМ, его можно отнести к квазиизотропным средам. Испытания образцов ВНПМ с разгрузкой показывают, что остаточная деформация возникает при любых уровнях нагрузки. Результаты этих опытов указывают на отсутствие предела упругости, то есть, малая деформация является упруго – пластической. Сравнение результатов опытов на растяжение, сжатие и чистый сдвиг позволяют найти существенное различие начальных и секущих модулей при одной и той же деформации и их зависимость от вида напряженного состояния.

Опыт исследований ВНПМ и других смесевых материалов [2 - 5] показывает, что их деформация зависит от свойств поверхности наполнителя и связующего. Жесткие частицы металла практически не деформируются при любом напряженном состоянии, но они, обладая поверхностной энергией, образуют слой связей, оказывающих существенное влияние на поведение смеси при силовом воздействии. Общая деформация складывается из пластического течения связующего материала, на которое накладывается деформация, вызванная скольжением и утратой связей поверхностного слоя. При простом растяжении разрушаются связи по направлению действующего напряжения, а при сжатии связи поверхностного слоя в направлении оси образца не разрушаются, но пластическое течение связующего между зернами вызывает расклинивание, которое также ведет к разрушению связей, но только в поперечном направлении.

Зависимость между напряжением и деформацией при разгрузке нелинейная, что указывает на частичное восстановление утраченных связей. Разрыв связей при активной нагрузке ведет к росту объемной деформации, изменению поперечных деформаций и перераспределению напряжений. Этот эффект назван дилатансией, который существенно отражается на деформативных и прочностных свойствах изучаемого композита. Целью предлагаемой работы является разработка методики определения дилатансии, используя результаты экспериментальных исследований работы [1], установление влияния дилатансии на деформационные и прочностные свойства композита и совершенствование математической модели. Предлагаемая модель рассматривает дилатансию в двух видах, как дополнительную скалярную составляющую средней (объемной) деформации и составляющую среднего (гидростатического) напряжения, далее называемые: первая – по деформации, вторая – по напряжению, поскольку для их определения привлечены разные уравнения.

## 1. Характеристики формоизменения по результатам испытаний [1]

Основными исходными данными являются зависимости напряжение – деформация или диаграммы $\sigma\sim\varepsilon$, полученные при испытаниях образцов на растяжение и сжатие с измерением поперечных деформаций, а так же трубчатых образцов на кручение. Для изучения эффектов, вызывающих тензорную нелинейность, приняты диаграммы при одной скорости деформации, чтобы освободиться далее от ошибок, связанных с временными эффектами [1]. На рис. 1 а) показаны результаты испытаний образцов ВНПМ: три диаграммы $S_0\sim\varepsilon$, относящиеся к отмеченным напряженным состояниям и три кривые по испытаниям на сжатие с последующим кручением до разрушения, где $\varepsilon$ – деформация при растяжении, сжатии, а при чистом сдвиге ее можно определить по деформации сдвига при кручении: $\varepsilon \cong \gamma/\sqrt{6}$ при $\varepsilon_1 \cong |\varepsilon_3|$ , $S_0 = \{[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2]/2\}^{1/2} -$ интенсивность напряжений, $\sigma_i -$ главные напряжения.

В данной работе, как и в [2], используется подход «экстраполяции» опытных данных для простого растяжения и чистого сдвига за предельные деформации $\varepsilon_p$ и $\varepsilon_\tau$ с той целью, чтобы определить нелинейные характеристики при всех значениях $\varepsilon$, включая и $\varepsilon_c$ — предельную деформацию при сжатии. Промежуточные предельные деформации отмечены на рис. 1 б) двумя вертикальными штриховыми линиями. На рис. 1 б) показаны зависимости $S_0 \sim \varepsilon$ после начальной обработки результатов с учетом «экстраполяции». Кривые 7, 8 и 9 представляют результаты расчетов по определению интенсивности напряжений $S_0$ по программе пропорционального нагружения (сжатия с кручением) при разных значениях коэффициента $k_\tau = \tau/\sigma$, где $\tau$ — напряжение сдвига при кручении, а $\sigma$ — при сжатии. Их траектории закачиваются предельными значениями результатов опытов при сложном нагружении. Обработка результатов проводится по значениям $S_0$ и интенсивности деформаций: $e_0 = \{2[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]/9\}^{1/2}$, где $\varepsilon_i$ — главные деформации. Тонкая штриховая линия $abc$ представляет искомую огибающую пределов прочности. Продолжение кривых $\sigma \sim \varepsilon$ (штрихованные участки) за предельные деформации $\varepsilon_p$ и $\varepsilon_\tau$ находилось с помощью параметра разномодульности $\chi = G_c/G_p$, найденного по значениям секущих модулей, где $G_i = S_i/3e_{0i}$ — модули при деформации $\varepsilon_p$, $i = p, c$. Значение $G_p$ соразмерно понижалось с уменьшением модуля $G_c$ с каждым шагом $\Delta\varepsilon$ при $\varepsilon > \varepsilon_p$. Аналогично выполнялась «экстраполяция» диаграммы для чистого сдвига.

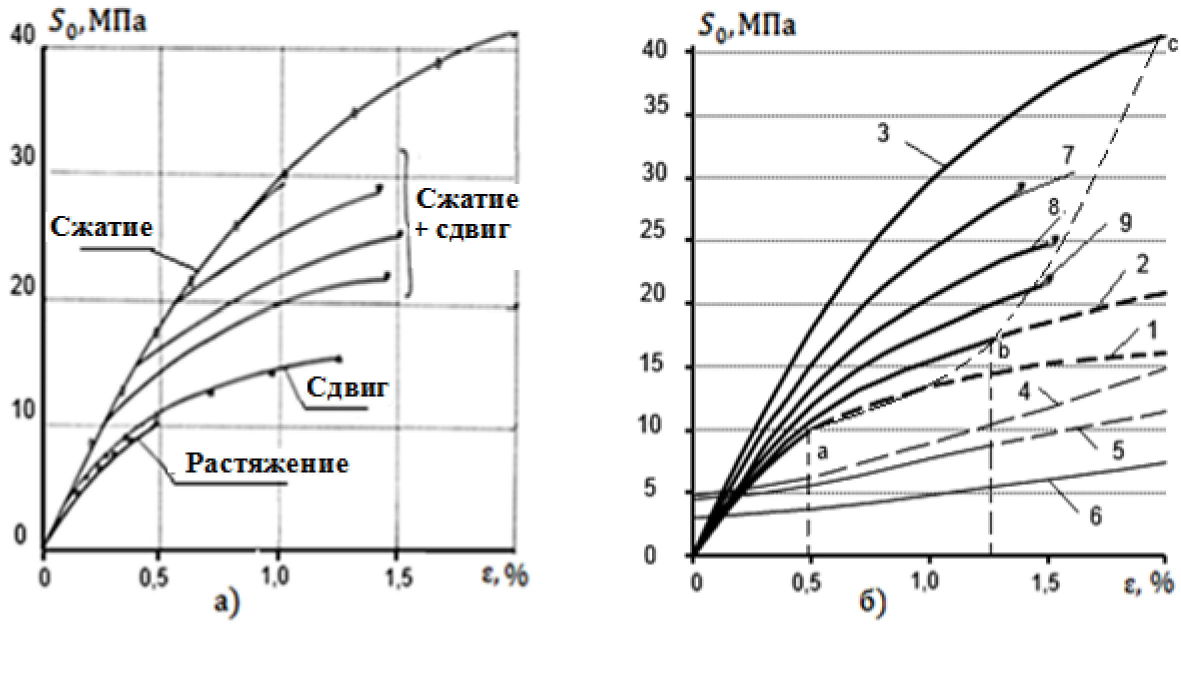


**Рис. 1.** а) Диаграммы испытаний образцов ВНПМ; б) зависимости $S_0 \sim \varepsilon$ после обработки результатов с учетом «экстраполяции»: кривая 1 – растяжение, 2 - чистый сдвиг и сжатие; 4, 5 и 6 - зависимости податливостей $\Phi_i$ для растяжения, чистого сдвига и сжатия; 7, 8 и 9 - сжатие с кручением. Штриховые участки кривых относятся к «экстраполяции» исходных данных.

Деформационные свойства находились по методике определения характеристик формоизменения, подробно описанной в работе [2]. На рис. 2 а) приведены характеристики формоизменения. Кривые 1 и 2 представляют $G_m$ — средний и $G_d$ — среднеквадратический модули. Кривые 3 и 4 $\Phi_m$ и $\Phi_d$ - соответствующие податливости, кривая 5 $\omega = \theta - \vartheta$ — фазу подобия девиаторов, а кривая 6 отношение податливостей $\Phi_d/\Phi_m$ в зависимости от деформации $\varepsilon$. Средний и среднеквадратический модули могут быть выражены в виде произведений: $G_m = G_\vartheta g_m$, $G_d = G_\vartheta g_d$, где $G_\vartheta$ — обобщенный модуль, а $g_m = sin(2\vartheta + \theta)/\, sin\, 3\vartheta$ и $g_d = 4\, sin(\theta - \vartheta)/\, sin\, 3\vartheta$ — тригонометрические коэффициенты.

Средняя $\Phi_m = \Phi_\theta \varphi_m$ и среднеквадратическая $\Phi_d = \Phi_\theta \varphi_d$ податливости могут быть выражены аналогично, где $\Phi_\theta = [\Phi_m^2 + (4/3)\Phi_m \Phi_d \cos 3\theta + (4/9)\Phi_d^2]^{1/2}$ — обобщенная податливость, $\varphi_m = sin(2\theta + \vartheta)/\, sin\, 3\theta$ и $\varphi_d = 3\, sin(\theta - \vartheta)/(2\, sin\, 3\theta)$ коэффициенты. Из определения для обобщенной податливости $\Phi_\theta$ следует взаимосвязь податливостей $\Phi_m$, $\Phi_d$ и коэффициентов $[\varphi_m^2 + (4/3)\varphi_m \varphi_d \cos 3\theta + (4/9)\varphi_d^2]^{1/2} = 1$. Аналогичная из определения обобщенного модуля $G_\vartheta$ вытекает взаимосвязь коэффициентов $\{g_m^2 - (g_m g_d \cos 3\vartheta)/2 + g_d^2\, /16\}^{1/2} = 1$ и характеристик $G_m$, $G_d$. Здесь $\theta = (1/3)\arccos\, [27 S_{ij} S_{j\alpha} S_{\alpha i}/(2S_0^3)]$ – угол вида напряженного и $\vartheta = (1/3)\arccos\, [4 e_{ij} e_{j\alpha} e_{\alpha i}/(3e_0^3)]$ — угол вида деформированного состояния; $0 \leq \theta$ и $\vartheta \leq \pi/3$. В последних выражениях $S_{ij}$ и $e_{ij}$ являются компонентами девиаторов напряжений и деформаций, соответственно.

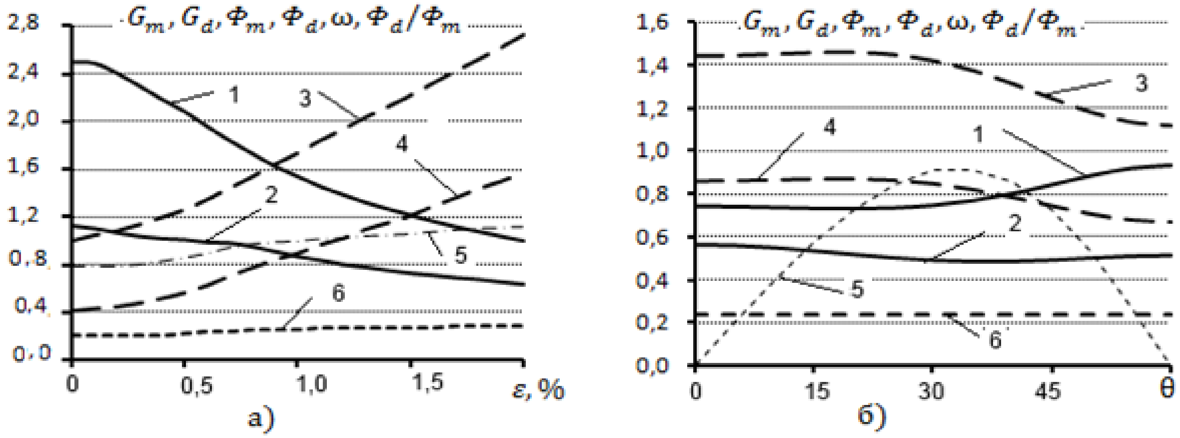


**Рис. 2.** Изменение характеристик в зависимости: а) от деформации $\varepsilon$ при $\theta = 32{,}8°$; кривые 1 - 6 представляют $\Phi_m$, $\Phi_d$, $G_m$, $G_d$, фазу $\omega$ и отношение $\Phi_d/\Phi_m$; б) от угла $\theta$ при деформации $\varepsilon_p = const$, кривые 1 - 6 для тех же характеристик.

Деформация сложных сред протекает так, что зависимости $S_0 \sim e_0$ отличаются между собой при разных напряженных состояниях, поэтому возникает неравенство углов

$\theta$ и $\vartheta$, как в работе [2]. Кривая 5 представляет разницу между углами $\theta$ и $\vartheta$, то есть фазу подобия девиаторов $\omega = arctg[2\Phi_d \sin 3\theta\,/(3\Phi_m + 2\Phi_d \cos 3\theta)]$, которая может быть найдена при известных значениях характеристик $\Phi_m$ и $\Phi_d$. Все графики на рис. 2 а) относятся к углу $\theta$, при котором фаза имеет максимальное значение. Проверка точности определения характеристик формоизменения проводится по соотношению $\omega = arctg[G_d \sin 3\vartheta\,/(4G_m - G_d \cos 3\vartheta)]$ после определения $G_m$, $G_d$ и $\vartheta$. Характеристики приведены с множителями: $2{,}5/\mu$ для $G_m$, $2/\mu$ - $G_d$, $\mu$ - $\Phi_m$, $2\mu$ - $\Phi_d$, $0{,}1$ - $\omega$ в градусах, 1,0 - отношения $\Phi_d/\Phi_m$, чтобы ординаты представленных величин были сопоставимы.

На рис. 2 б) приведены графики этих характеристик, как зависимости от угла $\theta$ в той же последовательности. Они относятся к предельной деформации при растяжении $\varepsilon_p$. Поскольку эта деформация достаточно близко лежит от начала оси $\varepsilon$, модуль $G_m$ возрастает только при $\theta > 30°$, а податливость $\Phi_m$, примерно так же падает. Здесь они приведены с другими множителями: $1/\mu$ для $G_m$, $1/\mu$ - $G_d$, $\mu$ - $\Phi_m$, $2{,}5\mu$ - $\Phi_d$, $0{,}1$ - $\omega$ в градусах, $1{,}0$ - $\Phi_d/\Phi_m$. Последнее отношение приведено с той целью, чтобы показать, что оно практически не зависит от угла $\theta$. Значение начального модуля сдвига $\mu$ найдено по диаграмме $\tau \sim \gamma$. Графики 5 для фазы показывают, что расхождение углов $\theta$ и $\vartheta$ следует считать достаточно большим, $\omega_{max}$ = 8,9°, тогда как для стабильных металлов он находится в пределах 2 - 3°. Графики для характеристик формоизменения иллюстрируют зависимость свойств композита не только от уровня деформации, но и вида напряженного состояния. Именно поэтому для точного и полного их описания были привлечены тензорно – нелинейные уравнения, как и в работах [2, 5]. При равенстве углов $\theta$ и $\vartheta$ функции $\Phi_d = G_d = 0$ и коэффициенты $\varphi_d = g_d = 0$, а связь между напряжениями и деформациями становится тензорно линейной: $\Phi_\theta = \Phi_m$, $G_\vartheta = G_m = 1/\Phi_\theta$, $\varphi_m = g_m = 1$.

## 2. Основные соотношения

Для большей уверенности в точности выполненной обработки, вначале было проведено сравнение кривых, построенных по опытным и расчетным значениям для трех состояний, для которых приведены диаграммы. Кривые для модулей $G_\vartheta = S_0/3e_0$, найденные по опытным данным о растяжении, чистом сдвиге и сжатии, буквально накладываются на кривые для модулей, рассчитанных по представленным выше определениям. После вычисления среднего $G_m$, среднеквадратического $G_d$ модулей и угла $\vartheta$ расчет модуля $G_\vartheta$ проводился еще по его определению. Аналогичные расчеты выполняются и для податливостей: $\Phi_\theta$, $\Phi_m$ и $\Phi_d$. Почти точное совпадение этих кривых убеждает в надежности методики определения характеристик формоизменения, поэтому графики для модуля $G_\vartheta$ и податливости $\Phi_\theta$ здесь не приводятся (максимальное отклонение значений составляет менее 1%, причем при деформациях близких к нулю).

В основу математической модели положены уравнения связи напряжений с деформациями и уравнения связи деформаций с напряжениями. Первые при известных деформациях определяют напряжения. Вторые определяют деформации при известных напряжениях. Последние уравнения приводятся в работе [4], а здесь использовались без изменений. Эти уравнения, представленные для главных деформаций, приводятся к виду, соответствующему уравнениям анизотропного тела [3]:

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E_1 - \nu_{21}\sigma_2/E_2 - \nu_{31}\sigma_3/E_3,$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12}\sigma_1/E_1 + \sigma_2/E_2 - \nu_{32}\sigma_3/E_3, \tag{1}$$

$$\varepsilon_3 = -\nu_{13}\sigma_1/E_1 - \nu_{23}\sigma_2/E_2 + \sigma_3/E_3.$$

Исходя из этих уравнений, получены соотношения и расчетные данные модулей в направлении главных напряжений и для коэффициентов поперечных деформаций:

$$E_i^{-1} = (3\Phi_m + \Phi_k + \Phi_d c_{ii})/9, \tag{2}$$

$$\nu_{ij}E_i^{-1} = (3\Phi_m/2 - \Phi_k - \Phi_d c_{ij})/9, \tag{3}$$

где $c_3 = -(c_1 + c_2)$, $c_{ii} = c_i(1 + æ_s)$; $c_{ij} = c_\alpha + æ_s c_i$; $\Phi_k -$ податливость объемному растяжению (сжатию), выражение для которого будет дано ниже; $i, j, \alpha = 1, 2, 3$; $i \neq j \neq \alpha.$ По этим уравнениям каждому напряженному состоянию присущи три модуля $E_i$ и шесть коэффициентов $\nu_{ij}$. Они не являются независимыми характеристиками, поскольку определяются по трем функциям: $\Phi_m$, $\Phi_d$ и $\Phi_k$.

Сравнение кривых для модулей $E_i = \sigma_i/\varepsilon_i$, относящихся к направлению главных осей с расчетом по соотношению (2) при растяжении, сжатии по опытным данным для того же направления показывает, что максимальное отклонение их значений составляет не более 3%, и то только для опытных точек, лежащих в начале диаграмм, представленных на рис 1 а). При больших значениях деформации $\varepsilon$ расхождение снижается. Проведенная проверка точности расчетных характеристик убеждает в надежности методики определения характеристик формоизменения и последующих расчетов величин, относящихся к объемной деформации и среднего напряжения.

Как уже отмечалось [4], формоизменение структурно - неоднородных материалов сопровождается ростом объемной деформации и изменением гидростатического напряжения. Чтобы расширить возможности математической модели, она включает уравнения для шаровых частей тензоров деформаций и напряжений в виде:

$$\varepsilon_0 = \sigma_0/3K_\theta - \Phi_d\eta_s\xi\sigma_0 + 2\Phi_d æ_s S_0/9 = \Phi_k\sigma_0/3 + 2\Phi_d æ_s S_0/9, \tag{4}$$

$$\sigma_0 = 3K_\theta\varepsilon_0 + \eta_e\zeta G_d\varepsilon_0 - æ_e G_d e_0/2 = 3K_e\varepsilon_0 - æ_e G_d e_0/2, \tag{5}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}/3 -$ средняя деформация,; $\sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3 -$ среднее напряжение; $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_0\delta_{ij}$ и $\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma_0\delta_{ij}$ компоненты тензора деформаций и напряжений; $K_\theta -$

начальное значение модуля при объемном расширении, зависящее от вида напряженного состояния; $\xi = \sigma_0/S_0$ – параметр, характеризующий траекторию нагружения и $\zeta = \varepsilon_0/e_0$ – траекторию деформации.

Уравнения (4), (5) без множителей $\eta_s, \eta_e$ и $æ_s$, $æ_e$ в первых равенствах выделены из исходных уравнений М. Рейнера, вывод которых приводятся в работе [5]. Эти множители, называемые далее параметрами дилатансий, зависят от вида напряженного состояния. Они позволяют точнее отразить изменение дополнительных составляющих объемной деформации и гидростатического напряжения. Этот эффект, вызванный разрыхлением, проявляется заметным снижением коэффициентов поперечной деформации при растяжении и возрастанием при сжатии, иногда до значений $\nu_c > 0{,}5$.

Для анализа и практических расчетов среднюю деформацию следует представить в виде суммы двух деформаций $\varepsilon_0 = \varepsilon_y + \varepsilon_g$, вызванных разными физическими эффектами. Первая $\varepsilon_y = \sigma_0/3K_\theta$ – условно «упругая», с модулем $K_\theta$, зависящим от вида напряженного состояния, а вторая деформация представляет разрыхление (дилатансию по деформациям). Среднее напряжение по той же причине необходимо представить так же, $\sigma_0 = \sigma_y + \sigma_g$. Опыт обработки испытаний различных материалов показал, что уравнение в виде $\sigma_0 = 3K_H\varepsilon_0$ для связи шаровых тензоров неприемлемо, поскольку модуль $K_H$, как функция инвариантов тензора напряжений, при учете дилатансий становится разрывной. Величины $\Phi_k = (1/K_\theta - 3\Phi_d\eta_s\xi)$ и $K_e = K_\theta + \eta_e\zeta G_d/3$, которые представляют характеристики при объемном расширении, являются плавно изменяющимися функциями с ростом напряжений или деформаций.

Описание дилатансий только одной константой – модулем дилатансии, как это предложено М. Рейнером, было первой попыткой отразить эффект дилатансии по деформации и поставить вопрос о необходимости его описания. Ссылку на его работу можно найти в статье [5]. Введение параметров $æ_s, \eta_s$ в уравнении (4) и $æ_e$ и $\eta_e$ в уравнении (5) вызвано тем, что реальная зависимость дилатансий:

$$\varepsilon_g = -\,\Phi_d\eta_s\xi\sigma_0 + 2\Phi_d æ_s S_0/9 \quad (6)$$

по деформации и

$$\sigma_g = \eta_e\zeta G_d\varepsilon_0 - æ_e G_d e_0/2 \quad (7)$$

по напряжению от угла $\theta$ сложнее, чем обладают ею характеристики $\Phi_d$ и $G_d$.

Предложенные уравнения (4), (5) для $\varepsilon_0$ и $\sigma_0$ представляют основное отличие данных нелинейных уравнений от уравнений, которые сформулированы в работах В. В. Новожилова и М. Рейнера. Уравнения (4) и (5) отличаются и от подобных уравнений, предложенных в работах [2 и 5], в которых модуль $K_\theta = K = const$ является характеристикой упругости при объемном расширении, что присуще более стабильным материалам, чем изучаемый композит.

## 3. Методика определения параметров дилатансии

Большое различие начальных значений модулей при растяжении и сжатии, а так же характеристик формоизменения при разных напряженных состояниях можно объяснить только особенностью механизма общей деформации. Как уже отмечено, при простом растяжении продольная деформация связана с пластическим течением связующего материала, на которое накладывается деформация, вызванная утратой связей с поверхностью наполнителя. Этот процесс ведет к росту объемной деформации. На макроуровне он проявляется очень быстрым снижением коэффициента поперечной деформации. На рис. 3 дано сравнение опытных значений коэффициентов поперечных деформаций $\nu_p$, кривая 1 (линия из точек) с кривой 2, полученной расчетом $\nu_{12}$, по формуле (3) (сплошная линия) и с кривой 5, найденной по соотношению

$$\nu_t = (1 - \sigma/(3K\varepsilon))/2, \qquad (8)$$

предполагающее отсутствие объемной деформации при пластическом течении.

Тот факт, что эта кривая 5 лежит значительно выше кривой 1, говорит об интенсивном развитии описанного процесса с ростом общей деформации. Опытные точки кривой 1 для коэффициента $\nu_p$ лежат между осью ординат и тонкой штриховой вертикальной линией, а последующая часть кривой (штрихи) относится к «экстраполяции». При простом сжатии пластическое течение связующего материала между зернами вызывает расклинивание, которое так же ведет к разрушению связей, но только в поперечном направлении и росту поперечной и объемной деформаций.

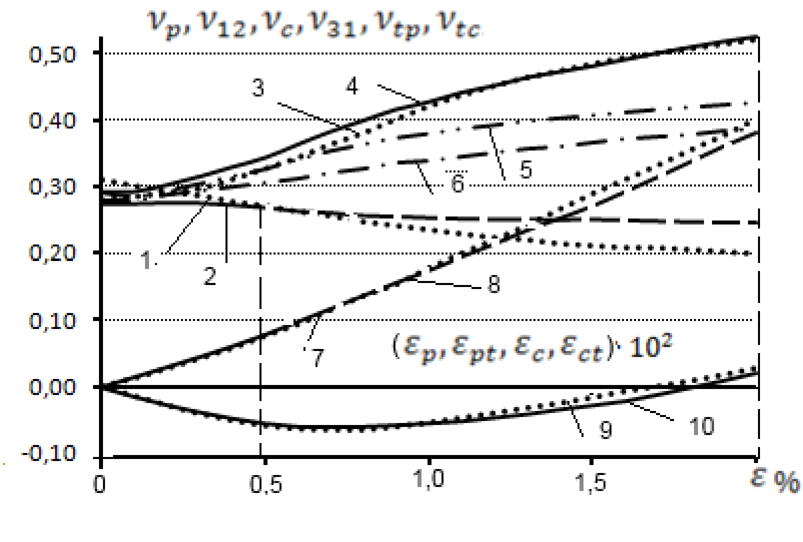


**Рис. 3.** Сравнение опытных данных (линии из точек) с данными расчетов (сплошные линии): коэффициента $\nu_p$ — кривая 1 с $\nu_{12}$ — 2 и с $\nu_{tp}$ — 5 (штрих пунктирная линия) - для растяжения; коэффициента $\nu_c$ — 3 с $\nu_{31}$ — 4 и $\nu_{tc}$ — 6 (штрих пунктирная линия) - для сжатия; сравнение опытных данных для средней деформации, найденной по $\varepsilon_0 = (1 - 2\nu)\varepsilon/3$ с расчетом по уравнению (4): кривые 7 и 8 для растяжения; кривые 9 и 10 для сжатия. Штриховые участки относятся к «экстраполяции».

Этот процесс отражается на поведении коэффициента поперечной деформации $\nu_c$ (кривая 3). Расчет кривой 4 для $\nu_{31}$, значения которой при осевой деформации, близкой к предельной деформации, превышают число 0,5. Сравнение с кривой 6, найденной по соотношению (8), говорит об интенсивном разрыхлении при сжатии. На этом же рисунке приведены графики для объемных деформаций, найденных по опытным данным о коэффициентах поперечных деформаций по формуле $\varepsilon_0 = (1 - 2\nu)\varepsilon/3$. Кривая 7, соответствующая значению коэффициента $\nu = \nu_p$, и кривая 9 при значении $\nu = \nu_c$, сравниваются с кривыми 8 для растяжения и 10 для сжатия, полученными расчетом по уравнению (4). Расхождение кривых незначительно, как по коэффициентам поперечных деформаций, так и по объемным деформациям, потому вполне может удовлетворить расчетчика изделий из ВНПМ.

Параметры $æ_s$ и $\eta_s$, как функции угла $\theta$, определяются подбором их значений при наилучшем наложении теоретических кривых на опытные. Сначала для секущих модулей $E_i$ и потом коэффициентов $\nu_{ij}$ при растяжении и сжатии. Это одна из основных процедур обработки опытных данных, которая позволяет найти, как параметры, так и модуль $K_\theta$. Необходимость принятия $K_\theta$ функцией угла $\theta$ объясняется трудностью сближения $\nu_p$ с $\nu_{12}$ из – за существенного влияния слагаемого $\varepsilon_y = \sigma_0/3K_\theta$ в уравнении (4). Для промежуточных значений угла $\theta$ параметры устанавливаются по соотношению

$$æ_s = a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2. \tag{9}$$

Коэффициенты $a_i$ определяются подбором значений $æ_s$ при простых напряженных состояниях: $a_1 = æ_p$ , $a_2 = 3(4æ_\tau - 3æ_p - æ_c)/\pi$, $a_3 = 18(æ_p - 2æ_\tau + æ_c)/\pi^2$. Такими же функциями, как (9), являются параметр $\eta_s$ и модуль $K_\theta$. Начальные значения $æ_p$ , $æ_c$ и $æ_\tau$ вначале принимаются равными единице. Затем они возрастают или убывают, а для модуля $K_\theta$ вычисляются по известным формулам теории упругости. Для данного материала значение модуля при растяжении увеличивается, а при сжатии уменьшается. Для удобства проведения процедуры сближения теоретических кривых с опытными полезно пользоваться упрощенными выражениями. Например, для коэффициента $\nu_{12}$ соотношение (3) можно привести к виду

$$\nu_{12} = [0{,}5 - (\Phi_k + (c_3 + æ_s c_1)\Phi_d)]/[1 + (\Phi_k + c_1(1 + æ_s)\Phi_d)], \tag{10}$$

где $c_1 = 2$, $c_3 = -1$ при $\theta = 0$. В этом соотношении параметр $æ_s > 0$ снижает числитель, а еще в большей степени повышает знаменатель. Соотношение (10) уменьшает время на выбор значений $æ_s$ при согласовании теории с опытом. Подобное оценочное выражение для угла $\theta = 60°$ здесь не приводится. Для изучаемого композита эти действия оказались недостаточными, что привело к необходимости использования параметр $\eta_s$ с отрицательным значением.

Значения параметров $æ_e$ и $\eta_e^*$ можно определить по формулам, включающим в себя уже найденные параметры $æ_s$, $\eta_s$ и характеристики формоизменения. Принимая равенство модулей $K_s = 1/\Phi_k$ и $K_e = K_\theta + \eta_e \zeta G_d/3$, находим выражение для параметра $\eta_e^* = \eta_e \zeta = 3(1/\Phi_k - K_\theta)/G_d$. Формула для параметра $æ_e$ устанавливается после сопоставления второго равенства уравнения (4) со вторым равенством уравнения (5). После простых преобразований находим: $æ_e = 4æ_s \Phi_d / \Phi_k \Phi_\theta G_d$. При этом параметры $æ_e$ и $\eta_e^*$ становятся функциями не только от угла $\theta$, но и деформации.

На рис. 4 даны графики изменения параметров, которые приведены в последовательности: кривая 1 $- æ_s$, 2 $- æ_e$, 3 $- \eta_s$, 4 $- \eta_e^*$ и 5 $- K_\theta$, как функции угла $\theta$. Кривые для параметров $æ_e$, и $\eta_e^*$ приведены для постоянного значения деформации ε, равной предельной для сжатия.

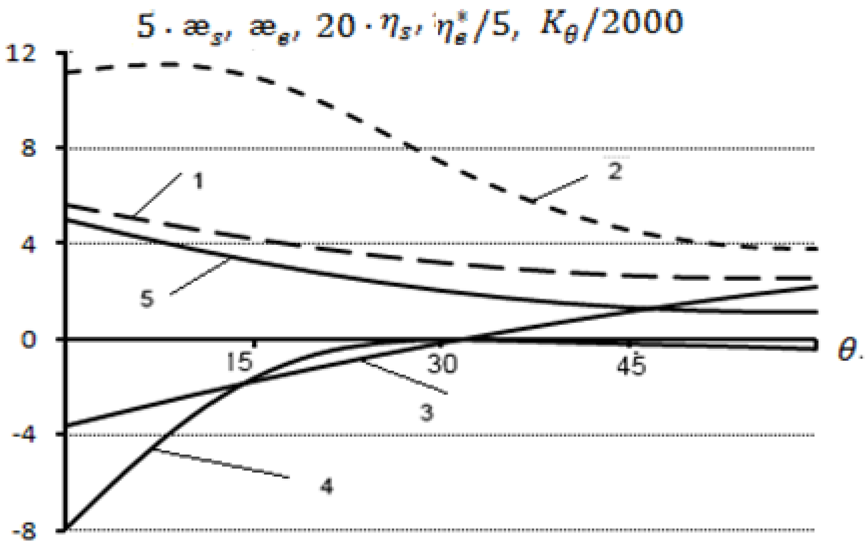


**Рис. 4.** Зависимости параметров от угла $\theta$, перечисленных над графиками с множителями, в последовательности номера кривой.

На участке оси $\theta$ от 0 до 30° параметр $\eta_e^*$ отвечает за дополнительное разрыхление, как и параметр $æ_s$. А в пределах $\theta$ от 30° до 60° после нулевого значения при $\theta$ = 30°, он остается отрицательным, имея малые значения. Это указывает на незначительность разрыхления при отрицательном среднем напряжении. При положительных, даже малых значениях, он призван описывать процесс восстановления связей. Его нелинейность связана с поведением податливости $\Phi_k$, прямо зависящей от коэффициентов $\nu_p$ и $\nu_c$.

Процедура сближения кривых для коэффициентов поперечных деформаций, позволяет определить коэффициенты $a_i$ в соотношении (9). Для кривых 1 и 2 они достигли значений (с учетом множителей): $æ_{sp} = 5{,}59$; $æ_{s\tau} = 3{,}2$; $æ_{sc} = 2{,}56$; $æ_{ep} = 11{,}4$; $æ_{e\tau} = 7{,}44$; $æ_{ec} = 3{,}8$. По кривым 3 и 4: $\eta_{sp} = -3{,}58$; $\eta_{s\tau} = 0$; $\eta_{sc} = 2{,}56$; $\eta_{sp} = -7{,}95$; $\eta_{s\tau} = 0$; $\eta_{sc} = -0{,}39$. Остальные значения можно найти по графикам.

## 4. Результаты исследований дилатансий по деформации и напряжению

Найденные выше параметры: $æ_s$, $\eta_s$ и модуль $K_\theta$, теперь позволяют найти объемную деформацию $\varepsilon_0$ и дилатансию $\varepsilon_g$. Графики зависимости объемной деформации для растяжения и сжатия уже показаны на рис. 3 кривыми 7, 9 по результатам испытаний и 8, 10 по расчетам. Предельные значения объемной деформации составляют: для растяжения $\varepsilon_{0p} = 8{,}33 \cdot 10^{-4}$ и сжатия $\varepsilon_{0c} = 2{,}67 \cdot 10^{-4}$. Положительная объемная деформация $\varepsilon_{0p} > \varepsilon_{0c}$, поскольку значение коэффициента $\nu_{\text{c}}$ при деформации $\varepsilon_c$ превышает число 0,5. Судя по отношению $\varepsilon_{0p}/\varepsilon_{gp} = 1{,}24$, «упругая» составляющая, представленная первым слагаемым в уравнении (4), имеет вклад в общую объемную деформацию менее 25%, остальные приходятся на дилатансию. При сжатии отношение $\varepsilon_{0c}/\varepsilon_{gp}$ ведет себя сложнее. Оно, вначале отрицательное, становится положительным при значениях коэффициента $\nu_{\text{c}} > 0{,}5$. Вывод о том, что кривые для $\varepsilon_0$, найденные по опытным данным и расчету, достаточно близко лежат около друг друга, а по форме кривых совпадают, позволил приступить к расчету дилатансий.

На рис. 5 приведены графики отношения дилатансии $\varepsilon_g/\varepsilon_{gp}$, которые являются зависимостями от деформации $\varepsilon$ при разных углах $\theta$. Дилатансия определяется по формуле (6). Предельная дилатансия при деформации $\varepsilon_p$ равна $\varepsilon_{gp} = 6{,}71 \cdot 10^{-4}$. Вертикальные штриховые линии указывают на положение предельных деформаций при растяжении, чистом сдвиге и сжатии. Кривая 1 относятся к растяжению, кривые 2 - 5 относятся углам $\theta$ равным 15, 30, 45 и 60°, соответственно.

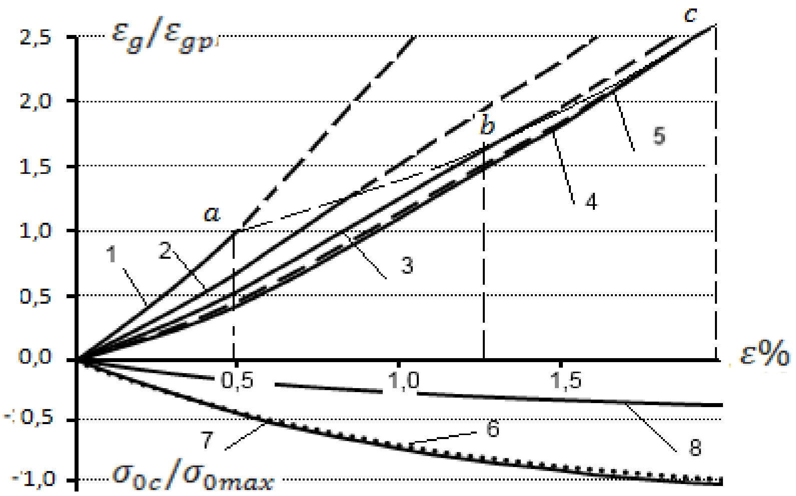


**Рис. 5.** Графики зависимости отношения дилатансии $\varepsilon_g$ к дилатансии $\varepsilon_{gp}$ от деформации $\varepsilon$: кривые 1 - 5 относятся к углам $\theta = 0$, 15, 30, 45 и 60° , соответственно; график 6 (линия из точек) - зависимость отношения $\sigma_0 / \sigma_{0\,max}$ и 7 (сплошная линия) – расчет по формуле (5) при сжатии, а 8 при угле $\theta = 45°$.

Положение кривых соответствующих: $\theta = 30°$ (чистому сдвигу), $\theta = 45°$ (штриховая линия) и сжатию ($\theta = 60°$), указывают на то, что дилатансия для этих состояний растет по оси $\varepsilon$ примерно одинаково, а влияние угла $\theta$ на интенсивность роста незначительное, особенно при $\theta > 30°$. Штриховая линия $abc$, проходящая по максимальным значениям отношения $\varepsilon_g/\varepsilon_{gp}$, показывает изменение предельных значений дилатансии (разрыхления). Она интенсивно возрастает с ростом деформации $\varepsilon$, но несущественно увеличивается при изменении угла $\theta$ от $30$ до $60°$.

Под осью $\varepsilon$ приведены еще три графика для отношения $\sigma_0 / \sigma_{0\,max}$. Кривая 6 (линия из точек) построена по исходным данным испытаний на сжатие, где $\sigma_0 = -S_{0c}/3$, а $\sigma_{0\,max} = S_{0\,max}/3$. Эта кривая приближается к значению -1, когда напряжение $\sigma_c$ достигнет предельного значения $S_{0c}$. Кривая 7 представляет расчет по формуле (5) для среднего напряжения. Подобные две кривые по данным о растяжении здесь не приводятся, но их поведение аналогичное. Сравнение этих кривых приводит к выводу, что определение среднего напряжения по формуле (5) не расходится с известным определением этой величины по курсу «сопротивления материалов», то есть о ее равенстве третьей части напряжения вдоль оси образца при растяжении или сжатии. Кривая 8 представляет расчет отношения $\sigma_0 / \sigma_{0\,max}$ для состояния $\theta$ равного 45°. Расчет среднего напряжения по формуле (5) для чистого сдвига приводит к нулевым значениям при любой деформации. Эти результаты свидетельствуют о точности выполненных расчетов параметров $æ_e$ и $\eta_e^*$, а сравнение кривых для среднего напряжения, дали основание разделить среднее напряжение на «упругую» часть и дилатансию.

Дилатансия по напряжению $\sigma_g$ определяется по формуле (7). На рис. 6 представлены графики отношений $\sigma_g/\sigma_{gp}$, которые являются зависимостями от деформации $\varepsilon$ при разных углах $\theta$. Предельная дилатансия для исследуемого материала при деформации $\varepsilon_p$ равна $\sigma_{gp} = -20{,}1$, а при деформации $\varepsilon_c - \sigma_{gc} = -14{,}7$ МПа. Значения $\sigma_g$ для всех пяти кривых отрицательные, поскольку эта дилатансия представляет сведения об утраченных связях, поэтому отношения $\sigma_g/\sigma_{gp}$ – положительные.

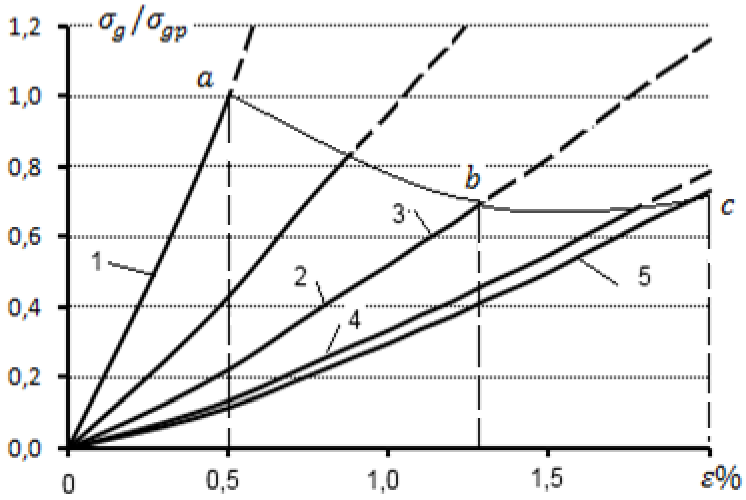


**Рис. 6.** Графики зависимости отношения дилатансий $\sigma_g/\sigma_{gp}$ от деформации $\varepsilon$: кривые 1 - 5 относятся углам $\theta$ от 0 до 60° через 15°.

Кривая 1 относится к растяжению, кривые 2 - 5 относятся углам $\theta$ равным 15, 30, 45 и 60° соответственно, но в отличие от дилатансии по деформации (рис. 5.) интенсивность изменения дилатансии по напряжению от деформации $\varepsilon$ с ростом угла $\theta$ заметно снижается. Положение кривой $abc$ указывает на то, что предельное состояние ВНПМ можно связывать с отношением $\sigma_g/\sigma_{gp}$, то есть количеством разрушенных связей, надеясь, что металлографические исследования помогут найти связь $\sigma_{gp}$ с конкретным числом утраченных связей. Такой подход дает возможность оценить «потерянное напряжение» в результате разрыва связей для любого состояния. Данная модель предусматривает механизм изменения структуры, включающего диссипативное разрыхление, которое в уравнении (4) отражается слагаемым с параметром $æ_s$, и восстановление связей с параметром $\eta_s$ при отрицательных значениях среднего напряжения.

Таким образом, разработанная методика определения параметров позволила провести исследования дилатансий по деформации и по напряжению в зависимости от деформации и угла вида напряженного состояния.

## 5. О влиянии дилатансии на предельные характеристики ВНПМ

В работе [2] предложена простая гипотеза, состоящая в том, что накопленная деформация от разрыхления $\varepsilon_g^* = 2æ_s\Phi_d S_0/9 = const$, определенная только с одним параметром $æ_s$ (параметр $\eta_s$ в прежней модели отсутствовал). Гипотеза оказалась в согласии с опытными данными испытаний серого чугуна.

Оценка результатов испытаний исследуемого композита (ВНПМ), приводит к выводу, что эту гипотезу можно принять только с весьма грубым приближением, поскольку более точные расчеты предельных значений дилатансии по деформации для состояний, относящихся к растяжению и сжатию, значительно расходятся. Этот факт достаточно убедительно иллюстрируется графиками рис. 5. Развивая идею о зависимости предельного состояния от степени разрыхления, предлагается принять не постоянную величину $\varepsilon_g^*$, а выражение $\varepsilon_{gb}^* = a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2$, называемую далее гипотезой ПС – 1. Для сравнения рассматривается вторая гипотеза ПС - 2, использующая сведения о дилатансии по напряжению $\sigma_{gb}^* = \sigma_{gi}/\sigma_{gp}$.

Результаты этого исследования показаны в виде графиков на рис. 7. Кривая 1 (линия из больших штрихов) представляет первый - $\varepsilon_{gb}^*$, а кривая 2 (линия из малых штрихов) второй - $\sigma_{gb}^*$. Их коэффициенты $a_i$ определяются по предельным значениям дилатансий для простых напряженных состояний: $\varepsilon_{gi}$ и $\sigma_{gi}$; $i = p, \tau, c$. Данные для этих двух кривых получены так же расчетом, как и для соотношения (9). Зависимости предельных значений интенсивности напряжений $S_{0b}$ показаны кривой 3, модуля главного напряжения $\sigma_{3b}$ кривой 4. Последние позволяют перестроить графики для принятых гипотез в графики в координатах $\sigma_1 \sim \sigma_3$, которые показаны во втором квадранте плоских напряженных состояний, как это выполнено в работе [2].

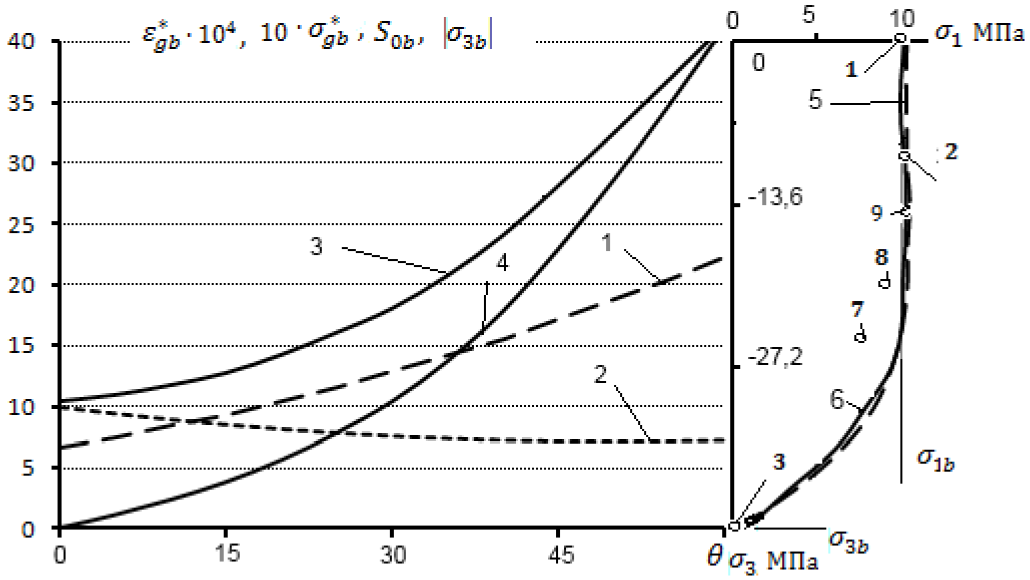


**Рис. 7.** Графики зависимости предельных значений от угла $\theta$: дилатансии $\varepsilon_{gb}^*$ - кривая 1, дилатансии по напряжению $\sigma_{gb}^*$ - 2, напряжения $S_{0b}$ – 3 и главного напряжения $\sigma_{3b}$ – 4. Сравнение гипотез в координатах $\sigma_1 \sim \sigma_3$: кривая 5 (сплошная линия) для ПС - 1 ($\varepsilon_{gb}^*$) и 6 (штриховая линия) для ПС - 2 ($\sigma_{gb}^*$). Светлые кружочки под номерами 1 – 3 и 7 – 9 - результаты испытаний.

Главные напряжения $\sigma_{1b}$ и $\sigma_{3b}$ определяются по формуле $\sigma_{ib} = S_0 c_i/3 + \sigma_0$ для отображения гипотез на рис. 7: кривая 5 для ПС – 1 и для ПС – 2 кривая 6. Сравнение графиков для гипотез ПС - 1 и ПС - 2 указывает на несущественное их различие, не смотря на заметное различие кривых 1 и 2. И это вполне объяснимо, так как они относятся к одним и тем же напряженным состояниям. Как по оси $\sigma_3$, так и на участке сопряжения прямых, они практически накладываются друг на друга и отличаются только незначительным разбросом значений напряжения $\sigma_{1b}$.

Эти результаты дают возможность провести сравнение с известными теориями прочности. Оси $\sigma_1$ и $\sigma_3$ иллюстрируют 2 – ой квадрант плоского напряженного состояния и классические гипотезы: $\sigma_{1b} = const$ и $\sigma_{3b} = const$, которые на графиках показаны тонкими линиями. Гипотезу ПС - 2 ($\sigma_{gb}^*$) следует считать более предпочтительной, поскольку она имеет, достаточно отчетливый физический смысл, так как дает возможность предсказывать количество разрушенных связей при разных напряженных состояниях, относящихся ко второму квадранту. Светлые кружочки под номерами 1, 2 и 3 представляют предельные напряжения при испытаниях на растяжение, кручение и сжатие, а 7, 8 и 9 для испытаний на совместное сжатие с кручением (сложное нагружение). Последние относятся к диаграммам с такими же номерами на рис. 1 б). Расчет данных для этих кривых проводился при нагружении по траекториям с углами $\theta = 49{,}45; 42{,}8; 36{,}8°$ и коэффициентами $\tau/\sigma = 0{,}245; 0{,}404; 0{,}577$, которые достаточно точно достигли предельных значений по результатам испытаний при сложном нагружении. Наибольшее отклонение от теорий показало испытание с номером 7, возможно из-за случайных воздействий на образец при его изготовлении.

Таким образом, учет тензорной нелинейности с определением дилатансий дает возможность с помощью математической модели, учитывающей особенности нестабильных сред, найти подход к установлению взаимосвязи дилатансий с деформационными и прочностными свойствами. Это достигается благодаря использованию тензорно – нелинейных уравнений, которые включают в себя нелинейные характеристики и параметры. Последние уточняют расчет объемной дополнительной деформации и дополнительного среднего напряжения при разных напряженных состояниях.

## Заключение

Используя результаты экспериментальных исследований механического поведения ВНПМ и математическую модель для разрыхляющихся сред, в работе получены следующие результаты:

а) определены и графически представлены характеристики формоизменения и характеристики в главных направлениях, учитывающих зависимость свойств композита от вида напряженного состояния, что выполнено с помощью разработанной и апробированной методики;

б) показано, что к тензорным соотношениям связи девиаторов необходимы уравнения для объемной деформации и среднего напряжения, с параметрами, зависящими так же от вида напряженного состояния. Показано, что эти уравнения позволяют проводить оценку эффектов дилатансии, как дополнительной объемной деформации, вызванной разрыхлением, так и дилатансии по напряжению, как дополнительное среднее напряжение, вызванное утратой связей на поверхности металлического наполнителя;

в) разработана методика определения параметров, призванных приводить в согласие теоретические кривые с опытными кривыми для объемной деформации и среднего напряжения с учетом сложившегося представления о механизме изменения структуры данного ВНПМ, включающего как диссипативное разрыхление, так и восстановление связей при отрицательных значениях среднего напряжения;

г) проведены исследования предельных дилатансий по деформации и по напряжению, как функции угла вида напряженного состояния, и показана возможность использования сведений о них в качестве удобных показателей, позволяющих давать оценку применимости классических гипотез прочности.

## Список литературы


1. Еремичев А.Н. Комплексные испытания по определению механических свойств высоконаполненного полимерного материала // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 9. С. 17-32. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/726783.html (дата обращения 01.08.2015).
2. Комков К.Ф. О тензорной нелинейности сред, проявляющих существенное различие в сопротивлении растяжению и сжатию // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 451-482. DOI: 10.7463/0513.0571202
3. Комков К.Ф. К определению напряженного состояния с наименьшим сопротивлением пластической деформации // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика и механика. 2012. Т. 67, № 6. С. 59-62.
4. Комков К.Ф. О тензорно-нелинейных уравнениях, учитывающих структурные изменения и дилатансию квазиизотропных сред // Proceedings of the 4th International scientific conference “European Conference on Innovations in Technical and Natural Sciences” (October 10, 2014). “East West” Association for Advanced Studies and Higher Education, GmbH, Vienna, 2014. P. 90-96.
5. Комков К.Ф. О тензорной нелинейности структурно-неоднородных материалов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 8. С. 419-442. DOI: 10.7463/0812.0466666

Science & Education of the Bauman MSTU Electronic journal ISSN 1994-0408

*Science and Education of the Bauman MSTU*, 2015, no. 09, pp. 279–297.

DOI: **10.7463/0915.0812703**

Received: 18.07.2015
Revised: 30.08.2015



# On Loosening Plastic Composite under Active Load and Its Influence on the Deformation and Strength Properties

**K.F. Komkov[1,*], A.N. Eremichev[1]**

[*]06kfk38@mail.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

**Keywords:** deformation, loosening (dilatancy), mathematical model, robustness, the type of stress state, the nonlinearity tensor

Processing the test results of the composite, which is a mechanical mixture of metal particles with a plastic polymer binder, has shown that its deformation and strength properties are substantially different from those of stable plastic material. The specimen tests for tensile and compression with measuring transverse deformations, as well as torsion tests of tubular samples have revealed that the process of its deformation is accompanied by a change in the original structure.

The composite instability is caused by the fact that during this process, it acquires considerable loosening that depends on the type of the stress-state. Hard metal particles are hardly deformed at any stress-state, but they form a layer of bonds that affect the mixture behavior under force action. The total deformation is the plastic flow of the binder on which deformation, caused both by sliding and by loss of the surface layer bonds, is superimposed.

The analysis shows that with destruction at tensile test the non-linear part of the bulk deformation (dilatancy) is 6 times more than "conditionally" elastic (3.5 times compressed). The objective of this work is to develop a technique for determining a dilatancy, define its influence on deformation and strength properties of the composite, and improve the mathematical model of the material. The proposed model based on the tensor-nonlinear equations describes loosening, as an additional component of the mean deformation and as a mean stress component, hereinafter referred to as: the first - by the deformation, the second – by the stress. A ratio value of the non-linear part of deformation with the quadratic tensor argument to the linear part, which reaches 0.3, shows the need for such equations. It also shows the influence of deformation on the relationship between the deviators.

To enhance capabilities of mathematical model is possible after including therein the equations for the spherical part of the tensor of deformation and stress, derived from the initial M. Rayner equations (M. Rheology. - M.: Nauka (Science), 1965. 223 pp.). To bring together the non-linearity of the relationship between deviators with nonlinearity between the spherical tensor of stresses and deformations, parameters are introduced. To define them is developed a tech-

nique. The parameters as the functions of a stress-state angle are defined by the selection of their values when the theoretical curves in the best way overlay the experimental curves for secant moduli and coefficients of transverse deformations

This experimental data processing procedure allows us to find both the parameters and the bulk compression modulus. Parameters allow us to more accurately reflect the changing bulk deformation and mean (hydrostatic) stress.

Graphs present all the features and parameters found. Using them, we have obtained dependences for ratios of dilatancies to the value of maximum dilatancy in tension. As a result, dependence of ratios on deformations can be graphically shown for different types of stress-state. To check calculations are presented three theoretical curves for the mean stress - maximum stress ratio (mean stress module in compression) to compare them with the corresponding theoretical curves, which define the mean stress as the third part of the stress along the axis of the specimen in tension or compression. Their overlapping each other proves the non-contradiction of a relation equation of the spherical tensors and the accuracy of determining parameters, which define dilatancy, according to stress. The paper shows how the ratio of these dilatancies to the value of maximum dilatancy in tension depends on the deformation for different angles of the stress-state.

Using a mathematical model that takes into consideration the features of unstable media, the accounting for non-linearity with defining tensor dilatancy allows us to find a logical approach to defining the relationships between dilatancies and deformation and strength properties. This is achieved by using tensor - nonlinear equations which include the non-linear characteristics and parameters. The latter refine the calculation of the strength characteristics through the use of information about the additional bulk deformation and additional mean stress.

The main results of the work are as follows:

a) characteristics of deformation and characteristics in the main directions, taking into account the dependence of the composite properties on the level and type of stress-state, are defined;

b) is shown that to the tensor ratios of deviators relation are needed equations for bulk deformation and mean stress, with parameters depending on the type of stress-state, which allow to assess the effects of dilatancy caused by the loss of bonds at the surface of the metal filler;

c) a technique is developed to determine parameters intended to bring the theoretical curves into line with the experimental ones for the bulk deformation and the mean stress, taking into consideration the detected change of the composite structure;

g) limits of deformation and stress dilatancy as a function of the angle of the stress-state are investigated, and the possibility to use information about them ,as the convenient indicators to assess the applicability of the classical strength hypotheses, is shown.

## References


1. Eremichev A.N. Comprehensive tests to determine the mechanical properties of highly filled polymeric material. *Inzhenernyi vestnik MGTU im. N.E. Baumana = Engineering Herald of*

*the Bauman MSTU*, 2014, no. 9, pp. 17-32. Available at: http://engbul.bmstu.ru/doc/726783.html , accessed 01.08.2015. (in Russian).

**2.** Komkov K.F. Tensor non-linearity of media that show significant difference in resistance to tension and compression**.** *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 10, pp. 451-482. DOI: 10.7463/0513.0571202 (in Russian).

3. Komkov K.F. Stress state with the least resistance to plastic deformation. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 2012, vol. 67, no. 6, pp. 59-62. (English version of journal: *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2012, vol. 67, no. 5, pp. 140-143. DOI: 10.3103/S0027133012050093 ).

4. Komkov K.F. On the tensor-nonlinear equations, taking into account structural changes and dilatancy of a quasi-isotropic media. *Proceedings of the 4th International scientific conference "European Conference on Innovations in Technical and Natural Sciences"*, October 10, 2014. "East West" Association for Advanced Studies and Higher Education, GmbH, Vienna, 2014, pp. 90-96. (in Russian).

5. Komkov K.F. Tensor nonlinear structurally heterogenious materials. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 8, pp. 419-442. DOI: 10.7463/0812.0466666 (in Russian).