

Особенности использования теории Мора в расчете ответственных деталей на прочность

09, сентябрь 2015

Ганыш С. М.^{1,*}, Владыкин Н. Г.¹

УДК: 539.4

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

*S.Ganysh-Rk5@yandex.ru

Введение

В большинстве источников литературы, как учебников, так и научных изданиях, теория прочности Мора приводится на основе геометрического анализа огибающих кругов Мора [1;2;3;4]. Такой подход связан скорее всего с историческим подходом, однако традиционное доказательство результатов теории требует значительных затрат времени, которого и так не хватает при изложении лекционного курса сопротивления материалов. Основная концепция теории Мора состоит в том, что предельное напряжение является линейной функцией пределов прочности (текучести) при растяжении и сжатии. Более точных результатов можно добиться, если дополнительно учесть и предельные напряжения при чистом сдвиге. Уточненная теория Мора позволяет рассчитывать ответственные детали машин и конструкций с более высокой точностью, чем классическая теория, что важно в таких областях как самолетостроение и судостроение. Предлагаемый подход по изложению материала позволяет подготовить современных инженеров, готовых рассчитывать.

Вывод формулы Мора

Опытные данные по испытанию образцов трубчатой формы при совместном действии внутреннего давления и осевой нагрузки, а также при воздействии крутящего момента представлены в [1]. Данные позволяют определить предельные напряжения при различных вариантах двухосного напряженного состояния.

Представим результаты испытаний материала, имеющего различные значения пределов прочности при растяжении σ_{BP} и сжатии σ_{BC} в виде диаграммы предельных напряжений σ_1^* и σ_3^* , причем $\sigma_1^* > 0$; $\sigma_3^* < 0$.

Проведем аппроксимацию опытной кривой в 4 квадранте прямолинейным отрезком, проходящим через точки $(\sigma_{BP}, 0)$; $(0, \sigma_{BC})$. Тогда уравнение рассматриваемой прямой, как прямой в отрезках будет (рис. 1А):

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_{BP}} + \frac{\sigma_3^*}{-\sigma_{BC}} = 1 \quad (1)$$

При заданной аппроксимации достаточно просто вывести формулу для коэффициента запаса прочности или для эквивалентного напряжения. Заметим, что область допускаемых напряжений ограничена прямой AC .

Пусть расчетному напряжению соответствует точка P диаграммы с координатами (σ_1, σ_3) . Проведем луч OP до пересечения с «предельной» прямой в точке M . Тогда точка M с координатами (σ_1^*, σ_3^*) соответствует предельному напряженному состоянию, подобному заданному расчетному. Причем коэффициент запаса прочности будет:

$$n = \frac{OM}{OP} = \frac{\sigma_1^*}{\sigma_1} = \frac{\sigma_3^*}{\sigma_3} \quad (2)$$

Преобразуем выражение (1) к виду:

$$\sigma_1^* - K \cdot \sigma_3^* = \sigma_{BP}, \text{ где } K = \frac{\sigma_{BP}}{\sigma_{BC}}.$$

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$n \cdot \sigma_1 - K \cdot n \cdot \sigma_3 = \sigma_{BP}.$$

Окончательно выражение принимает вид:

$$n = \frac{\sigma_{BP}}{\sigma_1 - K \cdot \sigma_3},$$

или

$$\sigma_{ЭКВ} = \sigma_1 - K \cdot \sigma_3.$$

Таким образом, получена известная формула О. Мора без построения огибающей предельных кругов, т.е. более простым способом.

Подобная аппроксимация для хрупких материалов (при этом в качестве предельных напряжений будут пределы прочности при растяжении и сжатии, соответственно) приводит к значительному занижению коэффициента запаса прочности.

Уточнение формулы Мора

Более точную аппроксимацию дает ломаная, состоящая из двух отрезков, причем в качестве точки излома принимается точка, соответствующая чистому сдвигу.

Координатами такой точки $B^*(\tau_B, -\tau_B)$, где τ_B – предел прочности при чистом сдвиге, который определяется при испытании образцов материала на кручение.

Для построения ломаной имеем три опорных точки: $A^*(\sigma_{BP}, 0)$, $B^*(\tau_B, -\tau_B)$, $C^*(0, \sigma_{BC})$ (Рис. 1В).

Пусть расчетному напряжению соответствует точка P причем, луч OP пересекает прямую A^*B^* в точке M . Как видно, для рассматриваемого случая $\sigma_1 > |\sigma_3|$. Запишем уравнение прямой AB в общем виде:

$$\sigma_3^* = D \cdot \sigma_1^* + L, \quad (3)$$

где

$$\sigma_3^* = n \cdot \sigma_3, \quad \sigma_1^* = n \cdot \sigma_1.$$

Параметры D и L определяются из нижеследующей системы линейной системы уравнений, в соответствии с координатами точек A и B .

$$\begin{cases} D \cdot \sigma_{BP} + L = 0 \\ D \cdot \tau_B + L = -\tau_B \end{cases} \quad (4)$$

Результатами решения (4) будет:

$$\begin{cases} D = \frac{\tau_B}{\sigma_{BP} - \tau_B} \\ L = -\frac{\sigma_{BP} \tau_B}{\sigma_{BP} - \tau_B} \end{cases} \quad (5)$$

Запишем выражение (3) с учетом (4) и (5):

$$n \cdot \sigma_3 = \frac{\tau_B}{\sigma_{BP} - \tau_B} \cdot n \cdot \sigma_1 - \frac{\sigma_{BP} \tau_B}{\sigma_{BP} - \tau_B},$$

откуда получим:

$$n = \frac{\sigma_{BP}}{\sigma_1 - V_1 \cdot \sigma_3},$$

где

$$V_1 = \frac{\sigma_{BP} - \tau_B}{\tau_B}.$$

Таким образом, при условии $\sigma_1 > |\sigma_3|$:

$$\sigma_{\text{ЭKB}} = \sigma_1 - V_1 \cdot \sigma_3.$$

Рассмотрим случай, когда $\sigma_1 < |\sigma_3|$. В этом случае на диаграмме (рис 1В) расчетному напряженному состоянию соответствует точка $P^\wedge$, а подобному ему предельному состоянию – точка $M^\wedge$.

Запишем в общем виде уравнение прямой B^*C^* :

$$\sigma_3^* = D^\wedge \cdot \sigma_1^* + L^\wedge, \quad (6)$$

Подставив координаты точек B^* и C^* , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} D^\wedge \cdot \tau_B + L^\wedge = -\tau_B \\ -\sigma_{BC} = L^\wedge \end{cases}.$$

Решив систему, получаем:

$$\begin{cases} D^{\wedge} = \frac{\sigma_{BC} - \tau_B}{\tau_B} \\ L^{\wedge} = -\sigma_{BC} \end{cases} \quad (7)$$

Запишем выражение (6) с учетом (7) и (2):

$$n \cdot \sigma_3 = \frac{\sigma_{BC} - \tau_B}{\tau_B} \cdot n \cdot \sigma_1 - \sigma_{BP},$$

откуда получим выражение для коэффициента запаса прочности:

$$n = \frac{\sigma_{BP}}{K} \cdot \frac{1}{V_2 \cdot \sigma_1 - \sigma_3},$$

где

$$K = \frac{\sigma_{BP}}{\sigma_{BC}}, \quad V_2 = \frac{\sigma_{BC} - \tau_B}{\tau_B}.$$

Тогда, эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{ЭKB} = K \cdot (V_2 \cdot \sigma_1 - \sigma_3).$$

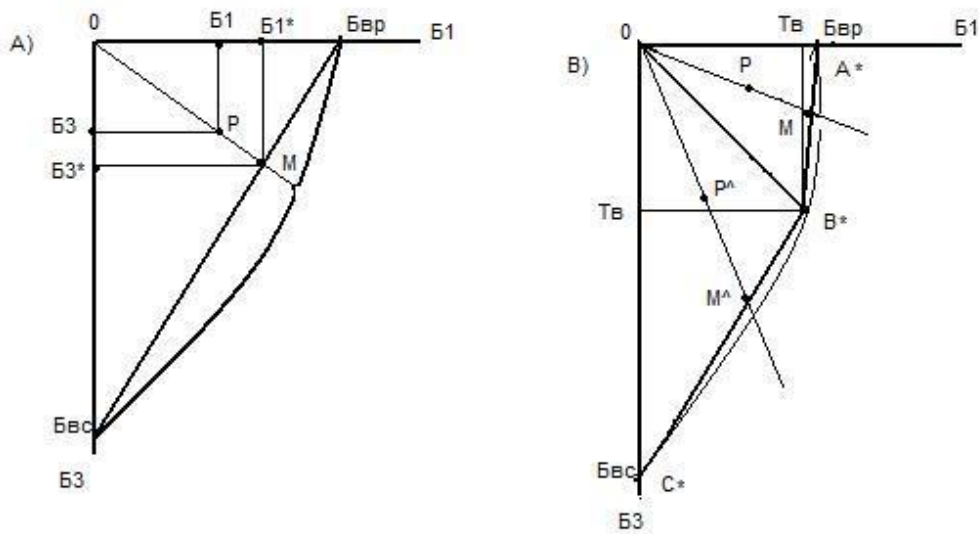


Рис. 1. Схемы аппроксимации диаграмм предельных состояний. А- прямая; В-ломаная

Рассмотрим несколько примеров решения задач с помощью уточненной формулы Мора и сравним результаты с классической формулой Мора. Согласно опытным данным, получены следующие механические характеристики для серого чугуна: $\sigma_{BP} = \tau_B = 190 \text{ МПа}$; $\sigma_{BC} = 630 \text{ МПа}$ [5].

Пример №1.

$$\begin{cases} \sigma_1 = 120 \text{ МПа}; \\ 0 \\ \sigma_3 = -80 \text{ МПа}; \end{cases}$$

В данном случае $\sigma_1 > |\sigma_3|$. Тогда по уточненному соотношению Мора:

$$V_1 = \frac{190 - 190}{190} = 0;$$

$$\sigma_{\text{ЭKB}} = 120 - 0 \cdot (-80) = 120 \text{ МПа.}$$

Для классического соотношения Мора:

$$K = \frac{190}{630} = 0.30;$$

$$\sigma_{\text{ЭKB}} = 120 - 0.30 \cdot (-80) = 144 \text{ МПа.}$$

Пример №2.

$$\begin{cases} \sigma_1 = 100 \text{ МПа;} \\ 0 \\ \sigma_3 = -200 \text{ МПа;} \end{cases}$$

В данном случае $\sigma_1 < |\sigma_3|$. Тогда по уточненному соотношению Мора:

$$V_2 = \frac{630 - 190}{190} = 2.3;$$

$$K = \frac{190}{630} = 0.30;$$

$$\sigma_{\text{ЭKB}} = 0.3 \cdot (2.3 \cdot 100 - (-200)) = 130 \text{ МПа.}$$

Для классического соотношения Мора:

$$\sigma_{\text{ЭKB}} = 100 - 0.30 \cdot (-200) = 160 \text{ МПа.}$$

Таким образом, классическая формула Мора приводит к занижению коэффициента запаса прочности для чугуна примерно на 20%, что важно при расчете ответственных конструкций.

Список литературы

- [1].Тимошенко С.П., Гере Дж.М. Механика материалов: Учебник для вузов. 2-е изд., стер. СПб.: Лань. 2002. 669 с.
- [2].Коровайцев А.В., Коровайцева Е.А., Столярчук В.А. Структурный подход в расчетах прочности и устойчивости простейших элементов конструкций летательных аппаратов. М.: Ленанд. 2015. 376 с.
- [3].Астахов М.Ф., Караваев А.В., Макаров С.Я., Суздальцев Я.Я. Справочная книга по расчету самолета на прочность. М.: Альянс. 2013. 710 с.
- [4].Михайлов А.М. Соппротивление материалов. М.: Академия. 2009. 408 с.